Kurzlösungen
Übungsaufgaben Statistik II

Übung 7: Stichprobenfunktionen

20.04.2010

Stichprobenfunktionen

Aufgabe 1

a) $120'000$

b) 80%

c) Gesetz der grossen Zahl. $\bar{X}$ konvergiert stochastisch nach μ.

Aufgabe 2

a) Diese wichtigen Eigenschaften des Mittelwertes werden in der Schätztheorie und beim Testen immer wieder relevant sein.

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

Konstanten können vor den Erwartungswert gezogen werden und der Erwartungswert einer Summe ist die Summe der Erwartungswerte.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \mu$$

Der Mittelwert einer solchen i.i.d Stichprobe hat also den gleichen Erwartungswert wie die einzelnen Realisationen der Stichprobe.

b)

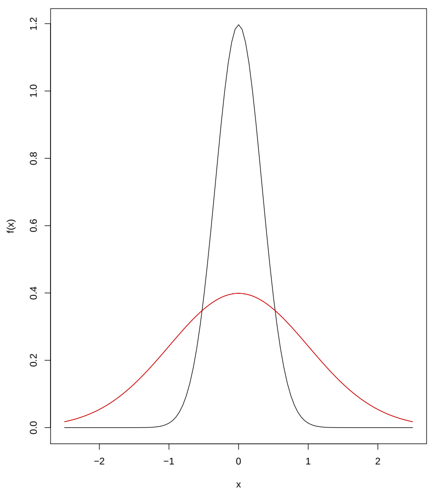
$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

Konstanten werden quadriert aus der Varianz ausgeklammert. Da die einzelnen X_i unabhängig sind (so dass die Kovarianz zwischen X_i und X_j $(i \neq j)$ gleich Null ist) kann die Varianz einer Summe als Summe der Varianzen bestimmt werden.

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Die Varianz des Mittelwerts ist kleiner als die Varianz der Stichprobe, für alle Stichprobenumfänge $n > 1$.

Zusatz: Wir nehmen nun an, X_i sei normalverteilt (das ist nicht Teil der Aufgabe und in der Aufgabe nicht angenommen!). Betrachten wir dies grafisch mit der Normalverteilung, X_1, X_2, X_3 i.i.d $N(0,1)$ (rot) $\Rightarrow$ $\bar{X} \sim N(0, \frac{1}{3})$ (schwarz).



c) Der Erwartungswert der standardisierten Zufallsvariablen Z_i sollte Null sein.

$$\begin{aligned} E(Z_i) &= E\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma}E(X_i) - \frac{\mu}{\sigma} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Verwendete Rechenregel: $E(a + bX) = a + bE(X)$.

d) Die Varianz einer standardisierten Zufallsvariable ist 1.

$$\begin{aligned} Var(Z_i) &= Var\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2}Var(X_i) = 1 \end{aligned}$$

Verwendete Rechenregel: $Var(a + bX) = b^2 Var(X)$.

Aufgabe 3

X: Weg zur Arbeit, $\mu = 31.5$ und $\sigma = 4$

a) Abschätzung von Wahrscheinlichkeiten mit der **Ungleichung von Tschebyschev**.

$$\begin{aligned} P(\mid X-\mu \mid < c) &\geq 1-\frac{\sigma^2}{c^2} \\ P(\mid X-31.5 \mid < 10) &\geq 1-\frac{16}{100}=\frac{21}{25} \end{aligned}$$

b) Mögliche Lösung mit $c = 12$ in $P(\mid X-\mu \mid \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$. Oder mit $k\sigma$-Bereich:

$$\begin{aligned} P(\mid X-\mu \mid \geq k\sigma) &\leq \frac{1}{k^2} \\ P(\mid X-31.5 \mid \geq 3\cdot 4) &\leq \frac{1}{9} \end{aligned}$$

c) Der zentrale Grenzwertsatz besagt, dass die Summe von unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen für grosse Stichproben normal verteilt ist. Damit ist die Zufallsvariable Mittelwert einer solchen Stichprobe als Funktion der Summe normal verteilt.
Also X_i i.i.d. $F(31.5, 4^2)$, $n = 50$ (gross genug?) $\Rightarrow \bar{X} \sim N(31.5, \frac{4^2}{50})$.
Damit bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit über die Normalverteilung. Abweichungen sind immer positiv, deshalb die Betragsstriche.

$$P(\mid \bar{X}-\mu \mid \leq 1)$$

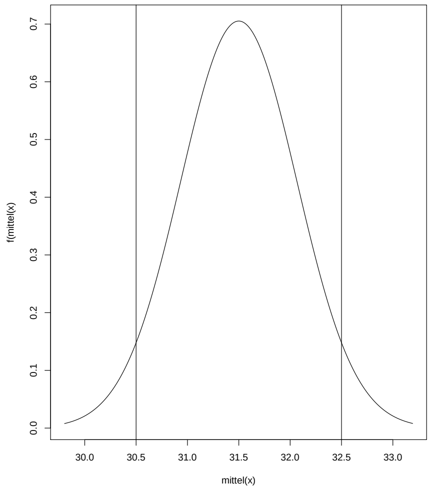
Nun lösen wir den Betrag auf. Ist $\bar{X}-\mu \leq 0$ so ist der Betrag davon $-(\bar{X}-\mu)$, also können wir $-(\bar{X}-\mu) \leq 1$ zu $\bar{X} \geq \mu - 1$ umformen.
Der andere Fall für die Betragsfunktion, $\bar{X}-\mu \geq 0$, ergibt analog $\bar{X} \leq \mu + 1$. Damit erhalten wir

$$P(\mid \bar{X}-\mu \mid \leq 1) = P(\mu - 1 \leq \bar{X} \leq \mu + 1).$$

Also müssen wir folgende Aufgabe lösen

$$P(30.5 \leq \bar{X} \leq 32.5) = F(32.5) - F(30.5).$$

Dazu die Grafik:



Die Standardabweichung von $\bar{X}$ ist $4/\sqrt{50}$, also:

$$\begin{aligned} P(30.5 \le \bar{X} \le 32.5) &= F(32.5) - F(30.5) \\ &= \Phi\left(\frac{32.5 - 31.5}{4/\sqrt{50}}\right) - \Phi\left(\frac{30.5 - 31.5}{4/\sqrt{50}}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{1}{4} \cdot \sqrt{50}\right) - 1 \\ &= 2\Phi(1.77) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.96 - 1 \\ &= 0.92. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) $\mu = 4$, $\sigma = \sqrt{2}$.

b) $\binom{5}{3} = 10$ mögliche Stichproben (SP):

i	SP_i	$\bar{x}_i$	s_i^2	s_i
1	$\{2,3,4\}$	3	1	1
2	$\{2,3,5\}$	3 1/3	2 1/3	$\sqrt{2\ 1/3}$
3	$\{2,3,6\}$	3 2/3	4 1/3	$\sqrt{4\ 1/3}$
4	$\{2,4,5\}$	3 2/3	2 1/3	$\sqrt{2\ 1/3}$
5	$\{2,4,6\}$	4	4	2
6	$\{2,5,6\}$	4 1/3	4 1/3	$\sqrt{4\ 1/3}$
7	$\{3,4,5\}$	4	1	1
8	$\{3,4,6\}$	4 1/3	2 1/3	$\sqrt{2\ 1/3}$
9	$\{3,5,6\}$	4 2/3	2 1/3	$\sqrt{2\ 1/3}$
10	$\{4,5,6\}$	5	1	1

wobei s_i^2 als Stichprobenvarianz bestimmt wird (in der Aufgabenstellung sollte korrekterweise $s_1 = 1$ stehen).