

Aufgabe 1

Lösung:

- a) Beim Ziehen der Flaschen kann davon ausgegangen werden, dass 'mit Zurücklegen' (also mit Wdh.) gezogen wird, da sich der Kunde an jeder Stelle des Kastens zwischen *allen* sechs Bieren entscheiden kann. Die Reihenfolge der Flaschen spielt keine Rolle. Damit berechnen sich die Kombinationsmöglichkeiten als

$$\binom{n+m-1}{m} = \binom{6+20-1}{20} = \binom{25}{20} = 53130.$$

- b) Möchte der Kunde mindestens eine Flasche pro Brauerei in seiner Auswahl haben, so sind sechs der insgesamt 20 Plätze des Kastens bereits belegt. Für die übrigen 14 Plätze stellen wir die gleichen Überlegungen wie in Aufgabenteil a) an und erhalten damit für die Anzahl der Kombinationen:

$$\binom{n+m-1}{m} = \binom{6+14-1}{14} = \binom{19}{14} = 11628$$

Aufgabe 2

Lösung:

a) Es muß gelten:

$$(i) \int_0^2 f(x)dx = 1$$

$$(ii) f(x) \geq 0$$

Zu (i):

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)dx &= \int_0^2 c \cdot x(2-x)dx = c \int_0^2 x(2-x)dx \\ &= c \int_0^2 (2x - x^2)dx = c \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 \\ &= c \left[4 - \frac{8}{3} - 0 \right] = c \cdot \frac{4}{3} = 1 \\ \implies c &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Zu (ii):

$$f(x) = \frac{3}{4}x(2-x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 2]$$

b) Wir erhalten für die Verteilungsfunktion:

$$\begin{aligned} F(x) = P(X \leq x) &= \int_0^x f(t)dt = \\ &= \int_0^x \frac{3}{4}t(2-t)dt \\ &= \frac{3}{4} \int_0^x (2t - t^2)dt = \frac{3}{4} \left[t^2 - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^x \\ &= \frac{3}{4} \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 0 \right] \\ &= \frac{3}{4}x^2 \left(1 - \frac{1}{3}x \right) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{3}{4}x^2(1 - \frac{1}{3}x) & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{für } 2 < x \end{cases}$$

c)

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^2 x f(x) dx \\ &= \frac{3}{4} \int_0^2 (2x^2 - x^3) dx \\ &= \frac{3}{4} \left[\frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^2 = \frac{3}{4} \left[\frac{2}{3} \cdot 8 - \frac{1}{4} \cdot 16 - 0 \right] \\ &= \frac{3}{4} \left[\frac{16}{3} - \frac{12}{3} \right] = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1 \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^2 x^2 f(x) dx \\ &= \frac{3}{4} \int_0^2 (2x^3 - x^4) dx \\ &= \frac{3}{4} \left[\frac{2}{4} x^4 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^2 = \frac{3}{4} \left[\frac{2}{4} \cdot 16 - \frac{1}{5} \cdot 32 - 0 \right] \\ &= 6 - \frac{3 \cdot 32}{4 \cdot 5} = 6 - \frac{3 \cdot 8}{5} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Damit ist

$$\text{Var}(X) = \frac{6}{5} - 1^2 = \frac{1}{5}$$

d) Ungleichung von Tschebyschev

$$P(|X - \mu| \leq 0.5) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{c^2} = 1 - \frac{(\frac{1}{5})}{(0.5)^2} = 1 - 0.8 = 0.20$$

Aufgabe 3

Lösung:

- a) • Wir betrachten zuerst die Spieler des 'GHP Bamberg'. Mit $t_{15;0.975} = 2.1314$ und $\alpha = 0.05$ berechnen wir die Grenzen des Konfidenzintervalls:

$$\begin{aligned}I_u(Ba) &= \bar{x} - t_{n-1;1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 199.06 - t_{15;0.975} \cdot \frac{7.047}{\sqrt{16}} = 195.305, \\I_o(Ba) &= \bar{x} + t_{n-1;1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 199.06 + t_{15;0.975} \cdot \frac{7.047}{\sqrt{16}} = 202.815.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir ein Konfidenzintervall von $[195.305; 202.815]$.

- Für Leverkusen erhalten wir mit $t_{13;0.975} = 2.1604$ und $\alpha = 0.05$:

$$\begin{aligned}I_u(L) &= \bar{x} - t_{n-1;1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 196 - t_{13;0.975} \cdot \frac{9.782}{\sqrt{14}} = 190.352, \\I_o(L) &= \bar{x} + t_{n-1;1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 196 + t_{13;0.975} \cdot \frac{9.782}{\sqrt{14}} = 201.648.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir ein Konfidenzintervall von $[190.352; 201.648]$.

- Für die Fußballmannschaft des SV Werder Bremen berechnen wir die Grenzen wie folgt ($t_{22;0.975} = 2.0739$):

$$\begin{aligned}I_u(Br) &= \bar{x} - t_{n-1;1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 187.52 - t_{22;0.975} \cdot \frac{5.239}{\sqrt{23}} = 185.255, \\I_o(Br) &= \bar{x} + t_{n-1;1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 187.25 + t_{22;0.975} \cdot \frac{5.239}{\sqrt{23}} = 189.786.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir ein Konfidenzintervall von $[185.255; 189.786]$.

- Die Werte der Konfidenzintervalle sind bei den beiden Basketballteams erwartungsgemäß höher. Bei beiden Teams ist der untere Wert des Konfidenzintervalls höher als der oberste Wert des Konfidenzintervalls für Bremen. Die Intervalle überdecken sich also nicht.
- b) • $H_0 : \mu_{Bamberg} = \mu_{Leverkusen}$:
Da die Konfidenzintervalle der beiden Basketballteams sich überdecken, kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden. Ein signifikanter Unterschied kann also nicht festgestellt werden.
- $H_0 : \mu_{Bamberg} \leq \mu_{Bremen}$:
Die Obergrenze des Intervalls für Bremen ist wesentlich kleiner als die Untergrenze des Bamberger Intervalls. Somit liegen die Körpergrößen der Fussballspieler systematisch unterhalb der Größen der Basketballspieler. Die Nullhypothese wird also verworfen.

Aufgabe 4

Lösung:

- a) Die Varianz ist unbekannt, deshalb verwenden wir die t-Verteilung, $t_{11,0.975} = 2.201$. Die Grenzen des Konfidenzintervalls berechnen wir wie gehabt:

$$\begin{aligned} [I_u, I_o] &= \left[22.45 - 2.201 \cdot \sqrt{\frac{27.31}{12}}, 22.45 + 2.201 \cdot \sqrt{\frac{27.31}{12}} \right] \\ &= [22.45 - 3.32, 22.45 + 3.32] = [19.22, 25.77] \end{aligned}$$

Somit liegt der wahre Parameter μ der Grundgesamtheit mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% zwischen 19.22 und 25.77.

- b) Die zu testenden Hypothesen lauten:

$$H_0 : \mu = 23 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu \neq 23$$

Da die Varianz unbekannt ist und wir von einer normalverteilten Grundgesamtheit ausgehen, führen wir den t-Test durch. Die Testgröße ist

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \cdot \sqrt{n} = \frac{22.45 - 23}{5.23} \cdot \sqrt{12} = \frac{-0.55}{5.23} \cdot 3.464 = -0.364.$$

Das kritische Quantil der t-Verteilung ist $t_{11,0.975} = 2.201$.

Wir lehnen H_0 ab, falls gilt $|t| > t_{11,0.975}$. Somit kann H_0 nicht abgelehnt werden, $0.364 < 2.201$. Wir können nicht ausschließen, dass der Erwartungswert der Grundgesamtheit 23 ist.

- c) Anmerkung: Die Lösung kann mit den Zahlen aus a) und b) gemacht werden und muss nicht allgemein hergeleitet werden. Hier wird aber der allgemeine Fall betrachtet.

Betrachten wir die Grenzen eines Konfidenzintervalls für μ , wenn die Varianz unbekannt ist. Sie bedeuten, dass der unbekannte Parameter μ mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ in den Grenzen des Intervalls liegt:

$$P\left(\bar{x} - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Bei einem zweiseitigen Hypothesentest fragen wir, ob der Parameter μ der Grundgesamtheit einen bestimmten Wert μ_0 hat. Über das Signifikanzniveau α wird festgelegt, ab welcher Wahrscheinlichkeit wir H_0 für so unwahrscheinlich halten, dass wir sie verwerfen würden.

Wir bleiben bei H_0 , wenn für die realisierte Prüfgröße

$$P\left(\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n}\right| \leq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

gilt. Wenn wir den Betrag auflösen, erhalten wir

$$P\left(-t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} \leq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha.$$

Durch Umstellen ergibt sich dann das Intervall

$$P\left(\bar{x} - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu_0 \leq \bar{x} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Der Annahmehereich des zweiseitigen Test entspricht also den Grenzen des Konfidenzintervalls. Damit können wir unsere Testentscheidung auch mit Hilfe eines Konfidenzintervalls fällen.

H_0 wird abgelehnt, wenn der hypothetische Wert μ_0 außerhalb der Grenzen eines $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervalls liegt.