Kurzlösungen
Übungsaufgaben Statistik II

Übung 4: Zufallsvariablen

30.03.2010

Zufallsvariablen

Aufgabe 1 *(Induktive Statistik, Aufgabe 3.16)*

a) $X \in \{-6, 0, 4, 6\} \rightarrow$ diskret

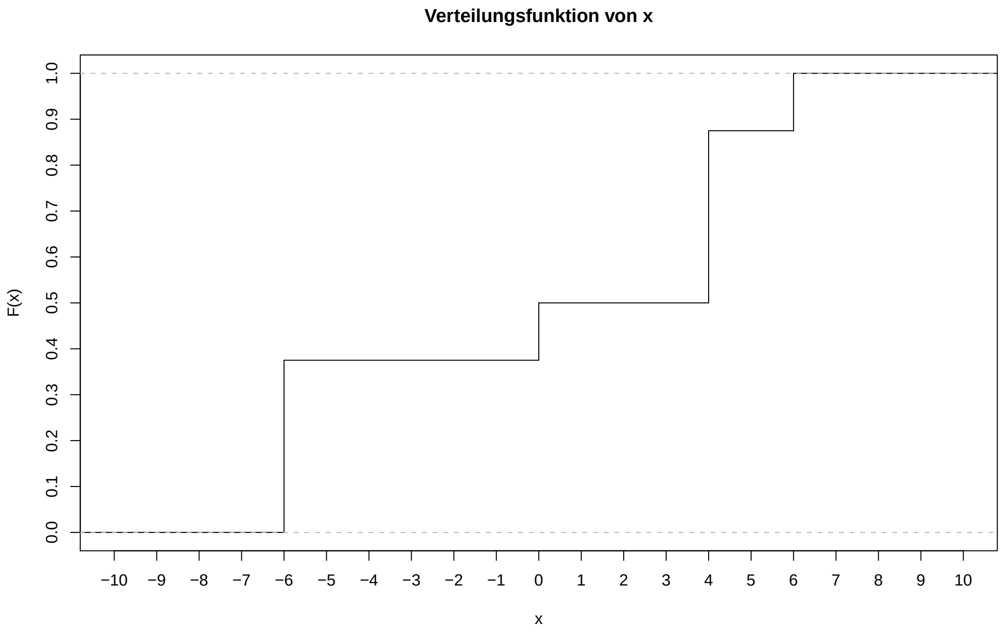
b) Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(X = x_i)$:

i	x_i	Ereignisse	$P(X = x_i)$
1	-6	{1xK, 2xZ}	$3 \cdot \frac{1}{2}^3 = \frac{3}{8}$
2	0	{Z, Z, Z}	$\frac{1}{2}^3 = \frac{1}{8}$
3	4	{2xK, 1xZ}	$3 \cdot \frac{1}{2}^3 = \frac{3}{8}$
4	6	{K, K, K}	$\frac{1}{2}^3 = \frac{1}{8}$

c) Verteilungsfunktion F(x): (Die Lösung im Buch ist nicht korrekt.)

x	$F(x)$
$x < -6$	0
$-6 \leq x < 0$	$\frac{3}{8}$
$0 \leq x < 4$	$\frac{1}{2}$
$4 \leq x < 6$	$\frac{7}{8}$
$6 \leq x$	1

Die Verteilungsfunktion grafisch dargestellt:



Aufgabe 2

a) $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$, somit

$$f(x) = \begin{cases} x(10-12x) & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

b) Überprüfen wir die Bedingungen an eine Dichte

- $f(x) \geq 0$
- $\int\limits_0^1 f(x)dx = 1.$

Für die erste Bedingung erhalten wir $x(10-12x) \geq 0$. Solange $x \geq 0$ ist, ist diese Gleichung erfüllt wenn $10 - 12x \geq 0$ ist, also

$$10 - 12x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \tfrac{5}{6}.$$

Einen weiteren Fall müssen wir nicht betrachten, da negative Werte für x in (1) ausgeschlossen wurden.
Also ist $f(x) \geq 0$, wenn $0 \leq x \leq \frac{5}{6}$, sprich im Intervall $\frac{5}{6} \leq x \leq 1$ ist die erste Bedingung nicht erfüllt.
Wie bekommen wir also **eine Obergrenze** (< 1 bzw. $\leq \frac{5}{6}$) für die $f(x)$ tatsächlich eine Dichte ist?
Dazu betrachten wir die 2. Bedingung wobei wir die Obergrenze offen halten,

$$\int\limits_0^a x(10-12x)dx = [5x^2 - 4x^3]_0^a = 5a^2 - 4a^3 = 1.$$

Nun muss man ein **Polynom 3. Grades** lösen

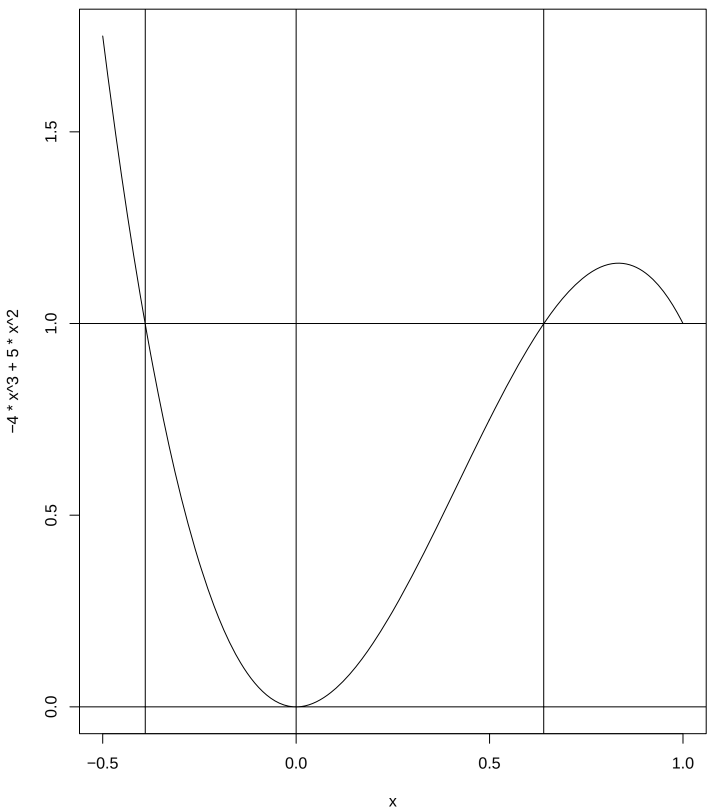
$$-4a^3 + 5a^2 - 1 = 0.$$

Dies geschieht mit Hilfe einer Polynomdivision. Dazu 'rät' man eine Nullstelle $a_1 = 1$. Anschliessend wird das Polynom durch den zu a_1 gehörenden Linearfaktor $(a-1)$ dividiert. Man erhält dann als Restpolynom,

$$-4a^2 + a + 1 = 0,$$

eine **quadratische Gleichung**. Die beiden Nullstellen auf 3 Stellen gerundet sind $a_2 = 0.640$ und $a_3 = -0.390$. Diese können durch Einsetzen überprüft werden. Die Lösung a_3 fällt weg, wegen $x \geq 0$, die Lösung $a_1 = 1$ fällt raus wegen $x \leq \frac{5}{6}$. Also ist a_2 die einzige mögliche Obergrenze, die die erste Bedingung und die zweite Bedingung an eine Dichtefunktion erfüllt. Für $0 \leq x \leq 0.640$ ist f(x) somit eine Dichtefunktion.

Zusatz: Der Graph der Verteilungsfunktion $F(x)$ hat folgende Gestalt (wobei uns nur der Bereich zwischen 0 und 1 interessiert):



Im Bereich zwischen 0.64 und 1 sind die Werte von F(x) grösser als 1, das darf für Wahrscheinlichkeiten nicht gelten.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass X zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{3}{5}$ liegt, ist

$$\begin{aligned}
P(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{3}{5}) &= \int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{3}{5}} f(x)dx \\
&= F(\frac{3}{5}) - F(\frac{1}{3}) \\
&= 5(\frac{3}{5})^2 - 4(\frac{3}{5})^3 - 5(\frac{1}{3})^2 - 4(\frac{1}{3})^3 \\
&= \frac{5*9}{25} - \frac{4*27}{125} - \frac{5*1}{9} + \frac{4*1}{27} \\
&= \frac{117}{125} - \frac{11}{27} \\
&= 0.5286
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 *(Induktive Statistik, Aufgabe 3.3)*

a) Die Bedingungen an eine Dichte sind

- $f(x) \geq 0$
- $\int\limits_0^1 f(x)dx = 1.$

Somit folgt aus

- $f(x) \geq 0$: $cx \geq 0 \Rightarrow c \geq 0$ und aus
- $\int\limits_1^3 f(x)dx = 1$:

$$\int\limits_1^3 f(x)dx = \int\limits_1^3 cxdx = [\frac{1}{2}cx^2]_1^3 = 4c.$$

Aus $4c = 1$ folgt somit $c = \frac{1}{4}$.

Damit beide Bedingungen erfüllt sind, muss somit $c = \frac{1}{4}$ gelten.

b) Für $P(X > 2)$ gilt

$$P(X > 2) = \int\limits_2^3 f(x)dx = \int\limits_2^3 \frac{1}{4}xdx = [\frac{1}{8}x^2]_2^3 = \frac{5}{8}.$$

Aufgabe 4 *(Induktive Statistik, Aufgabe 3.6)*

a) Erwartungswert der diskreten Variable X:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot p_i = 1 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.4 + 5 \cdot 0.2 + 7 \cdot 0.3 = 4.4.$$

b) Varianz der diskreten Variable X gesucht. Verschiebungssatz:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Der Erwartungswert von X^2 ist

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \cdot p_i = 1^2 \cdot 0.1 + 3^2 \cdot 0.4 + 5^2 \cdot 0.2 + 7^2 \cdot 0.3 = 23.4.$$

Die Varianz ist somit

$$Var(X) = 23.4 - 4.4^2 = 4.04.$$

c) Der Erwartungswert von $\frac{1}{x^2}$ ist

$$E(\frac{1}{X^2}) = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x^2} \cdot p_i = \frac{1}{1^2} \cdot 0.1 + \frac{1}{3^2} \cdot 0.4 + \frac{1}{5^2} \cdot 0.2 + \frac{1}{7^2} \cdot 0.3 = 0.159.$$