

# Zusammenstellung der Klausuraufgaben Statistik II

## Wahrscheinlichkeitsrechnung, Unabhängigkeit, Tschebyschev, bedingte Wahrscheinlichkeit

### Aufgabe 1

Eine Urne enthält 3 schwarze, 5 weiße und 4 rote Kugeln. Drei Kugeln sollen zufällig entnommen werden, wobei A das Ereignis „Eine gezogene Kugel ist schwarz, eine weiß und eine rot“ bezeichne. Berechnen Sie  $P(A)$  sowohl für die Ziehung mit Zurücklegen als auch ohne Zurücklegen.

### Aufgabe 2

Oma Berta gibt ihren Enkeln Fritz, Max und Susi eine Tüte mit 20 Bonbons, wovon 8 rot, 4 grün, 4 gelb und 4 weiß sind.

- Fritz greift als erster in die Tüte und nimmt sich 4 Bonbons. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er weder ein gelbes noch ein grünes Bonbon erwischt hat?
- Fritz hat tatsächlich 4 rote Bonbons aus der Tüte genommen. Nun ist Max an der Reihe. Er holt ebenfalls 4 Bonbons aus der Tüte. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er mindestens ein gelbes und ein rotes Bonbon aus der Tüte geholt hat?
- Nachdem Max tatsächlich von jeder Farbe ein Bonbon erwischt hat, schüttet Susi die restlichen Bonbons auf den Tisch und legt sie der Reihe nach auf. Auf wieviele unterscheidbare Arten kann sie dies tun?

### Aufgabe 3

Kasparov muß schon wieder gegen Deep Thought, einen Computer von immenser Rechenleistung, im Schach antreten. Von früheren Begegnungen her weiß Kasparov, daß er mit den weißen Figuren 30% aller Spiele gewinnt, 10% verliert und 60% der Spiele unentschieden ausgehen. Hat er dagegen die schwarzen Figuren, so gewinnt er nur 5% aller Spiele, schafft aber in 75% aller Spiele ein Unentschieden. Für das erste Spiel wird die Farbe der Figuren fair ausgelost.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Kasparov das Spiel *verliert*?
- Kasparov *verliert* das erste Spiel tatsächlich. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hatte Kasparov die weißen Figuren?
- Für das zweite Spiel wechselt nun die Spielfarbe. Das heißt, falls Kasparov beim ersten Spiel zum Beispiel die weißen Figuren hatte, so spielt er jetzt mit den schwarzen Figuren. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er das zweite Spiel *gewinnt*?

#### **Aufgabe 4**

In einer Urne befinden sich vier Kugeln mit den aufgedruckten Buchstabenkombinationen 'aab', 'aba', 'baa', 'bbb'. Es werde eine Kugel aus der Urne gezogen. Wir definieren die Ereignisse

$A_i \dots$  Die gezogene Kugel hat an der  $i$ -ten Stelle ein 'a',  $i = 1, 2, 3$

Sind die drei Ereignisse  $A_1, A_2$  und  $A_3$  stochastisch unabhängig?

#### **Aufgabe 5**

Herr T. bittet Frau F., während seiner Abwesenheit eine Blume zu gießen. Allerdings muß er davon ausgehen, daß Frau F. mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{3}$  die Blume nicht gießt. Die Blume wird mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  eingehen, wenn sie gegossen wird, und mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{3}{4}$  eingehen, wenn sie nicht gegossen wird.

1. Wie wahrscheinlich ist es, daß die Blume während der Abwesenheit von Herrn T. eingeht?
2. Die Blume geht während der Abwesenheit von Herrn T. ein. Wie wahrscheinlich ist es, daß Frau F. sie nicht gegossen hat?

#### **Aufgabe 6**

In der Faschingszeit werden Autofahrer des Nachts häufig zu Alkoholkontrollen gebeten. Erfahrungsgemäß sind unter den kontrollierten Autofahrern 10% „Alkoholsünder“ (d.h. Autofahrer, deren Alkoholgehalt im Blut 0.8 Promille oder mehr beträgt). Ein Schnelltest soll klären, ob der Alkoholgehalt im Blut des kontrollierten Autofahrers zu hoch ist. Dieser Test irrt sich bei Alkoholsündern mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% (d.h. er zeigt negativ, obwohl der Alkoholgehalt im Blut zu hoch ist). Der Test irrt sich bei Autofahrern, die nicht zu den Alkoholsündern zählen, mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% (d.h. er zeigt positiv, obwohl der Alkoholgehalt im Blut nicht zu hoch ist).

1. Ein Autofahrer wird kontrolliert.
  - (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Alkoholtest positiv zeigt?
  - (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß es sich um einen Alkoholsünder handelt, obwohl der Alkoholtest negativ zeigt?
2. Nehmen Sie im folgenden an, daß die Wahrscheinlichkeit, daß der Alkoholtest positiv zeigt, gleich 0.25 ist. In einer Nacht werden 10 Autofahrer kontrolliert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß darunter genau drei Autofahrer sind, für die der Alkoholtest positiv zeigt?

### **Aufgabe 7**

An einer Universität kann man sich für BWL, VWL oder ein naturwissenschaftliches Fach einschreiben. 40% der Immatrikulierten studieren BWL und 20% VWL. Unter den Naturwissenschaftlern erhält jeder vierte Student Bafög, bei den Volkswirten ebenfalls jeder vierte und bei den Betriebswirten erhalten sogar 6 von 10 Studenten Bafög.

- Bei einem Interview gibt ein Student an, daß er kein Bafög erhält. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Student für ein naturwissenschaftliches Fach immatrikuliert ist?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Student der Wirtschaftswissenschaften kein Bafög erhält?
- Ist in unserem Fall der Erhalt von Bafög unabhängig von der Studienrichtung? Begründen Sie ihre Antwort.

### **Aufgabe 8**

Sei  $X \sim N(5, 2^2)$ . Berechnen Sie:

- $P(X \leq 4)$
- $P(4 \leq X \leq 7)$
- $P(X \geq 5)$

### **Aufgabe 9**

Eine Schneiderei bestellt Stoffe von vier verschiedenen Firmen: A, B, C, D. Aus Erfahrung ist bekannt, daß die Lieferungen der Firmen A, B und C jeweils in 80% der Fälle keinen Grund zur Beanstandung geben. Bei Firma D ist dies nur in 50% der Fälle der Fall. Aus diesem Grund werden 90% der Bestellungen zu jeweils gleichen Teilen an die Firmen A, B, C gegeben und nur 10% an die Firma D.

- Berechnen Sie den Anteil (in %) der nicht zu beanstandenden Lieferungen mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit!
- Die Schneiderei erhält eine ordnungsgemäße Lieferung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Lieferung von der Firma D kommt?

### **Aufgabe 10**

Von einer Zufallsvariablen  $X$  sei nur bekannt, daß sie den Erwartungswert 10 und die Varianz 2 besitzt.

- Wie groß ist  $P(8 < X < 12)$  mindestens?
- Bestimmen Sie das kleinste, symmetrisch um 10 gelegene Intervall der Form  $[10 - c, 10 + c]$ , in welches mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.8 die Werte von  $X$  fallen.

### **Aufgabe 11**

Von den Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sei bekannt, daß  $\text{Var}(X) = 4$ ,  $\text{Var}(Y) = 9$  und daß der Korrelationskoeffizient  $\rho(X, Y) = -\frac{1}{3}$  ist. Welche Varianz hat die daraus abgeleitete Zufallsvariable  $X - Y$ ?

### Aufgabe 12

Ein Computerhersteller bestellt Festplatten von vier verschiedenen Firmen: F(utzi), I(KM), S(eetor), W(estig). Aus Erfahrung ist bekannt, daß die Lieferungen der Firmen F, I und S jeweils in 98% der Fälle keinen Grund zur Beanstandung geben. Bei Firma W ist dies nur in 93% der Fälle der Fall. Aus diesem Grund werden 90% der Bestellungen zu jeweils gleichen Teilen an die Firmen F, I, S gegeben und nur 10% an die Firma W.

- Berechnen Sie den zu erwartenden Anteil (in %) der nicht zu beanstandenden Lieferungen!
- Der Computerhersteller erhält eine ordnungsgemäße Lieferung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Lieferung von der Firma W kommt?

## Dichte, Verteilung

### Aufgabe 13

Von einer stetigen Zufallsvariable  $X$ , deren Verteilung von einem Parameter  $\theta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  abhängt, sei die Verteilungsfunktion gegeben:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \\ \frac{1}{4}(x+2) + \frac{1}{8}\theta(x^2-4) & \text{für } -2 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{für } x > 2 \end{cases} .$$

- Wie lautet die Dichte  $f(x)$  von  $X$ ?
- Welche spezielle Verteilung liegt für  $\theta = 0$  vor?
- Berechnen Sie den Erwartungswert von  $X$  in Abhängigkeit von  $\theta$

### Aufgabe 14

Der Qualitätsindex eines Produkts kann als eine Zufallsvariable  $X$  mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} cx(2-x) & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

aufgefaßt werden.

- Wie muß die Konstante  $c$  gewählt werden, damit  $f(x)$  eine Dichte darstellt?
- Wie lautet die zugehörige Verteilungsfunktion?
- Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von  $X$ .
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens, daß  $X$  um höchstens 0.5 vom Erwartungswert abweicht?
- Die Herstellungskosten des Produkts betragen pro Einheit 300 DM. Der Verkaufspreis beträgt 365 DM bei  $x \leq \frac{4}{3}$  und 500 DM für  $x > \frac{4}{3}$  pro Einheit. Wie hoch ist der zu erwartende Gewinn pro Einheit?

### Aufgabe 15

$X$  = Anzahl der bei der Prüfung durchgefallenen Studenten.

Geprüft werden  $n = 5$  Studenten.

Die Wahrscheinlichkeit für "Nichtbestehen" sei  $p = 0.2$

- Geben Sie den Zustandsraum  $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  und die Wahrscheinlichkeiten an.
- Berechnen und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion.

### Tests, KI; diskret

### Aufgabe 16

Bei 510 Studenten wird der Einfluß einer 4-stündigen Zusatzübung auf den Klausurerfolg untersucht:

		Erfolg		
		ja	nein	
Zusatzübung	nein	150	80	230
	ja	220	60	280
		370	140	510

- Geben Sie eine geeignete Maßzahl an, die Stärke und Richtung des Zusammenhangs zwischen „Zusatzübung“ und „Erfolg“ beschreibt!
- Ist der Zusammenhang positiv dahingehend, daß ein Besuch der Zusatzübung die Erfolgsaussichten bei der Klausur erhöht, oder ist der Zusammenhang negativ?
- Berechnen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für den Odds Ratio! Lehnen Sie aufgrund dieses Ergebnisses die Hypothese  
 $H_0$  : „Zusatzübung“ und „Erfolg“ sind unabhängig  
ab?

### Aufgabe 17

Eine Maschine fertigt Bauteile, die — laut Hersteller — mit einer Wahrscheinlichkeit  $p = 0.05$  fehlerhaft sind. In einer Stichprobe vom Umfang  $n = 200$  wurden  $k = 15$  fehlerhafte Bauteile gefunden.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis unter der Annahme, daß die Herstellerangabe richtig ist?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mehr als 10 fehlerhafte Stücke in einer Stichprobe vom Umfang  $n = 200$  zu finden unter der Annahme, daß die Herstellerangabe richtig ist?
- Sie mißtrauen den Angaben des Herstellers und berechnen ein Konfidenzintervall für  $p$  zum Vertrauensgrad  $1 - \alpha = 0.95$ . Können Sie die Behauptung des Herstellers mittels des erhaltenen Konfidenzintervalls widerlegen?

### Aufgabe 18

Ein Hersteller eines bestimmten Massenartikels beauftragt ein Marktforschungsinstitut herauszufinden, inwieweit die Verbraucher bereit wären, auf ein vergleichbares Produkt zu wechseln, das als umweltfreundlicher gilt, aber auch etwas teurer als das bisherige Produkt ist.

- a) Der Hersteller schätzt aufgrund bisheriger Erfahrungen, daß der Anteil  $\hat{p}$  der Verbraucher, die bereit wären, auf das teurere Produkt zu wechseln, derzeit 0.4 beträgt. Sie als Mitarbeiter des Marktforschungsinstituts haben jetzt den Auftrag, den erforderlichen Stichprobenumfang  $n$  für die Verbraucherbefragung zu bestimmen. Dabei sollen Sie berücksichtigen, daß der Anteil mit einer Genauigkeit von  $\pm 0.03$  geschätzt werden soll bei einem vorgegebenen Vertrauensgrad von 0.95.

Berechnen Sie den erforderlichen Stichprobenumfang! Zur Bestimmung der Varianz dürfen Sie dabei von der Annahme ausgehen, daß 0.4 der tatsächliche Wert für  $p$  ist.

[Ergebnis:  $n = 1025$ ]

- b) Eine Stichprobe mit dem in a) berechneten Umfang liefert einen Anteil von 33% an Verbrauchern, die auf das teurere Produkt wechseln würden. Bestimmen Sie das zugehörige Konfidenzintervall bei einem Vertrauensgrad von 0.95.
- c) Können Sie aufgrund der bisherigen Ergebnisse die anfängliche Hypothese des Herstellers bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0.05 verwerfen? Begründen Sie Ihre Antwort!

### Aufgabe 19

Eine Untersuchung des Zusammenhangs von Rauchen ( $X$ ) und einer bestimmten Erkrankung ( $Y$ ) liefert die folgende Kontingenztafel:

	Erkrankung	
	ja	nein
Raucher	40	60
Nichtraucher	20	80

- a) Prüfen Sie mit dem Test auf der Basis des geschätzten **Log-Odds Ratios** die Hypothese  
 $H_0 : X$  und  $Y$  sind unabhängig!  
(Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 0.05$ )
- b) Geben Sie das 95%-Konfidenzintervall für den Odds Ratio an!

### Aufgabe 20

Ein Versicherungsvertreter schließt mit Kunden, die alle das gleiche Alter besitzen, Lebensversicherungsverträge ab. Nach der Sterbetafel beträgt die Wahrscheinlichkeit, die nächsten 30 Jahre zu überleben, für jeden Versicherungsnehmer 0.7.

- Die Anzahl der Kunden sei 5. Man berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß nach 30 Jahren
  - genau 2 Kunden noch leben
  - mindestens 1 Kunde und höchstens 3 Kunden nicht mehr leben.
- Die Anzahl der Kunden sei nun 100. Man berechne mit Hilfe der Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit, daß nach 30 Jahren mindestens 65 und höchstens 75 Kunden noch leben. Ist diese Approximation zulässig?

### **Aufgabe 21**

Ein Marktforschungsinstitut startet eine Untersuchung über die Verwendung von Kreditkarten in der Bundesrepublik Deutschland. Es soll festgestellt werden, wie groß der Anteil der erwachsenen Bundesbürger ist, die ihre Rechnungen – soweit möglich – zumindest überwiegend mit Hilfe von Kreditkarten bezahlen.

- Man nimmt an, daß dieser Anteil derzeit 0.3 ist. Bestimmen Sie aufgrund dieses Vorwissens den für die Untersuchung erforderlichen Stichprobenumfang, wenn der Anteil auf  $\pm 2\%$ -Punkte genau geschätzt werden soll bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0.05.
- Eine Stichprobe mit dem in a) berechneten Umfang liefert einen Anteil der Kreditkartenbenutzer von 27%. Bestimmen Sie das zugehörige Konfidenzintervall bei einem Vertrauensgrad von 0.95.
- Kann aufgrund der vorhandenen Ergebnisse die ursprüngliche Annahme mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0.05 verworfen werden? Begründen Sie ihre Antwort.

### **Aufgabe 22**

In 200 Supermärkten wird getestet, ob sich eine bestimmte Marketingmaßnahme erfolgreich auf die Verkaufszahlen eines Produktes auswirkt:

		Erfolg		
		ja	nein	
Marketingmaßnahme	nein	60	40	100
	ja	80	20	100
		140	60	200

- Berechnen Sie den  $\chi^2$ -Wert!
- Geben Sie eine geeignete Maßzahl an, die Stärke und Richtung des Zusammenhangs zwischen „Marketingmaßnahme“ und „Erfolg“ beschreibt!
- Ist der Zusammenhang positiv dahingehend, daß die Marketingmaßnahme ein Erfolg ist, oder ist der Zusammenhang negativ?
- Berechnen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für den Odds Ratio! Lehnen Sie aufgrund dieses Ergebnisses die Hypothese  
 $H_0$  : „Marketingmaßnahme“ und „Erfolg“ sind unabhängig  
ab?

### **Aufgabe 23**

In einer Stichprobe befinden sich 80 Studenten, die auf die Statistiklausur gelernt haben. Von diesen 80 Studenten fielen 20 durch. Hingegen bestanden von den 100 Studenten, die nicht auf die Klausur lernten, immerhin 30 die Klausur. Sind die Merkmale Prüfungsvorbereitung und Bestehen der Klausur unabhängig ( $\alpha = 0.05$ )?

### **Aufgabe 24**

Ein Marktforschungsinstitut startet eine Untersuchung über das „Einkaufen im Internet“ in der Bundesrepublik Deutschland. Es soll festgestellt werden, wie groß der Anteil der erwachsenen Bundesbürger ist, die bereits mindestens einmal Waren per Internet bestellt haben.

- a) Man nimmt an, daß dieser Anteil  $p$  derzeit 0.2 ist. Bestimmen Sie unter Verwendung der Normalapproximation aufgrund dieses Vorwissens den für die Untersuchung erforderlichen Stichprobenumfang, wenn der Anteil auf  $\pm 0.03$  genau geschätzt werden soll bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0.05.
- b) Eine Stichprobe vom Umfang  $n = 683$  liefert einen Anteil von 0.17 an Personen, die bereits mindestens einmal per Internet eingekauft haben. Bestimmen Sie das zugehörige Konfidenzintervall bei einem Vertrauensgrad von 0.95.
- c) Kann aufgrund der vorhandenen Ergebnisse die ursprüngliche Annahme  $p = 0.2$  mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0.05 verworfen werden? Begründen Sie ihre Antwort (ohne Rechnung!).

### **Aufgabe 25**

Beim Werfen eines „Würfels“ mit nur *vier* Seiten zeigt immer eine Seite nach unten. Es soll für einen bestimmten „Würfel“ zum Signifikanzniveau  $\alpha$  getestet werden, ob beim zufälligen Werfen alle vier Seiten mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach unten zeigen. Bei 192 unabhängigen Würfeln zeigte die 1. Seite 42-mal nach unten, die 2. Seite 58-mal, die 3. Seite 38-mal und die 4. Seite 54-mal. Testen Sie die Hypothese, daß der Würfel fair ist ( $\alpha = 0.05$ )!

## Tests, KI; stetig

### Aufgabe 26

Ein Nudelfabrikant behauptet, daß seine 500g-Packungen der Marke „Al Dente“ mindestens 495g enthalten und daß die produktionsbedingte Varianz des Füllgewichts den Wert  $\sigma^2 = \sqrt{10}^2$  besitzt. Im folgenden nehmen wir an, daß das Füllgewicht normalverteilt ist.

- a) Sie bezweifeln diese Aussage und wiegen 10 Packungen nach. Dabei ermitteln Sie ein Durchschnittsgewicht von 485g bei einer Standardabweichung von 5g in dieser Stichprobe.
- (i) Kann mit diesen Ergebnissen die Behauptung des Nudelfabrikanten bezüglich der Varianz bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0.05 widerlegt werden? (Zweiseitiger Test! Genaue Angabe der kritischen Region des Tests nicht vergessen!)
  - (ii) Kann mit diesen Ergebnissen die Behauptung des Nudelfabrikanten bezüglich der Mindestfüllmenge bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0.05 widerlegt werden? (Einseitiger Test!)
- b) Sie steigen nun auf die Marke „Goldgelb“ eines anderen Herstellers um und hoffen, daß dessen Packungen besser gefüllt sind. Bei einer Stichprobe von ebenfalls 10 Packungen ermitteln Sie ein Durchschnittsgewicht von 495g bei einer Standardabweichung von 10g in dieser Stichprobe. Prüfen Sie unter der Annahme, daß die produktionsbedingte Varianz bei beiden Herstellern die gleiche ist, ob sich der Markenwechsel gelohnt hat (Irrtumswahrscheinlichkeit = 0.05).

### Aufgabe 27

Bezüglich der Ladenöffnungszeiten am Donnerstag Abend weisen Befürworter auf den guten Umsatz von im Mittel  $E(X) = 200$  SFR je Kunde hin. Bei einer zufälligen Stichprobe von  $n = 20$  Kunden ergab sich dort ein Stichprobenmittel von  $\bar{x} = 195$  SFR und eine geschätzte Standardabweichung von  $s = 5$  SFR. Die Ausgaben der Kunden werden als normalverteilt angesetzt.

- a) Berechnen Sie anhand dieser Stichprobe ein Konfidenzintervall für den tatsächlichen mittleren Umsatz  $\mu$  zur Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 0.05$ .
- b) Entsprechende Hinweise von Kundenvereinen lassen die Vermutung zu, dass die Einkaufsfreudigkeit zum Abend hin nachlässt. Der Verein startet daher eine neue Erhebung, um statistisch zu beweisen, dass der mittlere Umsatz am Abend niedriger ist als am Nachmittag. Bei jeweils 20 zufällig ausgewählten Nachmittags- und 20 zufällig ausgewählten Abendkunden ergab sich ein Stichprobenmittel  $\bar{x}_A = 195$  SFR am Abend und  $\bar{x}_N = 203$  SFR am Nachmittag. Die zugehörigen Standardabweichungen waren  $s_A = 5$  SFR und  $s_N = 3$  SFR.
- i) Wie lauten Null- und Alternativhypothese?
  - ii) Wie lautet die Teststatistik dieses einseitigen Tests und welche Testentscheidung treffen Sie aufgrund der beiden Stichproben bei  $\alpha = 0.05$ ? Gehen Sie von der Annahme aus, daß die Varianzen  $\sigma_A^2$  und  $\sigma_T^2$  gleich groß sind!

### Aufgabe 28

Eine Maschine füllt Salzstangen in Tüten ab, die laut Aufdruck 250g Füllgewicht versprechen. Wir nehmen im folgenden an, daß das Füllgewicht normalverteilt ist. Bei 16 zufällig aus der Produktion herausgegriffenen Tüten wird ein mittleres Füllgewicht von 240g und eine Stichprobenstreuung (Standardabweichung) von 10g festgestellt.

- a) Berechnen Sie ein Konfidenzintervall für das mittlere Füllgewicht zum Sicherheitsniveau von 95%.
- b) Wenn Ihnen zusätzlich bekannt würde, daß die Stichprobenstreuung gleich der tatsächlichen Streuung ist, wäre dann das unter a) zu berechnende Konfidenzintervall für das mittlere Füllgewicht breiter oder schmaler? Begründen Sie Ihre Antwort ohne Rechnung.
- c) Testen Sie die Hypothese: „Das mittlere Füllgewicht beträgt mindestens 250g“ bei einem Signifikanzniveau von 5%.

### Aufgabe 29

Eine Maschine füllt Gummibärchen in Tüten ab, die laut Aufdruck 250g Füllgewicht versprechen. Wir nehmen im folgenden an, daß das Füllgewicht normalverteilt ist. Bei 16 zufällig aus der Produktion herausgegriffenen Tüten wird ein mittleres Füllgewicht von 245g und eine Stichprobenstreuung (Standardabweichung) von 10g festgestellt.

1. Berechnen Sie ein Konfidenzintervall für das mittlere Füllgewicht zum Sicherheitsniveau von 95%.
2. Wenn Ihnen zusätzlich bekannt würde, daß die Stichprobenstreuung gleich der tatsächlichen Streuung ist, wäre dann das unter a) zu berechnende Konfidenzintervall für das mittlere Füllgewicht breiter oder schmaler? Begründen Sie Ihre Antwort ohne Rechnung.
3. Testen Sie die Hypothese: „Das mittlere Füllgewicht beträgt mindestens 250g“ bei einem Signifikanzniveau von 5%.

### Aufgabe 30

Die Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$  seien jeweils normalverteilt, d. h.  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  und  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ . Gegeben seien zwei Stichproben  $X_1, \dots, X_{n_1}$  bzw.  $Y_1, \dots, Y_{n_2}$ , die unabhängig, identisch verteilt wie  $X$  bzw.  $Y$  sind.

$$\begin{array}{llll} \text{Stichprobe von X:} & n_1 = 10 & \bar{x} = 10 & s_1^2 = 4 \\ \text{Stichprobe von Y:} & n_2 = 12 & \bar{y} = 13 & s_2^2 = 5.2 \end{array}$$

1. Überprüfen Sie zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$ , ob sich die beiden Mittelwerte unterscheiden (Gleichheit der Varianzen vorausgesetzt).
2. Kann tatsächlich von einer Gleichheit der Varianzen ausgegangen werden ( $\alpha = 0.10$ )?

### **Aufgabe 31**

Ein Kaffeegroßhändler behauptet, daß die von ihm abgefüllten 500g-Packungen der Marke 'Schwarz' mindestens 495g enthalten. Wir nehmen im folgenden an, daß das Füllgewicht normalverteilt ist.

- a) Herr Meier bezweifelt diese Aussage und wiegt 10 Packungen nach. Dabei stellt er fest, daß das Durchschnittsgewicht dieser Packungen 480g beträgt bei einer Standardabweichung von 5g in dieser Stichprobe. Kann mit diesem Ergebnis die Aussage des Kaffeegroßhändlers bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0.05 widerlegt werden?
- b) Wie wäre die Entscheidung ausgefallen, wenn bekannt wäre, daß die Packungen mit einer Standardabweichung von 5g abgefüllt werden? Begründen Sie ihre Antwort ohne Rechnung!
- c) Herr Meier steigt nun auf die Sorte 'Braun' des gleichen Händlers um und hofft, daß deren Packungen besser gefüllt sind. Bei einer Stichprobe von ebenfalls 10 Packungen ermittelt er ein Durchschnittsgewicht von 495g bei einer Standardabweichung von 10g in dieser Stichprobe. Prüfen Sie unter der Annahme, daß die Streuung bei beiden Sorten gleich sind, ob sich der Sortenwechsel gelohnt hat (Irrtumswahrscheinlichkeit = 0.05).

## **Zweistichproben Problem**

### **Aufgabe 32**

Ein Fitness-Center hat die Wahl zwischen zwei neuen Trainingsgeräten, A und B, die zur Probe aufgestellt wurden. Obwohl das Gerät A preisgünstiger ist als das Gerät B, kommen der Leiterin Zweifel, ob sie A tatsächlich anschaffen soll. Sie hat den Verdacht, daß Gerät A von den Kunden ergonomisch als nicht so „angenehm“ empfunden wird wie Gerät B. Sie fragt somit 10 Kunden, die A benutzt haben, und 8 Kunden, die B benutzt haben, ob sie das Training mit dem jeweiligen Gerät als ergonomisch angenehm empfunden haben.

Von den Kunden, die A benutzt haben, empfanden 5 Kunden das Training als ergonomisch angenehm und von den Kunden, die B benutzt haben empfanden 6 das Gerät als ergonomisch angenehm. Kann daraus geschlossen werden, daß beide Geräte als gleichangenehm empfunden werden? ( $\alpha = 0.05$ ). Begründen Sie ihre Antwort!

### **Aufgabe 33**

Ein Experte sagt für eine Wahl, an der 4 Parteien teilnehmen, folgende Stimmenanteile voraus:

Partei	Stimmenanteil
A	40%
B	40%
C	15%
D	5%

Sie bezweifeln diese Prognosen und befragen kurz vor der Wahl in einer Stichprobe  $n = 2000$  Wähler, welche Partei sie in der kommenden Wahl wählen werden. Sie erhalten folgendes Ergebnis:

Partei	Stimmen für die jeweilige Partei in der Stichprobe
A	840
B	760
C	270
D	130

Können Sie die Hypothese des Experten aufgrund dieser Ergebnisse bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 0.01$  verwerfen?

### **Aufgabe 34**

Bei einer statistischen Erhebung in der Grenzregion Basel wurde folgendes Einkaufsverhalten festgestellt:

Haupteinkaufsort	Anteil
CH	70%
F	20%
D	10%

Sie bezweifeln diese Aussage und befragen in einer Stichprobe  $n = 3000$  Personen, wo sie hauptsächlich einkaufen. Sie erhalten folgendes Ergebnis:

Haupteinkaufsort	Anzahl der Befragten
CH	2000
F	650
D	350

Können Sie die Hypothese der Erhebung aufgrund dieser Ergebnisse bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 0.01$  verwerfen?

### **Aufgabe 35**

Um die Auswirkung einer neuartigen Lernmethode auf den Klausurerfolg zu testen, werden zwei Stichproben betrachtet, nämlich eine Stichprobe von  $n_1 = 250$  Studenten, die ohne mit der neuen Methode gelernt zu haben in die Klausur gehen, und eine davon unabhängige Stichprobe von  $n_2 = 200$  Studenten, die in die Klausur gehen und die neue Methode zum Lernen angewandt haben. Von den Studenten in der ersten Stichprobe fallen 65 durch, von den Studenten in der zweiten Stichprobe 35. Unterscheiden sich die Durchfallquoten signifikant? ( $\alpha = 0.05$ )

## Multiple Choice

Bitte ankreuzen  
Richtig / Falsch

- | 1. Eine diskrete Zufallsvariable $X$ besitzt folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion: $P\{X = 0\} = 0.25, P\{X = 1\} = 0.5, P\{X = 2\} = 0.25$ . Es gilt für die Varianz von $X$ : $\text{Var}X = 1$ .  | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |  |      |         |       |    |    |      |    |    |  |  |
|--|-----------------------|-----------------------|--|------|---------|-------|----|----|------|----|----|--|--|
| 2. Die Varianz einer auf dem Intervall $[0;2]$ gleichverteilten Zufallsvariablen $X$ ist kleiner als die Varianz einer auf dem Intervall $[0;3]$ gleichverteilten Zufallsvariable $Y$ .  | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |  |      |         |       |    |    |      |    |    |  |  |
| 3. 3 grüne, 5 gelbe und 2 blaue Zettel können auf 2520 unterscheidbare Arten auf 10 nebeneinanderliegende Kästchen verteilt werden.  | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |  |      |         |       |    |    |      |    |    |  |  |
| 4. Die beiden Zufallsvariablen $X$ und $Y$ seien unkorreliert. Dann folgt $E(XY) = E(X)E(Y)$ .   | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |  |      |         |       |    |    |      |    |    |  |  |
| 5. Für die Schätzung des unbekanntem Parameters $\mu$ einer normalverteilten Grundgesamtheit ergibt sich aufgrund der Stichprobenwerte $\bar{x} = 60$ und $s^2 = 49$ mit $n = 16$ das Konfidenzintervall $[56.57;63.43]$ bei einem Konfidenzniveau von 0.95.   | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |  |      |         |       |    |    |      |    |    |  |  |
| 6. Die Hypothese „Zwei Stichproben entstammen derselben Grundgesamtheit“ kann sowohl mit dem Iterationstest als auch mit dem Anpassungstest von Kolmogoroff Smirnow überprüft werden.  | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |  |      |         |       |    |    |      |    |    |  |  |
| 7. Gegeben seien zwei stochastisch unabhängige Ereignisse $A$ und $B$ . Es gilt $P(B) = 0.4$ und $P(A \cap B) = 0.2$ . Dann gilt für $P(A \cup B) = 0.9$ .   | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |  |      |         |       |    |    |      |    |    |  |  |
| 8. Im folgenden Vierfeldermodell   |                       |                       |  |      |         |       |    |    |      |    |    |  |  |
| <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th rowspan="2" style="padding: 5px;">Werbung</th> <th colspan="2" style="padding: 5px;">Umsatz</th> </tr> <tr> <th style="padding: 5px;">hoch</th> <th style="padding: 5px;">niedrig</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="padding: 5px;">wenig</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">40</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">60</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">viel</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">20</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">80</td> </tr> </tbody> </table> | Werbung               | Umsatz                |  | hoch | niedrig | wenig | 40 | 60 | viel | 20 | 80 |  |  |
| Werbung  |                       | Umsatz                |  |      |         |       |    |    |      |    |    |  |  |
|  | hoch                  | niedrig               |  |      |         |       |    |    |      |    |    |  |  |
| wenig  | 40                    | 60                    |  |      |         |       |    |    |      |    |    |  |  |
| viel   | 20                    | 80                    |  |      |         |       |    |    |      |    |    |  |  |
| besteht ein positiver Zusammenhang zwischen Werbung und Umsatz (Werbung wirkt umsatzsteigernd).  | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |  |      |         |       |    |    |      |    |    |  |  |
| 9. Die hypergeometrische Verteilung entspricht dem Urnenmodell ohne Zurücklegen und die Binomialverteilung dem Urnenmodell mit Zurücklegen.  | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |  |      |         |       |    |    |      |    |    |  |  |
| 10. Will man nachweisen, daß eine Zufallsgröße normalverteilt ist, so verwendet man den Kolmogorov-Smirnow-Anpassungstest.   | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |  |      |         |       |    |    |      |    |    |  |  |
| 11. Es gilt stets $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ .   | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |  |      |         |       |    |    |      |    |    |  |  |
| 12. Sind $X$ und $Y$ zwei unabhängige Zufallsvariablen mit $\text{Var}(X) = 2$ und $\text{Var}(Y) = 1$ , dann gilt: $\text{Var}(7X - 3Y) = 11$ .   | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |  |      |         |       |    |    |      |    |    |  |  |
| 13. Eine diskrete Zufallsvariable $X$ besitzt folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion: $P(X = 0) = 0.6, P(X = 1) = 0.2, P(X = 2) = 0.2$ . Es gilt: $E(X^2) = 1$ .   | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |  |      |         |       |    |    |      |    |    |  |  |
| 14. Für die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung verwendet man die Faustregel $np(1 - p) \leq 9$ .  | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |  |      |         |       |    |    |      |    |    |  |  |

Bitte ankreuzen  
Richtig / Falsch

1.  $\bar{X}$  ist ein erwartungstreuer Schätzer für den Parameter  $\mu$  einer  $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsgröße  $X$ .
2. Hat  $X$  die Varianz  $\frac{1}{2}$ , dann hat  $\frac{1}{2}X$  die Varianz  $\frac{1}{8}$ .
3. Die Funktion  $f(x) = x, x \in [0, 1]$ , ist eine Dichte.
4. Der McNemar-Test setzt zwei unabhängigen Stichproben voraus.
5. Wirft man einen Würfel zweimal hintereinander, so ist die Wahrscheinlichkeit für jedes Elementarereignis  $1/36$ .
6. Sind zwei beliebige Zufallsvariablen unkorreliert, so sind sie auch unabhängig.
7. Das Stichprobenmittel ist ein ML-Schätzer für den Erwartungswert einer Verteilung.
8.  $X$  sei eine beliebig verteilte Zufallsgröße mit der Streuung  $\sigma$ . Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Realisation im  $2\sigma$ -Bereich liegt, beträgt mindestens 0.75.
9. Beträgt die Teuerungsrate in einem Jahr 12%, so beträgt die mittlere monatliche Teuerungsrate in diesem Jahr genau 1%.
10. Ist  $R^2 = 1$ , so liegt eine perfekte Anpassung an das lineare Modell vor.
11. Die  $\chi^2$ -Statistik ist vom Maßstab abhängig.
12. Sind zwei beliebige Zufallsvariablen unkorreliert, so sind sie auch unabhängig.
13.  $X$  sei eine beliebig verteilte Zufallsgröße mit der Streuung  $\sigma$ . Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Realisation im  $2\sigma$ -Bereich liegt, beträgt mindestens 0.75.
14. Sind  $X$  und  $Y$  unabhängige und normalverteilte Merkmale mit gleicher Varianz und  $(X_1, \dots, X_{n_1})$  und  $(Y_1, \dots, Y_{n_2})$  zwei unabhängige Stichproben dieser Merkmale, dann gilt:  $S_X^2/S_Y^2$  ist  $F$ -verteilt.
15. Aufgrund des nachfolgenden SPSS-Listing für den 2-Stichproben K-S-Test wird die Hypothese der Gleichheit der Verteilungen nicht abgelehnt.

- - - - Kolmogorov - Smirnov 2-Sample Test

XY  
by GRUPPE

```
Cases
  15  GRUPPE = 1.00  X
  12  GRUPPE = 2.00  Y
  --
  27  Total
```

Most extreme differences				
Absolute	Positive	Negative	K-S Z	2-Tailed P
.31667	.31667	-.15000	.8176	.5157

Bitte ankreuzen  
Richtig / Falsch

1. Ein  $t$ -Test lehnt  $H_0 : \mu = 4$  nicht ab. Damit ist  $H_0 : \mu = 4$  statistisch signifikant.
2. Die Ableitung einer Maximum-Likelihood-Schätzung eines Parameters setzt die Kenntnis der Verteilung der Zufallsgröße  $X$  voraus.
3. Das 0.975-Quantil der  $N(0, 1)$ -Verteilung beträgt 1.64
4. Sei  $X_i \sim N(3, 2^2), i = 1, \dots, 9$ . Dann gilt:  $\bar{X} \sim N(3, \frac{2^2}{9})$ .
5. Sei  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  und ein Konfidenzintervall für  $\mu$  aus einer Stichprobe vom Umfang  $n$  berechnet. Die Breite des Intervalls wächst mit dem Stichprobenumfang.
6.  $X$  sei eine beliebig verteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$ . Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Realisation im Bereich  $\mu \pm 3\sigma$  liegt, beträgt mindestens  $\frac{8}{9}$ .
7. Die Summe zweier unabhängiger, poissonverteilter Zufallsvariablen ist wieder poissonverteilt.
8. Sei  $X$   $N(0, 1)$ -verteilt. Dann gilt:  $P(X^2 \leq 1.17^2) = 0.242$ .
9. Die Varianz eines Merkmals mit lauter gleichen Merkmalsausprägungen ist gleich Null.
10. Sind zwei normalverteilte Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$  unkorreliert, so sind sie auch unabhängig.
11. Da im nachfolgenden Listing die Gleichheit der Varianzen abgelehnt wird, ist als  $t$ -Wert -7.24 zu wählen

t-tests for Independent Samples of TYP

Variable	Number of Cases	Mean	SD	SE of Mean
BRENND Brenndauer				
X	25	5996.4863	65.304	13.061
Y	22	6125.5776	56.961	12.144

Mean Difference = -129.0914

Levene's Test for Equality of Variances: F= .157 P= .694

t-test for Equality of Means					95%
Variances	t-value	df	2-Tail Sig	SE of Diff	CI for Diff
Equal	-7.17	45	.000	17.993	(-165.331, -92.851)
Unequal	-7.24	45.00	.000	17.834	(-165.012, -93.171)

Bitte ankreuzen  
Richtig / Falsch

1. Sind zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  stochastisch unabhängig, dann gilt:  $A \cap B = \emptyset$ .
2. Der exakte Test von Fischer auf Gleichheit zweier Binomialwahrscheinlichkeiten darf nur angewendet werden, wenn  $np(1-p) > 9$ .
3. Zur Anwendung der Tschebyscheffschen Ungleichung für die Zufallsvariable  $X$  mit  $E(X) = \mu$  und  $\text{Var}(X) = \sigma^2$  muß  $X$  normalverteilt sein.
4. Sind  $Z_1, \dots, Z_n$  unabhängig und identisch  $N(0, 1)$ -verteilt, dann gilt:  $\sum_{i=1}^n Z_i^2$  ist  $\chi^2$ -verteilt mit  $n$  Freiheitsgraden.
5.  $X$  sei  $N(0, 1)$ -verteilt. Dann gilt:  $P(X^2 \leq 1.96^2) = 0.95$ .
6. Sind  $X \sim B(n_1, p_1)$ ,  $Y \sim B(n_2, p_2)$ , und sind  $X$  und  $Y$  unabhängig, dann gilt:  $X + Y \sim B(n_1 + n_2, p_1 + p_2)$ .
7. Das Modell  $y = a + b \cos(3x)$  ist ein lineares Regressionsmodell.
8. Der  $F$ -Test ist ein Zweistichprobentest und setzt Normalverteilung und Gleichheit der Varianzen voraus.
9. Die Varianz eines Merkmals mit lauter gleichen Merkmalsausprägungen ist gleich Eins.
10. Zur Anwendung der Tschebyscheffschen Ungleichung für die Zufallsvariable  $X$  mit  $E(X) = \mu$  und  $\text{Var}(X) = \sigma^2$  muß  $X$  normalverteilt sein.
11. Hat  $X$  die Varianz  $\frac{1}{2}$ , dann hat  $\frac{1}{2}X$  die Varianz  $\frac{1}{4}$ .
12. Sind  $X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ ,  $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ , und sind  $X$  und  $Y$  unabhängig, dann gilt:  $X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$ .
13. Das Modell  $y = a + bx^2$  ist ein lineares Regressionsmodell.
14. Für die  $N(2; 2^2)$  verteilte Zufallsgröße  $Y$  gilt:  $P\{Y \leq 3\} = 0.598706$ .
15. Aufgrund des nachfolgenden SPSS-Listing für den 2-Stichproben K-S-Test wird die Hypothese der Gleichheit der Verteilungen abgelehnt.

```

- - - - Kolmogorov - Smirnov 2-Sample Test
      XY
      by GRUPPE

```

```

Cases
  15  GRUPPE = 1.00  X
  12  GRUPPE = 2.00  Y
  --
  27  Total

```

```

Most extreme differences
Absolute    Positive    Negative    K-S Z    2-Tailed P
.31667      .31667      -.15000    .8176    .5157

```