

Kurzlösungen Übungsaufgaben Statistik II

Übung 12: Schätzen und Testen im einfachen Regressionsmodell

25.05.2010

Schätzen und Testen im einfachen Regressionsmodell

Aufgabe 1

a) Wir definieren im Folgenden a als die Konstante des Modells und b als den Koeffizienten der Variable Rechnungsbetrag. Die Berechnung ergibt $\hat{a} = 0.96$ und $\hat{b} = 0.10$.

- $\hat{a} = 0.96$ ist nicht sinnvoll interpretierbar (Trinkgeld beim Rechnungsbetrag von 0).
- $\hat{b} = 0.10$ bedeutet, dass wenn der Betrag um 1 CHF steigt, so steigt das Trinkgeld um 0.10 CHF.

b) Für unser Modell können wir die Formel $Var(b) = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}$ verwenden (Skript S. 65f.). Zunächst benötigen wir eine Schätzung für σ^2 :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Dazu die Residuen der geschätzten Gerade $\hat{\epsilon}_i = y_i - (0.96 + 0.1x_i)$:
 0.04 -0.96 -1.46 0.79 0.79 0.54 -0.96 2.54 -1.21 0.04

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{10} \hat{\epsilon}_i^2 = \frac{13.43}{8} = 1.68$$

Die Quadratsumme S_{xx} ist

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 2428.125.$$

Damit bekommen wir die Varianz von \hat{b} :

$$Var(\hat{b}) = \frac{1.68}{2428.125} = 0.00069$$

c) $H_0 : b = 0$ (Der Rechnungsbetrag hat keinen Einfluss)
 $H_1 : b \neq 0$

Teststatistik:

$$T = \frac{\hat{b} - b_{H_0}}{\sqrt{Var(\hat{b})}} = \frac{0.10 - 0}{\sqrt{0.00069}} = 3.81$$

H_0 ablehnen, falls $|T| > t_{n-2,0.975} = 2.3 \rightarrow H_0$ ablehnen (Achtung: Die t-Verteilung hat hier $n - 2$ Freiheitsgrade! In der PC-Veranstaltung wurden irrtümlicherweise $n - 1$ angegeben! Allgemein: Testet man mit dem t-Test Mittelwerte, so hat man $n - 1$ Freiheitsgrade. Testet man mit dem t-Test Koeffizienten, so hat man $n - 2$ Freiheitsgrade.). Der Rechnungsbetrag hat einen signifikanten Einfluss auf die Trinkgeldhöhe.

- d) • $H_0 : b \geq 0.15$
 $H_1 : b < 0.15$

Teststatistik:

$$T = \frac{0.1-0.15}{0.0263} = -1.9$$

H_0 ablehnen falls $T < -t_{n-2,0.95} = -1.86$, H_0 wird abgelehnt, b ist kleiner als 0.15.

- $H_0 : b \leq 0.1$
 $H_1 : b > 0.1$

Teststatistik:

$$T = \frac{0.1-0.1}{0.0263} = 0$$

H_0 ablehnen, falls $T > t_{n-2,0.95} = 1.86$, H_0 wird nicht abgelehnt, es kann weiter davon ausgegangen werden, dass b höchstens 0.1 ist.