Aufgabe 2

a)

$$P(\text{Fritz erwischt weder gelb noch grün}) = \frac{\binom{8}{0}\binom{12}{4}}{\binom{20}{4}} = \frac{12!4!16!}{4!8!20!} = \frac{33}{323} = 0.102$$

b)

$$P(\text{mindestens 1 gelb und 1 rot}) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{900}{1820} = 0.4945$$

$$|\Omega| = \binom{16}{4} = \frac{16!}{4! \cdot 12!} = 1820$$

$$\begin{aligned}
|A| &= P(\text{1gelb,1rot,2andere Farben}) + P(\text{1gelb,2rot,1andere Farbe}) \\
&\quad + P(\text{2gelb,1rot,1andere Farben}) + P(\text{2gelb,2rot,0andere Farben}) \\
&\quad + P(\text{1gelb,3rot,0andere Farben}) + P(\text{3gelb,1rot,0andere Farben}) \\
&= \binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{8}{2} + 2 * \binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{8}{1} + \binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{8}{0} + 2 * \binom{4}{3}\binom{4}{1}\binom{8}{0} \\
&= \frac{4 \cdot 4 \cdot 8!}{2! \cdot 6!} + 2 * \frac{4! \cdot 4 \cdot 8}{2! \cdot 2!} + \frac{4!}{2! \cdot 2!} * \frac{4!}{2! \cdot 2!} + 2 * 4 \cdot 4 \\
&= 448 + 384 + 32 + 36 = 900
\end{aligned}$$

mit Gegenwahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}
\mid A_G \mid &= P(0\text{gelb},0\text{rot},4\text{andere Farben}) + P(0\text{gelb},1\text{rot},3\text{andere Farbe})\\
&\quad +P(0\text{gelb},2\text{rot},2\text{andere Farben}) + P(0\text{gelb},3\text{rot},1\text{andere Farben})\\
&\quad +P(0\text{gelb},4\text{rot},0\text{andere Farben}) + P(1\text{gelb},0\text{rot},3\text{andere Farben})\\
&\quad +P(2\text{gelb},0\text{rot},2\text{andere Farben}) + P(3\text{gelb},0\text{rot},1\text{andere Farben})\\
&\quad +P(4\text{gelb},0\text{rot},0\text{andere Farben})\\
&= \binom{4}{0}\binom{4}{0}\binom{8}{4} + \binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{8}{3} + \binom{4}{0}\binom{4}{2}\binom{8}{2} + \binom{4}{0}\binom{4}{3}\binom{8}{1} + \binom{4}{0}\binom{4}{4}\binom{8}{0}\\
&\quad + \binom{4}{1}\binom{4}{0}\binom{8}{3} + \binom{4}{2}\binom{4}{0}\binom{8}{2} + \binom{4}{3}\binom{4}{0}\binom{8}{1} + \binom{4}{4}\binom{4}{0}\binom{8}{0}\\
&= \frac{8!}{4!\cdot 4!} + 2 * \frac{4\cdot 8!}{3!\cdot 5!} + 2 * \frac{4!\cdot 8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 6!} + 2 * \frac{4\cdot 8!}{1!\cdot 7!} + 2 * 1\\
&= 70 + 448 + 336 + 64 + 2 = 920
\end{aligned}$$

$$P(\text{mindestens 1 gelb und 1 rot}) = 1 - \frac{\mid A_G \mid}{\mid \Omega \mid} = \frac{920}{1820} = 0.4945$$

c)

$$\frac{12!}{3!3!3!3!} = \frac{479001600}{1296} = 369600\,.$$

Aufgabe 3

$$\begin{array}{lcl} W & = & \text{weiss} \\ S & = & \text{schwarz} \\ G & = & \text{gewinnt} \\ N & = & \text{gewinnt nicht} \\ U & = & \text{unentschieden} \end{array}$$

Gegeben:
$P(G \mid W) = 0.3$
$P(N \mid W) = 0.1$
$P(U \mid W) = 0.6$
$P(G \mid S) = 0.05$
$P(U \mid S) = 0.75$
$P(W) = P(S) = 0.5$ faire Auslosung heisst 50% weiss oder schwarz zu erhalten

Berechnen:
$P(N \mid S) = 1 - P(G \mid S) - P(U \mid S) = 1 - 0.05 - 0.75 = 0.2$

a) Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\begin{aligned} P(N) &= P(N \mid W)P(W) + P(N \mid S)P(S) \\ &= 0.1 * 0.5 + 0.2 * 0.5 = 0.15 = 15\% \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(W \mid N) &= \frac{P(N \mid W)P(W)}{P(N)} \\ &= \frac{0.1 * 0.5}{0.15} = 0.\overline{33} = 33.33\% \end{aligned}$$

c) Informationen aus b) für die Wahrscheinlichkeiten von weisse und schwarze Figuren verwenden.

$P(W_{\text{neu}}) = 1 - P(W \mid N) = 2/3$, da die Farben getauscht werden.
$P(S_{\text{neu}}) = P(W \mid N) = 1/3$

$P(G) = P(G \mid S)P(S_{\text{neu}}) + P(G \mid W)P(W_{\text{neu}}) = 0.05 * 2/3 + 0.3 * 1/3 = 0.2167 = 21.67\%$

Aufgabe 5

$$\begin{aligned} G &= \text{Blume wird gegossen} \\ \bar{G} &= \text{Blume wird nicht gegossen} \\ E &= \text{Blume geht ein} \\ \bar{E} &= \text{Blume geht nicht ein} \end{aligned}$$

Geg.:

$$\begin{aligned} P(\bar{G}) &= \frac{1}{3} \Longrightarrow P(G) = \frac{2}{3} \\ P(E|G) &= \frac{1}{2} \\ P(E|\bar{G}) &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(a) Ges.: $P(E)$;
Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E|G) \cdot P(G) + P(E|\bar{G}) \cdot P(\bar{G}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ &= \mathbf{\frac{7}{12}} \approx \mathbf{0.58} \end{aligned}$$

(b) Ges.: $P(\bar{G}|E)$;
Mit dem Satz von Bayes gilt:

$$\begin{aligned} P(\bar{G}|E) &= \frac{P(E|\bar{G}) \cdot P(\bar{G})}{P(E|\bar{G}) \cdot P(\bar{G}) + P(E|G) \cdot P(G)} \\ &= \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{7}{12}} = \frac{3}{7} \approx \mathbf{0.43} \end{aligned}$$

Aufgabe 6

$$\begin{aligned} A &= \text{Fahrer ist Alkoholsünder} \\ B &= \text{Test zeigt positiv} \end{aligned}$$

Gegeben:
$P(A) = 0.1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.1 = 0.9$
$P(\bar{B} \mid A) = 0.3 \Rightarrow P(B \mid A) = 1 - P(\bar{B} \mid A) = 1 - 0.3 = 0.7$
$P(B \mid \bar{A}) = 0.2$

1. a)

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \bar{A})P(\bar{A}) \\ &= 0.7 * 0.1 + 0.2 * 0.9 = 0.25 = 25\% \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} P(A \mid \bar{B}) &= \frac{P(\bar{B} \mid A)P(A)}{P(\bar{B})} \\ &= \frac{0.3 * 0.1}{1 - 0.25} = 0.04 = 4\% \end{aligned}$$

2. Kapitel 4, Binomialverteilung

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= \binom{10}{3} * 0.25^3 * (1 - 0.25)^{(10-3)} \\ &= \frac{10!}{3!7!} * 0.25^3 * 0.75^7 = 0.2503 = 25.03\% \end{aligned}$$

Aufgabe 8

$X \sim N(\mu, \sigma^2) = N(5, 2^2)$

Formeln allgemein:

$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

$P(X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$

$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$

a)

$$P(X \leq 4) = \Phi\left(\frac{4-5}{2}\right) = \Phi(-0.5) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.691462 = 0.308538$$

b)

$$\begin{aligned} P(4 \leq X \leq 7) &= \Phi\left(\frac{7-5}{2}\right) - \Phi\left(\frac{4-5}{2}\right) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-0.5) = 0.841345 - 0.308538 = 0.532807 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) = P(X > 5) &= 1 - P(X \leq 5) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{5-5}{2}\right) = 1 - \Phi(0) = 1 - 0.5 = 0.5 \end{aligned}$$

Aufgabe 9

$G \quad = \quad$ keinen Grund zur Beanstandung

Gegeben:
$P(G \mid A) = P(G \mid B) = P(G \mid C) = 0.8$
$P(G \mid D) = 0.5$
$P(A) = P(B) = P(C) = 0.3$
$P(D) = 0.1$

a) Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G \mid A)P(A) + P(G \mid B)P(B) + P(G \mid C)P(C) + P(G \mid D)P(D) \\ &= 0.8 * 0.3 + 0.8 * 0.3 + 0.8 * 0.3 + 0.5 * 0.1 = 0.77 = 77\% \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(D \mid G) &= \frac{P(G \mid D)P(D)}{P(G)} \\ &= \frac{0.5 * 0.1}{0.77} = 0.0649 = 6.49\% \end{aligned}$$

Aufgabe 10

$X \sim (10,2)$ $\mu = 10$, $\sigma^2 = 2$

a) Tschebyscheff-Ungleichung
Formel allgemein:
$P(\mid X - \mu \mid < c) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{c^2}$

$$\begin{aligned} P(8 < X < 12) &= P(\mid X - 10 \mid < 2) \geq 1 - \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2} \\ P(8 < X < 12) &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$c = 12 - 10 = 10 - 8 = 2$

b)

$$P(\mid X - \mu \mid < c) \geq 1 - \frac{2}{c^2} = 0.8$$

$$\begin{aligned} 1 - 0.8 &= \frac{2}{c^2} \\ c^2 &= \frac{2}{0.2} = 10 \\ c &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

Intervall: $[10 - \sqrt{10}; 10 + \sqrt{10}] = [6.8377; 13.1623]$

Aufgabe 11

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= \rho(X,Y) * \sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)} = -\frac{1}{3} * \sqrt{4 * 9} \\ &= -2 \\ V(X - Y) &= V(X) + V(Y) - 2cov(X,Y) \\ &= 4 + 9 - (2 * (-2)) \\ &= 17 \end{aligned}$$

Aufgabe 13

a)

$$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\theta x$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\theta x & \text{für} \quad -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}.$$

b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < -2 \\ \frac{1}{4}(x+2) & \text{für} \quad -2 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{für} \quad x > 2 \end{cases}.$$

stetige Gleichverteilung:

$$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} = \frac{1}{4} = \frac{1}{b-a}$$

mit $b = 2$ und $a = -2$

c) Ges.: $E(X)$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-2}^{2} x f(x) dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{-2}^{2} (x + \theta x^2) dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} \theta x^3 \right]_{-2}^{2} = \frac{1}{4} \left[0 + \left(\frac{8}{3} \cdot \theta - \left(-\frac{8}{3} \cdot \theta \right) \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{3} \cdot \theta = \frac{4}{3} \cdot \theta \end{aligned}$$

Aufgabe 14

(a) Es muß gelten:

(i) $\int_0^2 f(x)dx = 1$

(ii) $f(x) \geq 0$

Zu (i):

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)dx &= \int_0^2 c \cdot x(2-x)dx = c\int_0^2 x(2-x)dx \\ &= c\int_0^2 2x - x^2 dx = c\left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 \\ &= c\left[4 - \frac{8}{3} - 0\right] = c \cdot \frac{4}{3} = 1 \\ \Longrightarrow & \quad c = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Zu (ii):

$$f(x) = \frac{3}{4}x(2-x) \geq 0 \quad \forall \ x \in [0,2]$$

(b) Ges.: $F(x)$

$$\begin{aligned} F(x) = P(X \leq x) &= \int_0^x f(t)dt = \\ &= \int_0^x \frac{3}{4}t(2-t)dt \\ &= \frac{3}{4}\int_0^x 2t - t^2 dt = \frac{3}{4}\left[t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_0^x \\ &= \frac{3}{4}\left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 0\right] \\ &= \frac{3}{4}x^2\left(1 - \frac{1}{3}x\right) \end{aligned}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{3}{4}x^2(1 - \frac{1}{3}x) & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$

(c) Ges.: $E(X)$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^2 x f(x) dx \\
&= \frac{3}{4} \int_0^2 2x^2 - x^3 dx \\
&= \frac{3}{4} \left[\frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^2 = \frac{3}{4} \left[\frac{2}{3} \cdot 8 - \frac{1}{4} \cdot 16 - 0 \right] \\
&= \frac{3}{4} \left[\frac{16}{3} - \frac{12}{3} \right] = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1
\end{aligned}$$

Danit gilt :
$E(X) = 1$

Ges. : Var(X)

Es gilt:
$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^2 x^2 f(x) dx \\
&= \frac{3}{4} \int_0^2 2x^3 - x^4 dx \\
&= \frac{3}{4} \left[\frac{2}{4} x^4 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^2 = \frac{3}{4} \left[\frac{2}{4} \cdot 16 - \frac{1}{5} \cdot 32 - 0 \right] \\
&= 6 - \frac{3 \cdot 32}{4 \cdot 5} = 6 - \frac{3 \cdot 8}{5} = \frac{6}{5}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad Var(X) = \frac{6}{5} - 1^2 = \frac{1}{5}$$

(d) Ges.: $P(|X - \mu| < 0.5)$
Ungleichung von Tschebyscheff

$$P(|X - \mu| < 0.5) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{c^2} = 1 - \frac{(\frac{1}{5})}{(0.5)^2} = 1 - 0.8 = 0.20$$

(e) Sei Y= Gewinn. Y ist diskret verteilt mit

$$Y = \begin{cases} 365 - 300 = 65 & \text{falls} \quad x \leq \frac{4}{3} \\ 500 - 300 = 200 & \text{falls} \quad x > \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$E(Y) = P(X \leq \frac{4}{3}) \cdot 65 + P(X > \frac{4}{3}) \cdot 200$$

$$P(X \leq \frac{4}{3}) = \frac{3}{4} \int_0^{4/3} x(2-x)dx = \frac{3}{4} \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^{4/3} = \frac{3}{4} \left[(4/3)^2 - \frac{(4/3)^3}{3} \right]$$

$$= \frac{3}{4} \left[\frac{16}{9} - \frac{64}{9 \cdot 9} \right] = \frac{3}{4} \left[\frac{144 - 64}{9 \cdot 9} \right] = \frac{20}{27} \approx 0.7407$$

$$P(X > \frac{4}{3}) = 1 - P(X \leq \frac{4}{3}) = 0.2593$$

$$\Longrightarrow \quad E(Y) = 0.7407 \cdot 65 + 0.2593 \cdot 200 = 48.1455 + 51.86 \approx 100.0055$$

Aufgabe 15

a) Ereignis N: $p = 0.2$
Ereignis B $p = 0.8$

i		$P(X = i)$
5	N N N N N	$\binom{5}{5} * 0.2^5 = 0.00032$
4	N N N N B usw.	$\binom{5}{4} * 0.2^4 * 0.8 = 0.00640$
3	N N N B B usw.	$\binom{5}{3} * 0.2^3 * 0.8^2 = 0.0512$
2	N N B B B usw.	$\binom{5}{2} * 0.2^2 * 0.8^3 = 0.2048$
1	N B B B B usw.	$\binom{5}{1} * 0.2 * 0.8^4 = 0.4096$
0	B B B B B usw.	$\binom{5}{0} * 0.8^5 = 0.32768$
		$\sum = 1$

b) Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.32768 & 0 \leq x < 1 \\ 0.73728 & 1 \leq x < 2 \\ 0.94208 & 2 \leq x < 3 \\ 0.99328 & 3 \leq x < 4 \\ 0.99968 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & 5 \leq x \end{cases}$$

Zeichnung:
Treppenfunktion

Aufgabe 20

Sei X= Anzahl der Kunden, die nach 30 Jahren noch leben.
X ist $B(n,p)$ verteilt mit $p = 0.7$.

(a) $n = 5$

(i) Ges.: $P(X = 2)$

$$
\begin{aligned}
P(X=2) &= \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} = \binom{5}{2} 0.7^2 \cdot 0.3^3 \\
&= \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 0.7^2 \cdot 0.3^3 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 0.7^2 0.3^3 \\
&= 10 \cdot 0.7^2 0.3^3 = 0.1323
\end{aligned}
$$

(ii) Wahrscheinlichkeit nicht zu leben, beträgt $1 - p = 0.3$.
Ges.: $P(1 \leq X \leq 3)$

$$
\begin{aligned}
P(1 \leq X \leq 3) &= P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\
&= \binom{5}{1} 0.7^4 \cdot 0.3^1 + \binom{5}{2} 0.7^3 \cdot 0.3^2 + \binom{5}{3} 0.7^2 \cdot 0.3^3 \\
&= 0.3602 + 0.3087 + 0.1323 \\
&= 0.8012
\end{aligned}
$$

(b) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

mit

$$
\begin{aligned}
\mu &= np = 70 \\
\sigma^2 &= np(1-p) = 21
\end{aligned}
$$

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt dann:

$$
\begin{aligned}
P(65 \leq X \leq 75) &= P(X \leq 75) - P(X \leq 65) \\
&= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{75-70}{\sqrt{21}}\right) - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{65-70}{\sqrt{21}}\right) \\
&= P\left(Z \leq \frac{5}{\sqrt{21}}\right) - \left(Z \leq -\frac{5}{\sqrt{21}}\right) \\
&= \Phi(1.09) - (1 - \Phi(1.09)) \\
&= 2\Phi(1.09) - 1 = 2 \cdot 0.8621 - 1 = 0.7242
\end{aligned}
$$

Die Approximation ist zulässig, da np(1-p) = 21 > 9

Aufgabe 26

$\sigma_0^2 = 10$
$\bar{x} = 500g$

a) $n_a = 10$
$\bar{x}_a = 485$
$s_a = 5g$

(i) χ^2-Test für die Varianz
$H_0 : s_a^2 = \sigma_0^2$
$H_1 : s_a^2 \neq \sigma_0^2$

$$t = \frac{(n_a - 1)s_a^2}{\sigma_0^2} = \frac{9 \cdot 25}{10} = 22.5$$

Kritischer Bereich: $K = [0, c_{n_a-1;\alpha/2}) \cup (c_{n_a-1;1-\alpha/2}, \infty)$

$$\begin{aligned} c_{n_a-1;\alpha/2} &= c_{9;0.025} = 2.7 \\ c_{n_a-1;1-\alpha/2} &= c_{9;0.975} = 19 \end{aligned}$$

$t > c_{n_a-1;1-\alpha/2}$
$22.5 > 19$
$\Rightarrow H_0$ ablehnen, d.h. die Behauptung des Nudelfabrikants kann widerlegt werden.

(ii) Einstichprobenproblem, Varianz unbekannt
einfacher t-Test
$H_0 : \mu \geq 495g$
$H_1 : \mu < 495g$

$$t = \frac{485 - 495}{5}\sqrt{10} = -6.3246$$

kritischer Wert: $-t_{n_a-1;1-\alpha} = -t_{9;0.95} = -1.8331$
$-6.3246 < -1.8331$
$\Rightarrow H_0$ ablehnen, d.h. die Behauptung des Nudelfabrikants kann widerlegt werden.

b) Zweistichprobenproblem, Varianzen sind unbekannt, aber gleich
doppelter t-Test
$s_b = 10$
$n_b = 10$
$\bar{x}_b = 495g$
$H_0 : \bar{x}_a \geq \bar{x}_b$
$H_1 : \bar{x}_a < \bar{x}_b$
gepoolte Varianz:

$$s^2 = \frac{(n_a - 1)s_a^2 + (n_b - 1)s_b^2}{n_a + n_b - 2} = \frac{9 \cdot 25 + 9 \cdot 100}{18} = 62.5$$

$$t = \frac{\bar{x}_a - \bar{x}_b}{s} \cdot \sqrt{\frac{n_a \cdot n_b}{n_a + n_b}} = \frac{485 - 495}{\sqrt{62.5}} \cdot \sqrt{\frac{100}{20}} = -2.8284$$

kritischer Wert: $-t_{n_a+n_b-2;1-\alpha} = -t_{18;0.95} = -1.7341$
$-2.8284 < -1.7341$
$\Rightarrow H_0$ ablehnen, d.h. Markenwechsel hat sich gelohnt.

Aufgabe 28

a) n=16, $\bar{x}$=240, s=10, α=0.05
t-Quantil ist $t_{(n-1),(1-\alpha/2)} = t_{15,0.975} = 2.1314$.

Damit ist das KI $[240 - 2.1314 \cdot 10/\sqrt{16}, 240 + 2.1314 \cdot 10/\sqrt{16}] = [240 - 5.3285, 240 + 5.3285] = [234.6715, 245.3285]$.

b) Schmäler, statistische Unsicherheit wäre ja geringer, damit präzisere Schätzung möglich, drückt sich dadurch aus, daß das Normalverteilungsquantil kleiner als das t-Quantil ist. $z_{0.975} = 1.96 < 2.1314$

c) Einstichprobenproblem, Varianz unbekannt
einfacher t-Test
Einseitiger Test
t-Quantil ist jetzt $t_{(n-1),(1-\alpha)} = t_{15,0.95} = 1.7531$.

$H_0 : \mu \geq 250$
$H_1 : \mu < 250$

$$T = \frac{240 - 250}{10} \cdot \sqrt{16} = -4.$$

H_0 wird abgelehnt, denn $-4 < -1.7531$.

Aufgabe 32

Prüfen der Gleichheit zweier Binomialwahrscheinlichkeiten

$p_A = \frac{5}{10} = 0.5 \; n_A = 10$

$p_B = \frac{6}{8} = 0.75 \; n_B = 8$

$H_0 : p_A = p_B$
$H_1 : p_A \neq p_B$

$$\begin{aligned}
d &= p_A - p_B = 0.5 - 0.75 = -0.25 \\
\hat{p} &= \frac{x_A + x_B}{n_A + n_B} = \frac{5+6}{10+8} = 0.6111 \\
t &= \frac{d}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}} = \frac{-0.25}{\sqrt{0.6111 \cdot 0.3889\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{8}\right)}} = -1.0811
\end{aligned}$$

Kritischer Wert: $z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$
$\mid t \mid = 1.0811 < 1.96$
$\Rightarrow H_0$ kann nicht abgelehnt werde.

Bemerkung: Normalverteilungsappr. ist in diesem Fall eigentlich nicht zulässig. (alte Klausuraufgabe, wenn so was kommt wird sie zulässig sein)

Aufgabe 33

Chi-Quadrat-Anpassungstest

$H_0 : F(x) = F_0(x)$
$H_1 : F(x) \neq F_0(x)$

$$T(X) = \sum \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$$

	A	B	C	D
N_i	840	760	270	130
p_i	0.4	0.4	0.15	0.05
np_i	800	800	300	100

$n = 2000$

$k = 4$ (Anzahl Klassen)

Freiheitsgrade $k - 1 = 3$

$\chi^2_{3;0.99} = 11.3$

$$\begin{aligned} T(X) &= \frac{(840-800)^2}{800} + \frac{(760-800)^2}{800} + \frac{(270-300)^2}{300} + \frac{(130-100)^2}{100} \\ &= \frac{1600}{800} + \frac{1600}{800} + \frac{900}{300} + \frac{900}{100} \\ &= 2 + 2 + 3 + 9 \\ &= 16 \end{aligned}$$

$16 > 11.3 \Rightarrow H_0$ ablehnen.