# Statistik 2
# Zusammenfassung

**Dr. Thomas Zehrt**
**Linda Walter**

**Universität Basel**
**Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum**
**Abteilung Quantitative Methoden**

# Relevanter Prüfungsstoff

Folgende Kapitel des Buches "Induktive Statistik" von H. Toutenbourg (3. Auflage) (**sowie die zugehörigen Übungsaufgaben und die Computerübungsaufgaben**) sind für die Prüfung relevant.

## Kapitel 1. Kombinatorik

ganzes Kapitel

## Kapitel 2. Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung

ganzes Kapitel

## Kapitel 3. Zufällige Variablen

Abschnitte 3.1 - 3.6

## Kapitel 4. Diskrete und stetige Standardverteilungen

ganzes Kapitel **ausser** 4.2.8 (Die Multinomialverteilung) und 4.3.4 (Die zweidimensionale Normalverteilung)

## Kapitel 5. Grenzwertsätze und Approximationen

Abschnitte 5.1 - 5.4.2

## Kapitel 6. Schätzung von Parametern

Abschnitte 6.1 - 6.4

# Kapitel 7. Prüfen statistischer Hypothesen

Abschnitte 7.1 - 7.4

Insbesondere sind die folgenden Tests prüfungsrelevant:

### Signifikanztests für $\mu$ und $\sigma$ einer normalverteilten Grundgesamtheit (Signifikanzniveau $\alpha$)

| Hypothesen<br>$H_0$ $H_1$ | Voraussetzungen | Testgrösse $T$ | Verteilung von $T$ | Kritischer Bereich |
|---|---|---|---|---|
| Gauß-Test | | | | |
| $\mu = \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$<br>$\mu \leq \mu_0$ $\mu > \mu_0$<br>$\mu \geq \mu_0$ $\mu < \mu_0$ | $\sigma^2 = \sigma_0^2$ bekannt | $\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$ | $N(0,1)$-Verteilung | $\|t\| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br>$t > z_{1-\alpha}$<br>$t < -z_{1-\alpha}$ |
| Einfacher t-Test | | | | |
| $\mu = \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$<br>$\mu \leq \mu_0$ $\mu > \mu_0$<br>$\mu \geq \mu_0$ $\mu < \mu_0$ | $\sigma^2$ unbekannt | $\frac{\overline{X} - \mu_0}{S_X}\sqrt{n}$ | $t_{n-1}$-Verteilung | $\|t\| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$<br>$t > t_{n-1;1-\alpha}$<br>$t < -t_{n-1;1-\alpha}$ |
| $\chi^2$-Streuungstest | | | | |
| $\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$<br>$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$<br>$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ | $\mu$ unbekannt | $\frac{(n-1) \cdot S_X^2}{\sigma_0^2}$ | $\chi_{n-1}^2$-Verteilung | $t > \chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ oder $t < \chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}$<br>$t > \chi^2_{n-1;1-\alpha}$<br>$t < \chi^2_{n-1;\alpha}$ |
| Ergänzung (**nicht prüfungsrelevant**) | | | | |
| $\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$<br>$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$<br>$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ | $\mu$ bekannt | $\frac{n \cdot S_X^{*2}}{\sigma_0^2}$ | $\chi_n^2$-Verteilung | $t > \chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}$ oder $t < \chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}}$<br>$t > \chi^2_{n;1-\alpha}$<br>$t < \chi^2_{n;\alpha}$ |

**Signifikanztests zum Vergleich zweier Erwartungswerte $\mu_X$ und $\mu_Y$ und Varianzen $\sigma_X^2$ und $\sigma_Y^2$ von normalverteilten Grundgesamtheiten (Signifikanzniveau $\alpha$)**

| Hypothesen $H_0$ | $H_1$ | Voraussetzungen | Testgrösse $T$ | Verteilung von $T$ | Kritischer Bereich |
|---|---|---|---|---|---|
| Doppelter t-Test | | | | | |
| $\mu_X = \mu_Y$ | $\mu_X \neq \mu_Y$ | $(X_1, \dots, X_{n_1})$, $(Y_1, \dots, Y_{n_2})$ unabhängige Stichproben | $\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$ mit | | $\|t\| > t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}}$ |
| $\mu_X \leq \mu_Y$ | $\mu_X > \mu_Y$ | $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ | $S =$ | $t_{n_1+n_2-2}$-Verteilung | $t > t_{n_1+n_2-2;1-\alpha}$ |
| $\mu_X \geq \mu_Y$ | $\mu_X < \mu_Y$ | $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ | $\sqrt{\frac{(n_1-1)S_X^2 + (n_2-1)S_Y^2}{n_1+n_2-2}}$ | | $t < -t_{n_1+n_2-2;1-\alpha}$ |
| Welch-Test | | | | | |
| $\mu_X = \mu_Y$ | $\mu_X \neq \mu_Y$ | $(X_1, \dots, X_{n_1})$, $(Y_1, \dots, Y_{n_2})$ unabhängige Stichproben | $\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_1} + \frac{S_Y^2}{n_2}}}$ | $t_m$-Verteilung $m =$ | $\|t\| > t_{m;1-\frac{\alpha}{2}}$ |
| $\mu_X \leq \mu_Y$ | $\mu_X > \mu_Y$ | $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ | | $\frac{\left(S_X^2/n_1 + S_Y^2/n_2\right)^2}{\left(\frac{(S_X^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(S_Y^2/n_2)^2}{n_2-1}\right)}$ | $t > t_{m;1-\alpha}$ |
| $\mu_X \geq \mu_Y$ | $\mu_X < \mu_Y$ | $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ | | ganzzahlig gerundet | $t < -t_{m;1-\alpha}$ |
| F-Test | | | | | |
| $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ | $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ | $(X_1, \dots, X_{n_1})$, $(Y_1, \dots, Y_{n_2})$ unabhängige Stichproben | $S_X^2/S_Y^2$ | $F_{n_1-1,n_2-1}$-Verteilung | $t > F_{n_1-1,n_2-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ oder $t < F_{n_1-1,n_2-1;\frac{\alpha}{2}}$ |
| $\sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2$ | $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ | $\mu_X$, $\mu_Y$ unbekannt | $S_X^2/S_Y^2$ | $F_{n_1-1,n_2-1}$-Verteilung | $t > F_{n_1-1,n_2-1;1-\alpha}$ |
| $\sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2$ | $\sigma_X^2 < \sigma_Y^2$ | $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ | $S_Y^2/S_X^2$ | $F_{n_2-1,n_1-1}$-Verteilung | $t > F_{n_2-1,n_1-1;1-\alpha}$ |

Beachte: Gilt $X \sim F_{m,n}$ so ist $1/X \sim F_{n,m}$ und für die Quantile folgt $F_{m,n;\alpha} = \dfrac{1}{F_{n,m;1-\alpha}}$.

| Hypothesen<br>$H_0$ $H_1$ | | Voraussetzungen | Testgrösse $T$ | Verteilung von $T$ | Kritischer Bereich |
|---|---|---|---|---|---|
| paired t-Test | | | | | |
| $\mu_X = \mu_Y$ | $\mu_X \neq \mu_Y$ | $(X_1, \ldots, X_n)$, $(Y_1, \ldots, Y_n)$<br>(verbundene) Stichproben | $\frac{\overline{D}}{S_D}\sqrt{n}$ mit | | $\lvert t\rvert > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ |
| $\mu_X \leq \mu_Y$ | $\mu_X > \mu_Y$ | $D = X - Y \sim N(0, \sigma_D^2)$ | $S_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (D_i - \overline{D})^2$ | $t_{n-1}$-Verteilung | $t > t_{n-1;1-\alpha}$ |
| $\mu_X \geq \mu_Y$ | $\mu_X < \mu_Y$ | | | | $t < -t_{n-1;1-\alpha}$ |

# Kapitel 8. Nichtparametrische Tests

**nicht** prüfungsrelevant

# Kapitel 9. Lineare Regression

Im Umfang der Vorlesung ,,Einführung in die Ökonometrie“

**Beispiel**: Einfaches Regressionsmodell

- Modell: $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$
- Gauss-Markov-Schätzer: $\mathbf{b} = (\mathbf{X^T X})^{-1}\mathbf{X^T y}$ oder $b_0 = \overline{y} - b_1\overline{x}$ und $b_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$
- Hypothesen $H_0 : \beta_1 = 0$ gegen $H_1 : \beta_1 \neq 0$
- **Zwei** mögliche (gleichwertige) Teststatistiken:

  1. Variante

$$F \;=\; \frac{SQ_{Regression}}{SQ_{Residual}} \cdot (n-2) \;=\; \frac{b_1^2\; S_{xx}}{\frac{1}{n-2}\;\mathbf{e}^T\mathbf{e}} \sim F_{1,n-2} \quad \text{unter } H_0$$

  2. Variante

$$T \;=\; \frac{b_1\;\sqrt{S_{xx}}}{\sqrt{\frac{1}{n-2}\;\mathbf{e}^T\mathbf{e}}} \sim t_{n-2} \quad \text{unter } H_0$$