

# Statistik 2

## Übungsaufgaben

Dr. Thomas Zehrt  
Linda Walter

Universität Basel  
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum  
Abteilung Quantitative Methoden  
Frühjahrssemester 2010

Hinweis: Optimalerweise sollten Sie die Übungsaufgaben vor der entsprechenden Übungsstunde bearbeiten und (teilweise) lösen.

Literatur:

- **Primär:** H. Toutenburg, M. Schomaker, M. Wißmann, Arbeitsbuch zur deskriptiven und induktiven Statistik, Springer.  
Elektronische Version dieses Buches unter:  
<http://www.springerlink.com/content/978-3-540-89035-5>
- **Sekundär:** H. Toutenburg, Induktive Statistik, 3. Auflage, Springer.

# Semesterplanung

Datum	Statistik II (6 KP)	Statistik II (2 KP)
02.03.10	Übung 1, 14-16, Org. Chemie	-----
05.03.10	<b>Vorlesung, 12-15, HS 102</b>	
09.03.10	-----	-----
12.03.10	<b>Vorlesung, 12-15, HS 102</b>	
16.03.10	Übung 2, 14-16, Org. Chemie	-----
19.03.10	<b>Vorlesung, 12-15, HS 102</b>	
23.03.10	Übung 3, 14-16, Org. Chemie	-----
26.03.10	<b>Vorlesung, 12-15, HS 102</b>	
30.03.10	Übung 4, 14-16, Org. Chemie	-----
02.04.10	<i>vorlesungsfrei (Ostern)</i>	
06.04.10	Übung 5, 14-16, Org. Chemie	-----
09.04.10	Computervorlesung, S18 WWZ Gr. 1: 12-13, Gr. 2: 13-14, Gr. 3: 14-15	Übung, Raum Mango URZ
13.04.10	Übung 6, 14-16, Org. Chemie	-----
16.04.10	Vorlesung, 12-15, HS 102	Übung, Raum Mango URZ
20.04.10	Übung 7, 14-16, Org. Chemie	-----
23.04.10	Computervorlesung, S18 WWZ Gr. 4: 12-13, Gr. 5: 13-14, Gr. 6: 14-15	Übung, Raum Mango URZ
27.04.10	Übung 8, 14-16, Org. Chemie	-----
30.04.10	Computervorlesung, S18 WWZ Gr. 1: 12-13, Gr. 2: 13-14, Gr. 3: 14-15	Übung, Raum Mango URZ
04.05.10	Übung 9, 14-16, Org. Chemie	-----
07.05.10	Computervorlesung, S18 WWZ Gr. 4: 12-13, Gr. 5: 13-14, Gr. 6: 14-15	-----
11.05.10	Übung 10, 14-16, Org. Chemie	-----
14.05.10	<i>vorlesungsfrei (Himmelfahrt)</i>	
18.05.10	Übung 11, 14-16, Org. Chemie	-----
21.05.10	Vorlesung, 12-15, HS 102	Übung, Raum Mango URZ
25.05.10	Übung 12, 14-16, Org. Chemie	-----
28.05.10	Vorlesung, 12-15, HS 102	-----
01.06.10	-----	-----
04.06.10	Prüfungsvorbereitung, 12-15, HS 102	-----

---

## Übung 1: Kombinatorik

1. Wieviele verschiedene Motorradkennzeichen der Art 'RA – 153' lassen sich aus 26 Buchstaben und neun Ziffern herstellen?
2. Eine Hockeybundesliga besteht aus zwölf Mannschaften. In einer Saison spielt jede Mannschaft gegen jede andere ein Hin- und Rückspiel. Wieviele Spiele finden insgesamt während einer Saison statt?
3. Bei einer Party mit zehn Gästen küsst zur Begrüssung jeder jeden. Wieviele Küsse gibt es dann?
4. Bei der Leichtathletik WM sind 22 Athleten mit den Startnummern 1 bis 22 für den 100-Meter-Lauf der Männer gemeldet. Wieviele Möglichkeiten gibt es für die Besetzung des Siegerpodests, wenn die Plätze 1, 2 und 3 nicht unterschieden werden?
5. In einem Tischtennisverein mit zwölf Aktiven wird eine Rangliste für die erste Mannschaft (Plätze 1 bis 6) festgelegt. Wieviele Möglichkeiten gibt es?
6. Ein Lateinlehrer sorgt sich um die Vokabelkenntnisse seiner Schüler. Um das Vokabel lernen zu forcieren, droht er seiner Klasse (25 Schüler) damit, regelmäig zu Beginn der Unterrichtsstunde 5 Schüler abzufragen. Wie viele Anordnungsmöglichkeiten von abzufragenden Schülern gibt es, wenn
  - (a) kein Schüler mehrmals pro Stunde abgefragt werden kann?
  - (b) ein Schüler auch mehrmals pro Stunde abgefragt werden kann?
7. Bei der Fuball WM 2006 nehmen insgesamt 32 Mannschaften teil. Wieviele Möglichkeiten für die Belegung des Siegerpodestes (Plätze 1-3) gibt es, wenn
  - (a) die Reihenfolge der Plätze eine Rolle spielt?
  - (b) die Reihenfolge der Plätze keine Rolle spielt?

## Übung 2: Stochastik

1. Bei einer Prüfung sind 25 Prozent der Prüflinge in Mathematik, 15 Prozent in Chemie und 10 Prozent in Chemie und Mathematik durchgefallen. Einer der Prüflinge wird zufällig ausgewählt. Zeichnen Sie zu den jeweiligen Aufgaben die Venndiagramme. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er
  - (a) in mindestens einem der beiden Fächer durchgefallen ist?
  - (b) nur in Mathematik durchgefallen ist?
  - (c) in keinem Fach durchgefallen ist?
  - (d) in genau einem Fach durchgefallen ist?
2. Eine faire Münze wird 3 mal hintereinander geworfen.
  - (a) Stellen Sie dieses Experiment in einem Baumdiagramm dar.
  - (b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für jeden Ausgang des Experimentes.
3. Zwei faire Würfel (1 roter und 1 schwarzer) werden gleichzeitig geworfen. Wir interessieren uns für die Summe der beiden. Augenzahlen.
  - (a) Wie viele Elementarereignisse gibt es für den Würfelwurf mit zwei Würfeln?
  - (b) Welche Werte nimmt die Summe von zwei Würfeln an?
  - (c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für jeden Ausgang des Experimentes und stellen Sie sie grafisch dar.
  - (d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eine sieben zu würfeln?
  - (e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens eine sechs und höchstens eine acht zu würfeln?
  - (f) Jemand behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit eine gerade Summe zu würfeln größer ist als eine Ungerade, weil es sechs gerade Summen gibt aber nur fünf ungerade. Nehmen Sie dazu Stellung.
4. In einer gynäkologischen Abteilung eines Krankenhauses wurden in einem Monat zwölf Kinder geboren. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei Kinder am gleichen Tag geboren wurden?

Annahme: Die Geburtshäufigkeit ist über den Monat gleichmässig verteilt und der Monat hat 31 Tage.

---

## Übung 3: Bedingte Wahrscheinlichkeit

1. Gegeben seien zwei disjunkte Ereignisse,  $A$  und  $B$ , mit  $P(A) = 0.3$  und  $P(B) = 0.4$ .
  - (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Vereinigungsmenge von  $A$  und  $B$ .
  - (b) Bestimmen Sie  $P(A | B)$ .
  - (c) Was muss gelten, damit zwei beliebige disjunkte Ereignisse unabhängig sind?
2. Eine lokale Bank will aufgrund von hohen Ausfallrisiken ihre Kreditkartenpolitik verändern. Erfahrungsgemäss fallen 5 % der Kreditkarteninhaber komplett aus. Weiter bezahlen Karteninhaber die nicht ausfallen mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % ihre monatliche Rechnung nicht.
  - (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger Karteninhaber seine monatliche Rechnung nicht bezahlt?
  - (b) Ein Karteninhaber bezahlt seine monatliche Rechnung nicht. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er ausfällt?
  - (c) Soll die Bank ihre Karte zurückfordern, wenn ein Konsument eine monatliche Rechnung nicht bezahlt?
3. Aus drei Urnen  $U_1$ ,  $U_2$  und  $U_3$  wird zufällig eine Urne ausgewählt, wobei jede Urne dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzt, in die Auswahl zu gelangen. Die drei Urnen enthalten weisse und schwarze Kugeln, wobei sich in Urne
  - $U_1$  : zwei weisse und fünf schwarze
  - $U_2$  : vier weisse und vier schwarze
  - $U_3$  : sieben weisse und vier schwarzeKugeln befinden. Aus der zufällig gewählten Urne wird nun eine Kugel gezogen.
  - (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Kugel weiss ist?
  - (b) Die gezogene Kugel ist schwarz. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie aus Urne  $U_2$  stammt?
4. Ein Würfel wird zweimal geworfen. Wir definieren die folgenden Ereignisse:
  - $A$ : „Die Augenzahl im ersten Wurf ist gerade.“
  - $B$ : „Die Summe der Augenzahlen beider Würfe ist ungerade.“Sind die Ereignisse  $A$  und  $B$  (stochastisch) unabhängig?

## Übung 4: Zufallsvariablen

1. Eine faire Münze wird dreimal hintereinander geworfen. Fällt dreimal KOPF, so erhält Spieler A vom Spieler B 6 Franken. Fällt zweimal KOPF, so erhält Spieler A vom Spieler B 4 Franken. Der Spieler A zahlt an den Spieler B 6 Franken, wenn einmal KOPF fällt. Erscheint dreimal ZAHL, so braucht keiner der Spieler zu zahlen. Sei  $X$  der Gewinn bzw. Verlust des Spielers A.

- Welche Werte kann  $X$  annehmen?
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $X$ .
- Berechnen und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion von  $X$ .

2. Ein Tankstellenbesitzer beobachtet die Füllmenge eines Benzintankes. Sei  $X$  der Anteil der Tankfüllung, der bis Ende des Monats verkauft sein wird.  $X$  hat folgende Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 5x^2 - 4x^3 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

- Bestimmen Sie die Dichtefunktion  $f(x)$ .
  - Ist  $f(x)$  eine Dichtefunktion?
  - Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden zwischen  $\frac{1}{3}$  und  $\frac{3}{5}$  der Tankfüllung verkauft?
3.  $X$  sei eine stetige Zufallsvariable mit folgender Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} cx & \text{für } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

- Für welchen Wert der Konstanten  $c$  ist die oben genannte Funktion tatsächlich eine korrekte Dichtefunktion?
  - Setzen Sie den entsprechenden Wert für  $c$  ein und bestimmen Sie  $P(X > 2)$ .
4. Eine diskrete Zufallsvariable  $X$  kann nur die Werte 1, 3, 5 und 7 annehmen. Über  $X$  seien folgende Angaben bekannt:

$k$	$P(X \leq k)$
1	0.1
3	0.5
5	0.7
7	1

Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von  $X$  sowie den Erwartungswert der Zufallsvariablen  $1/X^2$ .

---

## Übung 5: Standardverteilungen I

1. Ein unverfälschter Würfel wird fünfmal geworfen.  $X$  sei die Anzahl der Würfe, bei denen eine Sechs erscheint.
  - (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens zwei Sechsen zu werfen?
  - (b) Wie gross ist der Erwartungswert von  $X$ ?
2. Fluggäste kommen zufällig und unabhängig voneinander an dem Sicherheitscheck eines Flughafens. Im Mittel kommen 10 Passagiere pro Minute an.
  - (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine Passagiere in einer Minute ankommen?
  - (b) Wie gross ist die Varianz und die Standardabweichung?
  - (c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 Passagiere in einer Minute ankommen?
3. Eine Reifenfirma untersucht die Lebensdauer eines neu entwickelten Reifens (alle Angaben sind in tsd. Km). Dabei zeigt sich, dass die ermittelte Lebensdauer der Reifen gut durch eine Normalverteilung mit den Parametern  $\mu = 36$  und  $\sigma = 4$  (die Angaben sind in tsd. Km) angenähert werden kann.
  - (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Reifen höchstens 48000 km hält?
  - (b) Welche Lebensdauer wird von 95 Prozent der Reifen nicht überschritten?
  - (c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Reifen mehr als 28000 km hält?
  - (d) Welche Lebensdauer wird von 90 Prozent der Reifen überschritten?
  - (e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Reifen länger als 28000 km und weniger als 48000 km hält?
4. Ein Angler fängt an einem kleinen Fischteich im Durchschnitt pro Stunde sechs Fische.  $Y$  bezeichne die Zahl der Fische, die in irgendeiner Stunde gefangen werden.
  - (a) Welche Verteilung kann man  $Y$  zuordnen?
  - (b) Bestimmen Sie  $E(Y)$ ,  $P(Y = 2)$  und  $P(Y > 2)$ .

## Übung 6: Standardverteilungen II

- $X$  sei eine binomialverteilte Zufallsgrösse mit  $n = 10$  und  $p = 0.25$ . Bestimmen Sie die exakte Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  um höchstens 2 vom Erwartungswert abweicht.
- Ein Mann kommt betrunken nach Hause. An seinem Schlüsselbund befinden sich 5 Schlüssel, von denen einer der Hausschlüssel ist. Da er nicht mehr weiß, welcher der richtige ist, wählt er einen zufällig aus und versucht mit diesem die Tür zu öffnen. Ist der Schlüssel falsch, so versucht er es noch einmal. Sei  $X$  die Anzahl der Versuche, die er benötigt, bis es ihm gelingt die Tür zu öffnen.
  - Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $X$  unter der Annahme, dass ihm vor jedem Versuch der Schlüsselbund zu Boden fällt, und er mit der Suche wieder von vorne beginnt. Wie groß ist in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit, dass es ihm bei einer geraden Anzahl von Versuchen gelingt, die Tür zu öffnen?
  - Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $X$  unter der Annahme, dass ihm vor jedem Versuch die Schlüssel bekannt sind, mit denen er schon vergeblich versucht hat, die Tür zu öffnen. Wie groß ist in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit, dass es ihm bei einer geraden Anzahl von Versuchen gelingt, die Tür zu öffnen?
- Eine Maschine produziert Bandnudeln, deren Längen normalverteilt sind. Die durchschnittliche Nudellänge kann eingestellt werden, jedoch beträgt die Varianz immer 4.
  - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der eingestellte Wert  $\mu = 50$  mm um mehr als 3 mm unterschritten wird?
  - Auf welchen Wert muss die durchschnittliche Nudellänge eingestellt werden, damit die produzierten Nudeln mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.99 eine Länge von höchstens 60 mm haben?
- $Z$  sei ein  $N(0; 1)$ -verteilte Zufallsgrösse. Wie groß muss eine positive Zahl  $c$  gewählt werden, damit gilt:  $P(-c \leq Z \leq +c) = 0.97$ ?
- $X$  sei ein  $N(2; 4)$ -verteilte Zufallsgrösse. Folgende Ereignisse seien definiert:  $A = \{X \leq 3\}$  und  $B = \{X \geq -0.9\}$ . Bestimmen Sie  $P(A \cap B)$  und  $P(A \cup B)$ .

## Übung 7: Stichprobenfunktionen

1. Ein Verlag führt eine Leseranalyse unter den  $N = 40'000$  Beziehern seiner Zeitschrift „Spannende Statistik“ durch. Eine einfache Zufallsstichprobe vom Umfang  $n = 400$  ergab unter anderem
  - (a) ein Durchschnittseinkommen von 120'000.- jährlich mit einer Standardabweichung von 34'000.- und
  - (b) einen Anteil der Leser, die mit der Zeitschrift zufrieden sind, von 80%.

Schätzen Sie

- (a) das Durchschnittseinkommen aller  $N = 40'000$  Bezieher,
- (b) den Anteil der zufriedenen Leser unter allen Beziehern.

Welches Prinzip haben Sie angewendet? Was besagt dieses Prinzip allgemein?

2.  $X_1, \dots, X_n$  seien unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$ . Weiter werden die Zufallsvariablen  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  und  $Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$  betrachtet.

- (a) Bestimmen Sie den Erwartungswert von  $\bar{X}$ .
- (b) Bestimmen Sie die Varianz von  $\bar{X}$ .
- (c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von  $Z_i$ .
- (d) Bestimmen Sie die Varianz von  $Z_i$ .

3. Angenommen die erwartete Zeit, die Arbeitnehmer eines kleinen Landes zur Arbeit benötigen sei 31.5 Minuten und die Standardabweichung der Population sei 4 Minuten.
  - (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zeit um weniger als 10 Minuten vom Erwartungswert abweicht mindestens?
  - (b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zeit um mindestens 12 Minuten vom Erwartungswert abweicht höchstens?
  - (c) Angenommen wir erheben eine Stichprobe vom Umfang 50 und bestimmen den Mittelwert. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der beobachtete Mittelwert höchstens 1 Minute vom Erwartungswert abweicht. Nutzen Sie den zentralen Grenzwertsatz!

4. Eine endliche Grundgesamtheit bestehe aus fünf Elementen, nämlich 2, 3, 4, 5, 6.

- (a) Berechnen Sie Mittelwert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$  dieser Grundgesamtheit.

Aus dieser Grundgesamtheit werde eine zufällige Stichprobe ohne Zurücklegen vom Umfang  $n = 3$  Elemente gezogen. Die Stichprobe könnte zufällig  $SP_1 = \{2, 3, 4\}$  sein; sie hätte dann den Stichprobenmittelwert  $\mu_1 = 3$  und die Standardabweichung  $\sigma_1 = \sqrt{2/3}$ .

- (b) Geben Sie alle möglichen Stichproben zu drei Elementen an, die man aus dieser Grundgesamtheit ziehen kann und berechnen Sie jeweils die zugehörigen Stichprobenmittelwerte sowie Standardabweichungen

Die Stichprobenmittelwerte liegen alle zwischen den Werten 3 und 5.

## Übung 8: Punktschätzung

- Zwei Statistiker entwickeln unabhängig voneinander jeweils eine Schätzfunktion für den unbekanntem Parameter  $\theta$ . Für die Schätzfunktion  $T_1$  des ersten Statistikers gilt  $E(T_1) = 3\theta$  und  $Var(T_1) = 1$  und für die Schätzfunktion  $T_2$  des zweiten Statistikers gilt  $E(T_2) = 2\theta$  und  $Var(T_2) = 9$ . Die beiden Statistiker beschließen, eine Linearkombination  $T = a \cdot T_1 + b \cdot T_2$  ihrer Schätzfunktionen zu bilden.
  - Welche Bedingungen müssen  $a$  und  $b$  erfüllen, damit  $T$  erwartungstreu für  $\theta$  ist?
  - Bestimmen Sie  $a$  und  $b$  so, dass  $T$  erwartungstreu und varianzminimal für  $\theta$  ist.
- $X_1, \dots, X_n$  seien unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$ . Der Parameter  $\mu$  soll geschätzt werden. Hierzu stehen folgende Schätzfunktionen zur Verfügung:
  - $T_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$
  - $T_2 = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{2}X_n$
  - $T_3 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n X_i$
  - $T_4 = \bar{X}$
  - Bestimmen Sie die Erwartungswerte der vier Schätzfunktionen und gegebenenfalls den Bias.
  - Bestimmen Sie die Varianzen der vier Schätzfunktionen.
  - Untersuchen Sie die Schätzfunktionen auf Konsistenz.
  - Welche Schätzfunktion ist effizient?
- Es gelte  $X \sim B(n; p)$  mit bekanntem Parameter  $n$ . Bestimmen Sie einen allgemeinen ML-Schätzer für  $p$  bezüglich einer konkreten Stichprobe  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .
- Es gelte  $X \sim Po(\lambda)$ . Bestimmen Sie einen allgemeinen ML-Schätzer für  $\lambda$  bezüglich der konkreten Stichprobe  $(3, 5, 2)$ .

---

## Übung 9: Intervallschätzung

1. Aus einer normalverteilten Grundgesamtheit mit der bekannten Varianz  $\sigma^2 = 9$  wurde eine Stichprobe gezogen. Das Stichprobenmittel ergab sich zu  $\bar{x} = 5$ .
  - (a) Ermitteln Sie die Grenzen des 95%-Konfidenzintervalls für  $\mu$ , wenn der Stichprobenumfang
    - i.  $n = 10$
    - ii.  $n = 100$betragen hat.
  - (b) Wie gross muss der Stichprobenumfang mindestens gewählt werden, damit das Konfidenzintervall für  $\mu$  die Länge 0,4 hat (Daten wie oben)?
  - (c) Was ändert sich für das Konfidenzintervall, wenn die Varianz unbekannt ist (Begründung, nicht rechnen)?
2. Ein Statistiker sieht sich in der Zeit vom 2.2.2001 bis zum 19.2.2001 alle Folgen der Show WER WIRD MILLIONÄR an und notiert sich am Ende der Sendung den realisierten Gesamtgewinn des Tages. Es ergaben sich folgende Werte (in Tausend DM):  
73 34 17 96 33 189 282 33 66 64
  - (a) Erstellen Sie den Boxplot der Daten.
  - (b) Wir gehen davon aus, dass die Gesamtgewinne normalverteilt sind. Bestimmen Sie für den unbekannt Parameter  $\mu$  ein Konfidenzintervall, das  $\mu$  mit der Wahrscheinlichkeit 0.95 überdeckt.
3. Eine zufällige Befragung vom 380 Individuen zur Werbewirksamkeit von einem Slogan in einem TV-Spot, ergab dass sich 123 Individuen den Slogan nicht gemerkt hatten oder gar nicht kannten. Die restlichen konnten ihn korrekt wiedergeben.
  - (a) Berechnen Sie die Punktschätzung für den Anteil der Leute, die sich den Slogan nicht merken konnten.
  - (b) Bestimmen Sie ein 90 % und ein 95 % Konfidenzintervall für den Anteil.
  - (c) Was passiert mit der Intervalllänge (Fehlerbreite) wenn das Konfidenzniveau zunimmt?
  - (d) Wie viele Individuen müssen mindestens befragt werden, damit die Schätzung eine Genauigkeit von  $\pm 0.005$  aufweist? Konfidenzniveau sei 95 %.

## Übung 10: Ein- und Zweistichprobenprobleme

1. In einem verregneten Land beträgt die Regenwahrscheinlichkeit in den Herbstmonaten 50%. Jeden Morgen im Herbst fragt sich Susi, ob sie einen Regenschirm mitnehmen soll oder nicht. Um zu einer Entscheidung zu kommen, wirft sie eine faire Münze. Wirft sie Kopf, nimmt sie einen Regenschirm mit, ansonsten lässt sie den Schirm zu Hause.
  - (a) Betrachten Sie die Situation wie einen statistischen Test. Wie müssen die Hypothesen gewählt werden, damit der Fehler 1. Art die schlimmere Auswirkung darstellt?
  - (b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art.
2. Wir kommen noch einmal auf Aufgabe 2 aus den Übungen 8 zurück. Der Statistiker will überprüfen, ob der erwartete Gewinn eines Tages mehr als 100000 DM beträgt.
  - (a) Führen Sie einen T-Test zum Niveau  $\alpha = 0.05$  durch.
  - (b) Führen Sie einen Vorzeichentest durch und bestimmen Sie die exakte Überschreitungswahrscheinlichkeit.
  - (c) Welcher Test ist aufgrund der Datenlage vorzuziehen?

3. Jupp beschließt das neue Album von Robbie Williams im Internet zu erwerben. Da er davon gehört hat, dass es in einem bekannten Internetauktionshaus immer gute Angebote gibt, möchte er sich dort die CD ersteigern.

Als er die Webseite betrachtet, fällt ihm auf, dass man nicht nur bei Auktionen mitbieten, sondern auch Artikel sofort erwerben kann. Desweiteren rät ihm ein Kollege ebenfalls bei einem großen Internetbuchhändler nachzuschauen, da es dort auch günstig CDs zu erwerben gibt.

Um bei dieser Angebotsvielfalt den Überblick zu bewahren beschließt Jupp vorerst die Angebote zu vergleichen. Dazu betrachtet er am 11.01.2006 das Angebot des Internetbuchhandels, 14 Sofortkaufangebote und 14 Auktionen, die an diesem Tag auslaufen. Er notiert sich jeweils den Verkaufspreis inklusive der Versandkosten in Euro.

**Internetbuchhändler:** 16.95

**Sofortkaufpreise:** 18.19, 16.98, 19.97, 16.98, 18.19, 15.99, 13.79, 15.90, 15.90, 15.90, 15.90, 15.90, 19.97, 17.72

**Auktionspreise:** 10.50, 12.00, 9.54, 10.55, 11.99, 9.30, 10.59, 10.50, 10.01, 11.89, 11.03, 9.52, 15.49, 11.02

Für die jeweiligen Verkaufspreise darf im Folgenden die Normalverteilung unterstellt werden. Das Signifikanzniveau sei auf fünf Prozent festgelegt.

- (a) Berechnen Sie den mittleren Verkaufspreis, die Varianz, die Standardabweichung und den Variationskoeffizienten der Sofortkäufe sowie auch der Auktionen.
- (b) Betrachten Sie den Boxplot der Sofortkäufe und der Auktionen.
- (c) Interpretieren Sie die deskriptiven Ergebnisse.  
Welche Hypothesen bezüglich der Lage der Preise lassen sich ableiten?
- (d) Testen Sie nun die erste Arbeitshypothese (mittlerer Sofortkaufpreis  $\neq$  16.95 Euro).
- (e) Testen Sie die zweite Arbeitshypothese (mittlerer Auktionspreis  $<$  16.95 Euro).
- (f) Betrachten Sie die dritte Hypothese (mittlerer Sofortkaufpreis  $>$  mittlerer Auktionspreis).  
Führen Sie unter der Annahme, dass beide Varianzen gleich sind, den geeigneten Test durch.
- (g) Was raten Sie Jupp?

## Übung 11: Zweistichprobenprobleme

1. Im Rahmen der PISA-Studie wurden die Leistungen in den Bereichen Lesekompetenz und Mathematische Grundbildung bestimmt. Die folgende Tabelle zeigt die Punkte von 10 Ländern.

### Punkte in den Bereichen Lesekompetenz und Mathematische Grundbildung

Land	Lesekompetenz	Mathematische Grundbildung
BR	396	334
D	484	490
F	505	517
I	487	457
FL	483	514
L	441	446
A	507	515
PL	479	470
P	470	454
E	493	476

Quelle: Deutsches PISA-Konsortium: PISA 2000

Wir wollen testen, ob die erwartete Punktezahl in beiden Bereichen sich signifikant unterscheiden. Die Differenzen aus den Punkten im Bereich Mathematische Grundbildung und den Punkten im Bereich Lesekompetenz betragen:

BR	D	F	I	FL	L	A	PL	P	E
-62	6	12	-30	31	5	8	-9	-16	-17

- Formulieren Sie die Hypothesen und bestimmen Sie den Wert der Teststatistik des t-Tests.
- Spricht der Wert der Teststatistik des t-Tests für oder gegen  $H_0(\alpha = 0.05)$ ?
- Zeichnen Sie nun einen Boxplot der Differenzen und interpretieren Sie diesen.
- Ein Student schlägt den Vorzeichentest für dieses Problem vor. Mit Hilfe von SPSS erhält er folgendes Testergebniss.

Nichtparametrische Tests									
Deskriptive Statistiken									
	N	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum	25.	50. (Median)	75.	
V1	10	474.5000	33.28747	396.00	507.00	462.7500	483.5000	496.0000	
V2	10	467.3000	53.77949	334.00	517.00	452.0000	473.0000	514.2500	

  

Vorzeichentest		
Häufigkeiten		
V2 - V1		N
V2 - V1	Negative Differenzen(a)	5
	Positive Differenzen(b)	5
	Bindungen(c)	0
	Gesamt	10

a. V2 < V1  
b. V2 > V1  
c. V2 = V1

  

Statistik für Test(b)	
	V2 - V1
Exakte Signifikanz (2-seitig)	1.000(a)

a. Verwendete Binomialverteilung.  
b. Vorzeichentest

Kommt der Vorzeichentest zu einem anderen Ergebnis (Begründung)?

(e) Begründen Sie welcher Test besser für die Datensituation geeignet ist.

2. Vor einem wichtigen Referendum soll die Stimmung in den Kantonen Basel Stadt ( $X$ ) und Basel Land ( $Y$ ) miteinander verglichen werden. Dazu wurden  $n_x = 120$  und  $n_y = 98$  Personen aus den jeweiligen Kantonen befragt. In Basel Stadt stimmten 75 Personen dem Referendum zu. In Basel Land waren es 74.

Zeigen Sie anhand der Stichprobe, dass in Basel Land signifikant mehr Personen dem Referendum zustimmen werden.

---

## Übung 12: Schätzen und Testen im einfachen Regressionsmodell

---

1. In einem Restaurant wurden  $n = 10$  Rechnungsbeträge ( $x$ ) und die dazugehörigen Trinkgelder ( $y$ ) in SFr erhoben.

i	$x_i$	$y_i$
1	10	2
2	30	3
3	25	2
4	7.5	2.5
5	42.5	6
6	35	5
7	40	4
8	25	6
9	12.5	1
10	60	7

- (a) Schätzen und interpretieren Sie die Parameter des linearen Regressionsmodells.
- (b) Bestimmen Sie die Varianz der Schätzung  $\hat{b}$ .
- (c) Hat der Rechnungsbetrag einen signifikanten Einfluss auf die Trinkgeldhöhe? Führen Sie den Test zum Niveau  $\alpha = 0.05$  durch .
- (d) Testen Sie die Hypothesen,  $b \geq 0.15$  und  $b \leq 0.1$ .