

Kurzlösungen Übungsaufgaben Statistik II

Übung 6: Standardverteilungen II

Erweiterte Fassung

13.04.2010

Standardverteilungen II

Aufgabe 1 (*Induktive Statistik, Aufgabe 4.6*)

$X \sim \text{Bin}(10, 0.25)$. Der Erwartungswert ist $E(X) = np = 10 \cdot 0.25 = 2.5$.

$$\begin{aligned} P(0.5 \leq X \leq 4.5) &= P(1 \leq X \leq 4) \\ &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= 0.1877 + 0.2816 + 0.2503 + 0.1460 \\ &= 0.8656 \end{aligned}$$

mit z.B.

$$P(X = 1) = \binom{10}{1} \cdot 0.25^1 \cdot 0.75^9 = 0.1877.$$

Aufgabe 2

a) Es soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass der Mann die Tür mit einer geraden Anzahl an Versuchen öffnet.

Die geometrische Verteilung ist in dem Beispiel durch

$$P(X = k) = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$$

gegeben. Für eine gerade Anzahl Versuche sind vorher eine ungerade Anzahl an Misserfolgen geschehen, sprich es sind $2i - 1$ Misserfolge erzielt worden. Also ist

$$P(\text{"gerade Anzahl Versuche"}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{2i-1}$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Sie wird durch eine **unendliche Reihe** bestimmt. Es bleibt die Frage, ob diese Reihe **konvergiert** und was der **Grenzwert** ist.

Der Ausdruck

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{2i-1}$$

kann nach den Potenzregeln zu

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{2i} \left(\frac{4}{5}\right)^{-1}$$

umgeformt werden. Durch weiteres Auflösen erhalten wir

$$\left(\frac{16}{25}\right)^i \left(\frac{5}{4}\right).$$

Damit und mit dem Vorziehen der nicht von i abhängigen Faktoren erhalten wir

$$P(\text{"gerade Anzahl Versuche"}) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{16}{25}\right)^i. \quad (1)$$

Dies ist eine **unendliche geometrische Reihe**.

Lösung 1: Der Grenzwert ist (da der erste Wert für $k = 0$ fiktiv $a = \left(\frac{16}{25}\right)^0 = 1$ wäre):

$$s = \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q} \quad (2)$$

falls $|q| < 1$. Diese Bedingung ist für $q = 16/25$ offensichtlich erfüllt. Wir benötigen nun für die Bestimmung von (1) aber folgende Summe (beachte: neue Definition der Summe für unsere Zwecke, deshalb s_{2a} (nach der Aufgabe 2a) betitelt):

$$s_{2a} = \sum_{i=1}^{\infty} q^i.$$

Da $q^0 = 1$ ist gilt

$$s_{2a} = \sum_{i=1}^{\infty} q^i = \sum_{i=0}^{\infty} q^i - 1 = \frac{1}{1-q} - 1$$

was sich zu

$$\sum_{i=1}^{\infty} q^i = \frac{q}{1-q} \quad (3)$$

vereinfachen lässt. Wird (3) auf (1) angewendet erhalten wir die Lösung für unser Problem,

$$P(\text{"gerade Anzahl Versuche"}) = \frac{1}{4} \left(\frac{16/25}{1-16/25} \right) = \frac{1}{4} \frac{16}{25} \frac{25}{9} = \frac{4}{9} = 0.444\bar{4}.$$

Zusatz und Lösung 2: Wer Mühe hat mit Folgen und Reihen kann ein Blick ins Buch 'Mathematik für Ökonomen' von Margrit Gauglhofer

werfen. Das Thema wird in Band 1 auf den Seiten 1-11 behandelt (14. Auflage). Eine andere Herangehensweise ist, wenn man $\frac{1}{4}$ nicht vor die Summe zieht. Die Definition des Grenzwerts einer unendlichen geometrischen Reihe mit $|q| < 1$ ist (Gaughhofer, S.10):

$$s = a + aq + aq^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a \cdot q^k = \frac{a}{1-q}$$

Unser a wäre $\frac{1}{4}$ und unser q wäre $\frac{16}{25}$. Unser k heisst i :

$$s = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{16}{25}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{16}{25}\right)^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{16}{25}\right)^i = \frac{1/4}{1-16/25}$$

Wir berechneten nun den Grenzwert für die Summe ab $i = 0$, wir benötigen jedoch den Grenzwert ab $i = 1$. Deshalb ziehen wir den ersten Wert, den wir a_0 nennen, ab:

$$\begin{aligned} P(\text{"gerade Anzahl Versuche"}) &= s - a_0 \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{16}{25}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{16}{25}\right)^2 \right) - \frac{1}{4} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{16}{25}\right)^i - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1/4}{1-16/25} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-16/25} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{16/25}{1-16/25} \right) \end{aligned}$$

b) $P(\text{"gerade Anzahl Versuche"}) = \frac{2}{5}$

Berechnung über einen Wahrscheinlichkeitsbaum.

Aufgabe 3 (Induktive Statistik, Aufgabe 4.3)

a) X : Länge der Bandnudeln in mm; $X \sim N(50, 4)$.

$$P(X < 47) = \Phi\left(\frac{47-50}{2}\right) = \Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 0.0668.$$

- b) $P(X \leq 60) = \Phi\left(\frac{60-\mu}{2}\right) \stackrel{!}{=} 0.99$. In der Tabelle der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $N(0, 1)$ sehen wir, dass $\Phi(2.33) = 0.990097$ am nächsten an den 0.99 liegt. Somit kann

$$\frac{60 - \mu}{2} = 2.33.$$

nach μ aufgelöst werden und wir erhalten $\mu = 55.34$. Die Maschine muss auf $\mu = 55.34$ eingestellt werden damit die produzierten Nudeln mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.99 eine Länge von höchstens 60mm aufweisen.

Aufgabe 4 (Induktive Statistik, Aufgabe 4.13)

$$\begin{aligned} P(c \leq Z \leq c) &= \Phi(c) - \Phi(-c) \\ &= \Phi(c) - [1 - \Phi(c)] \\ &= 2\Phi(c) - 1 \end{aligned}$$

Es soll gelten $2\Phi(c) - 1 \stackrel{!}{=} 0.97$. Durch Umformung erhält man, dass $\Phi(c) = 0.985$ gelten muss. Mit Hilfe der Tabelle der Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ der Standardnormalverteilung $N(0,1)$ erhält man $c = 2.17$ (das 0.985-Quantil der $N(0,1)$ -Verteilung).

Aufgabe 5 (Induktive Statistik, Aufgabe 4.12)

- $P(A \cap B)$ erhalten wir mit

$$P(A \cap B) = P(-0.9 \leq X \leq 3) = P(X \leq 3) - P(X \leq -0.9).$$

Wir berechnen einzeln

$$P(X \leq 3) = \Phi\left(\frac{3-2}{\sqrt{4}}\right) = 0.6915$$

und

$$P(X \leq -0.9) = \Phi\left(\frac{-0.9-2}{\sqrt{4}}\right) = 0.0735.$$

$P(A \cap B)$ ist somit 0.6180.

- $P(A \cup B)$ erhalten wir mit

$$P(A \cup B) = P(X \leq 3 \cup X \geq -0.9) = P(-\infty \leq X \leq \infty) = 1.$$