Wahrscheinlichkeitsräume und Zufallsvariablen

Dr. Thomas Zehrt

Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

Statistik II FS 2010

Outline

1. Ω und P
2. Abzählen von Mengen(Selbststudium)
3. Bedingte Wahrscheinlichkeit
4. Totale Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes
5. Unabhängigkeit
6. Zufallsvariablen
7. Diskrete Zufallsvariablen
8. Stetige Zufallsvariablen

Wir ordnen einem Zufallsexperiment mit endlich oder abzählbar unendlich vielen möglichen Ausgängen eine nichtleere Menge Ω zu, deren Elemente ω die Versuchsausgänge bezeichnen.

Definition

Ω heisst der Ergebnisraum oder Stichprobenraum, $\omega \in \Omega$ heisst Ergebnis oder Elementarereignis, $A \subset \Omega$ heisst Ereignis (d.h. ein $\omega \in A$ ist der beobachtete Versuchsausgang). $\mathcal{P}(\Omega)$ ist die Menge aller Ereignisse.

Beispiel

n-maliges Werfen eines Würfels:

$$\Omega \quad = \quad \{\, \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \;:\; \omega_i \in \{1, \ldots, 6\} \text{ für } i = 1, \ldots, n \,\} \,.$$

Seien $A, B \subset \Omega$ (oder $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$) Ereignisse.

Darstellung	Ereignis	Erkärung
$A \cap B$	A **und** B	Elemente die zu A **und** B gehören.
$A \cup B$	A **oder** B	Elemente die zu A **oder** B gehören.
$A - B$	A **ohne** B	Elemente die zu A aber **nicht** zu B gehören.
$\overline{A} = A^c$	**nicht** A	Elemente die **nicht** zu A gehören.

$\Omega \subset \Omega$ heisst das <u>sichere</u> Ereignis und $\emptyset \subset \Omega$ das <u>unmögliche</u> Ereignis.
Zwei Ereignisse A und B heissen <u>unvereinbar</u>, wenn $A \cap B = \emptyset$ ist.

Zusammenhang zwischen relativer Häufigkeit und Zufall

- Wer Ausgang eines einzelnen Zufallsexperimentes völlig offen ist.
- Führt man ein Experiment sehr oft aus (n-mal), und zählt dabei, wie oft ein bestimmtes Ereignis A eintritt (k-mal), so beobachtet man **immer**, dass die relative Häufigkeit $f(A)$ von A mit wachsendem n gegen einen festen Wert $p \in [0, 1]$ strebt:

$$f(A) = \frac{k}{n} \quad \longrightarrow \quad p \in [0, 1].$$

- Dabei ist der Grenzwert **nicht** im mathematischen Sinne zu verstehen, sondern rein empirisch zu deuten.
- **Beispiel:** Wirft man eine Münze n-mal und zählt die k Versuchsausgänge „Kopf", so ist intuitiv klar, dass

$$\frac{k}{n} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2}.$$

Definition (Axiome von Kolmogorov)

Ein Paar (Ω, P) ist ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, wenn Ω eine nicht-leere endliche oder abzählbar unendliche Menge ist und P eine Abbildung, die jeder Teilmenge $A \subset \Omega$ einen Wert $P(A)$ so zuordnet, dass

1. $P(\Omega) = 1$ (P ist normiert);
2. für alle $A \subset \Omega$ gilt $P(A) \geq 0$ und
3. sind $A_1, A_2, \ldots$ disjunkte Mengen (Ereignisse), so ist

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \text{ (P ist additiv).}$$

Jede Abbildung P mit diesen Eigenschaften heisst Wahrscheinlichkeitsverteilung oder einfach Verteilung.

Aus der Eigenschaft drei folgt, dass man aus der Kenntnis der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse ω die Wahrscheinlichkeit jedes Ereignisses ableiten kann, denn natürlich ist A disjunkte Vereinigung seiner Elemente.

$$\boxed{P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)}$$

Die obigen drei Bedingungen definieren nur einen Rahmen für P, aber aus ihnen lassen sich einige weitere Eigenschaften einer Verteilung ableiten.

Theorem

Für alle $A, B, A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ *gilt:*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$\begin{aligned} P(A - B) &= P(A) - P(A \cap B) \\ P(\cup_{i=1}^{n} A_i) &\leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Oft kann man davon ausgehen, dass alle Ergebnisse $\omega \in \Omega$ **gleichwahrscheinlich** sind. Dann heisst P Gleichverteilung, (Ω, P) heisst Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum und das Experiment heisst Laplace-Experiment. Dann gilt für $\omega \in \Omega$

$$P(\omega) \quad = \quad \frac{1}{|\Omega|}$$

und für alle Ereignisse $A \subset \Omega$ folgt

$$\begin{aligned} P(A) \quad &= \quad \sum_{\omega \in A} P(\omega) \quad = \quad \sum_{\omega \in A} \frac{1}{|\Omega|} \quad = \quad \frac{|A|}{|\Omega|} \\ &= \quad \frac{\text{Anzahl günstiger Ergebnisse}}{\text{Anzahl möglicher Ergebnisse}} \end{aligned}$$

Hauptproblem: Wie bestimmt man die Mächtigkeit von Mengen bzw. wie kann man Mengen abzählen?

Definition

Eine endliche Menge M ist eine Menge, die nur endlich viele Elemente enthält. Die Anzahl der Elemente wird mit $|M|$ bezeichnet und heisst auch die Kardinalität oder Mächtigkeit von M.

Satz (Permutationen (ohne Wiederholung))

Die Elemente einer Menge mit N *Elementen lassen sich auf* $N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots N$ *verschiedene Arten permutieren.*

Satz (Kombinationen (ohne Wiederholung))

Es gibt genau

$$\binom{N}{n} \quad := \quad \frac{N!}{(N-n)!\, n!}$$

verschiedene n*-elementige Teilmengen einer* N*-elementigen Menge (ohne dabei die Reihenfolge zu berücksichtigen).*

In einer Urne seien N Kugeln, die wir mit den Nummern $1, 2, \ldots, N$ versehen. Nacheinander werden n Kugeln zufällig gezogen.
Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Ziehung durchzuführen:

- mit Zurücklegen: jede gezogene Kugel wird wieder in die Urne zurückgelegt, kann also wieder gezogen werden
- ohne Zurücklegen: jede Kugel kann nur einmal gezogen werden

Das Ergebnis einer gesamten Ziehung kann auf verschiedene Weise angegeben werden:

- Stichprobe in Reihenfolge: als geordnetes n-Tupel $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, wobei ω_i die Nummer der bei der i-ten Ziehung gezogenen Kugel ist (z.B. $(1,2) \neq (2,1)$)
- Stichprobe ohne Reihenfolge: als Menge mit n Elementen $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. (z.B. $\{1,2\} = \{2,1\}$)

Dadurch ergeben sich 4 Stichprobenräume.

Wir betracheten eine Urne mit $N = 3$ Kugeln, d.h. $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$, aus der $n = 2$ Kugeln gezogen werden sollen.

in R. mit Z.	in R. ohne Z.	ohne R. mit Z.	ohne R. ohne Z.
$(1,1)$; $(1,2)$; $(2,1)$; $(1,3)$; $(3,1)$; $(2,2)$; $(2,3)$; $(3,2)$; $(3,3)$	$(1,2)$; $(2,1)$; $(1,3)$; $(3,1)$; $(2,3)$; $(3,2)$;	$\{1,1\}$; $\{1,2\}$; $\{1,3\}$; $\{2,2\}$; $\{2,3\}$; $\{3,3\}$	$\{1,2\}$; $\{1,3\}$; $\{2,3\}$
$9 = 3^2$	$6 = 3 \cdot 2$	$6 = \binom{3+2-1}{2}$	$3 = \binom{3}{2}$

R. = Reihenfolge
Z. = Zurücklegen

Satz

Sei $\mathbb{A} = \{1, \ldots, N\}$ *die Menge aller Kugeln in der Urne. Dann haben die vier Stichprobenräume die folgenden Kardinalitäten:*

- *In Reihenfolge mit Zurücklegen:*

$$\boxed{|\Omega_I| = N^n}$$

- *In Reihenfolge ohne Zurücklegen:*

$$\boxed{|\Omega_{II}| = N \cdot (N-1) \cdots (N-n+1)}$$

Satz

- *Ohne Reihenfolge ohne Zurücklegen:*

$$\boxed{|\Omega_{III}| = \binom{N}{n}}$$

- *Ohne Reihenfolge mit Zurücklegen:*

$$\boxed{|\Omega_{IV}| = \binom{N+n-1}{n}}$$

Aufgabe

Finden Sie die kleinste Anzahl von Leuten, so dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei von ihnen

- *am 1. April Geburtstag feiern, grösser als* $1/2$ *ist und*
- *am selben Tag Geburtstag feiern, grösser als* $1/2$ *ist.*

Hinweis: Versuchen Sie zunächst die folgenden beiden Formeln herzuleiten. Bestimmen Sie dann jeweils das kleinste n, so dass die Wahrscheinlichkeit grösser als $1/2$ ist.

$$\begin{aligned} p(\text{„mind. 2 am 01.04. Geburtstag"}) &= 1 - \frac{365^n + n \cdot 365^{n-1}}{366^n} \\ p(\text{„mind. 2 am selben Tag Geburtstag"}) &= 1 - \frac{366 \cdot 355 \cdots (366 - n + 1)}{366^n} \end{aligned}$$

Oft steht bei einem Zufallsexperiment schon die Information zur Verfügung, dass das Ergebnis zu einer bestimmten Teilmenge $B \subset \Omega$ des Ereignisraumes gehört.

Beispiel

Ein Skatspieler sieht seine eigenen 10 Karten. Möchte er also wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit einer der anderen Spieler 2 Asse hat, so sollte er zunächst seine eigenen Asse zählen. Hat er selbst 3 oder 4 Asse, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit natürlich null, hat er maximal 2 Asse, so ist sie positiv.

Definition

Wir definieren für **beliebige** Wahrscheinlichkeitsräume (Ω, P) und für beliebige Ereignisse B mit $P(B) > 0$ die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ von A bei gegebenen B durch

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.}$$

In der Praxis wird meist $P(A \cap B)$ aus $P(B)$ und $P(A|B)$ berechnet, d.h. wir nutzen die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit in der Form $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$.

Aufgabe

In einer Lostrommel befinden sich 10 *Lose von denen genau* 6 *Nieten sind. Sie ziehen genau zwei Lose (ohne Zurücklegen). Mit welcher Wahrscheinlichkeit habe Sie genau* 2 *Nieten gezogen?*

Lösung:

Satz (Allgemeiner Multiplikationssatz)

Sind $A_1, A_2, \ldots, A_k \subset \Omega$ *Ereignisse mit* $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}) > 0$*, so gilt*

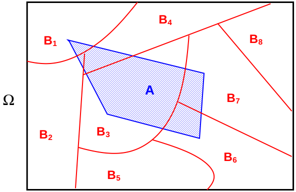
$$\boxed{\begin{aligned} & P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) \\ = \quad & P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_k|A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}) \end{aligned}}$$

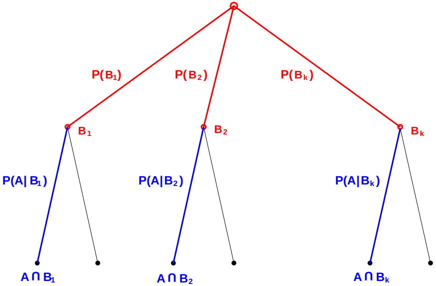
Aufgabe

In einer Kiste mit 100 *Überraschungseiern befinden sich genau* 15*, die eine Figur enthalten. Sie entnehmen der Kiste drei Überraschungseier (ohne Zurücklegen). Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der vier Ereignisse:* $E_i :=$ *„genau* i *der Eier enthalten eine Figur„ für* $i = 0, 1, 2, 3$*.*

Lösung:

Seien $B_1, \ldots, B_k \subset \Omega$ paarweise disjunkte Ereignisse deren Vereinigung ganz Ω ist. Weiterhin gelte $P(B_i) > 0$ für alle i. Wir betrachten ein Ereignis A.





Satz

1. **Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit**

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i) \cdot P(A|B_i)}$$

2. **Formel von Bayes**

$$\boxed{P(B_i|A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)\, P(A|B_i)}{P(A)}}$$

falls $P(A) > 0$ *ist.*

Aufgabe (Test für eine seltene Krankheit)

Eine Krankheit kommt bei etwa 0.5% *der Bevölkerung vor. Ein Test zur Auffindung der Krankheit führt bei* 99% *der Kranken zu einer (positiven) Reaktion, aber auch bei* 2% *der Gesunden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, bei der die Testreaktion auftritt, die Krankheit wirklich hat?*

Lösung:

Wir denken uns die Bevölkerung mit $\{1, 2, \ldots, N\}$ nummeriert. Die Menge aller Kranken sei mit B und die aller Gesunden mit $\overline{B}$ bezeichnet ($B \cap \overline{B} = \emptyset$ und $B \cup \overline{B} =$ gesamte Bevölkerung). Sicher gilt

$$|B| \approx \frac{5}{1000}N \qquad \text{und} \qquad |\overline{B}| \approx \frac{995}{1000}N.$$

Bei zufälliger Auswahl einer Person aus der Bevölkerung ist jeder Person die Wahrscheinlichkeit $1/N$ zuzuordnen. Somit ergibt sich

$$P(B) = \frac{1}{N} \cdot \frac{5}{1000} \cdot N = \frac{5}{1000}$$

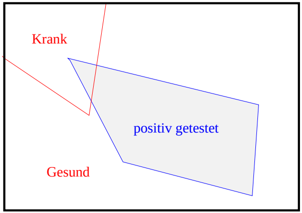
$$P(\overline{B}) = \frac{1}{N} \cdot \frac{995}{1000} \cdot N = \frac{995}{1000}$$

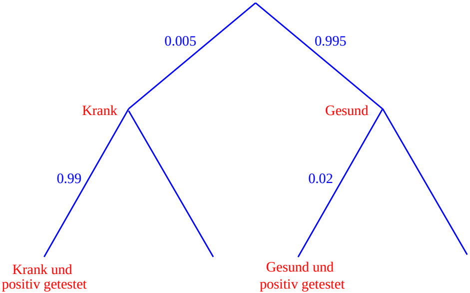
Mit A sei die Teilmenge der Personen bezeichnet, bei denen der Test zu einer (positiven) Reaktion führt. Die beiden Angaben zur Sicherheit des Testes sind bedingte Wahrscheinlichkeiten, also

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{99}{100} && = P(\text{ Test positiv } | \text{ krank }) \\ P(A|\overline{B}) &= \frac{2}{100} && = P(\text{ Test positiv } | \text{ gesund }) \end{aligned}$$

Natürlich sind diese beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten ganz interessant, der Test scheint recht sicher zu arbeiten, aber eine wirklich wichtige Information wäre die Wahrscheinlichkeit dass man (wirklich) krank ist, falls der Test positiv testet.

Situation:





Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $P(B|A)$ und es folgt

$$P(B|A) \quad = \quad \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
& P(B|A) \\
= \ & \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\
= \ & \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\overline{B}) \cdot P(\overline{B})} \\
= \ & \frac{\frac{99}{100} \cdot \frac{5}{1000}}{\frac{99}{100} \cdot \frac{5}{1000} + \frac{2}{100} \cdot \frac{995}{1000}} \ = \ \frac{495}{2485} \ \approx \ 0.2
\end{aligned}
$$

Es **kann** sein, dass das Eintreffen eines Ereignisses B keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A hat: $P(A|B) = P(A)$. Falls dann noch $P(B) > 0$ gilt, so folgt aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$P(A \cap B) \;=\; P(A|B) \cdot P(B) \;=\; P(A) \cdot P(B)$$

Ist $P(B) > 0$ so sind die Gleichungen

- $P(A|B) \;=\; P(A)$ (besser zu verstehen) und
- $P(A \cap B) \;=\; P(A) \cdot P(B)$ (symmetrisch in A und B)

äquivalent.

Definition

Zwei Ereignisse A und B heissen (stochastisch) unabhängig, wenn die folgende Gleichung gilt

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Aufgabe

Zeigen Sie, dass die folgenden drei Gleichungen (unter bestimmten Bedingungen) gleichwertig sind:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \\ P(A|B) &= P(A) \\ P(B|A) &= P(B) \end{aligned}$$

Die Unabhängigkeit von zwei Ereignissen A und B drückt aus, dass A und B im **wahrscheinlichkeitstheoretischen Sinne** keinerlei Einfluss aufeinander haben. Andererseits: Zwei Ereignisse A und B können selbst dann unabhängig sein, wenn real das Eintreten von A davon abhängt, ob B geschieht.

Aufgabe

Wir betrachten das Experiment, das aus zwei nacheinander ausgeführten Würfen eines Würfels besteht. A *sei das Ereignis, dass die Summe der beiden geworfenen Augenzahlen gerade ist und* B *sei das Ereignis, dass die Augenzahl des zweiten Wurfes gerade ist. Sicher entscheidet hier das Ereignis* B *mit, ob* A *eintritt. Sind* A *und* B *stochastisch unabhängig?*

Lösung:

Definition

Die n Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ heissen stochastisch unabhängig, wenn für **jede** Auswahl $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ mit $m \leq n$ die folgende Gleichung gilt:

$$\boxed{P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1}) \cdot \cdots \cdot P(A_{i_m})}$$

Aufgabe

Wieviele Gleichungen muss man überprüfen, um zu zeigen, dass drei Ereignisse A_1, A_2, A_3 unabhängig sind?

Lösung:

Definition

Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann heisst eine Abbildung

$$X : \Omega \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

eine (reellwertige) Zufallsvariable, falls alle Ereignisse der Form

- $(X = x) \subset \Omega$ (alle $\omega \in \Omega$ die von X auf x abgebildet werde) für alle reellen Zahlen x und
- $(X \in I) \subset \Omega$ (alle $\omega \in \Omega$ die von X in das Intervall I abgebildet werden) für alle Intervalle I

Wahrscheinlichkeiten besitzen, die dem Axiomsystem von Kolmogorov genügen.

Oft wird man sich aber für die Wahrscheinlichkeit interessieren, dass $X(\omega)$ in einem bestimmten Intervall $I = [a, b]$ oder auch $I = (-\infty, b]$ liegt, also dass $X(\omega) \in I$ gilt. Dazu wählen wir die folgenden Schreibweisen:

$$\begin{aligned}
P(X \in I) &= P(\ \{\omega \in \Omega\ :\ X(\omega) \in I\}\ ) \\
P(a \le X \le b) &= P(\ \{\omega \in \Omega\ :\ a \le X(\omega) \le b\}\ ) \\
P(X \le b) &= P(\ \{\omega \in \Omega\ :\ X(\omega) \le b\}\ ) \\
P(a \le X) &= \\
P(a < X) &= \\
P(X \le a \text{ oder } b < X) &=
\end{aligned}$$

Definition

Sei X eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P). Dann heisst die Abbildung $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ mit

$$\boxed{F(x) \;=\; P(X \leq x) \;=\; P(-\infty \leq X \leq x)}$$

<u>Verteilungsfunktion</u> der Zufallsvariablen.

Satz (Eigenschaften von Verteilungsfunktionen)

- F *ist monoton wachsend*
- F *ist rechtsseitig stetig, d.h.*

$$F(x) \quad = \quad \lim_{h>0, h\to 0} F(x+h)$$

- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

Satz (Rechenregeln für Verteilungsfunktionen)

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$ *gilt:*

$$
\begin{aligned}
P(X < a) &= P(X \leq a) - P(X = a) \; = \; F(a) - P(X = a) \\
P(X > a) &= 1 - F(a) \\
P(X \geq a) &= 1 - F(a) + P(X = a) \\
P(a < X \leq b) &= F(b) - F(a) \\
P(a < X < b) &= F(b) - F(a) - P(X = b) \\
P(a \leq X < b) &= F(b) - F(a) - P(X = b) + P(X = a)
\end{aligned}
$$

Im folgenden unterscheiden wir zwei Typen von Zufallsvariablen

- diskrete Zufallsvariablen:

  $\mathbb{R}_X = X(\Omega)$ ist eine abzählbare Menge, z.B. $0, 1, 2, \ldots, 100$

- stetige Zufallsvariablen:

  $\mathbb{R}_X = X(\Omega)$ ist eine überabzählbare Menge, z.B. $[0, 200]$.

Definition

Eine Zufallsvariable X heisst diskret, wenn ihr Wertebereich endlich oder abzählbar unendlich ist.

Wir können alle möglichen Werte von X durchnumerieren:

$$\mathbb{R}_X = X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}.$$

Diskrete Zufallsvariablen nehmen in der Regel ganzzahlige Werte an und entstehen meist durch Zählprozesse.

Zu jedem Wert x_j gehört das Ereignis $(X = x_j)$ und dessen Wahrscheinlichkeit

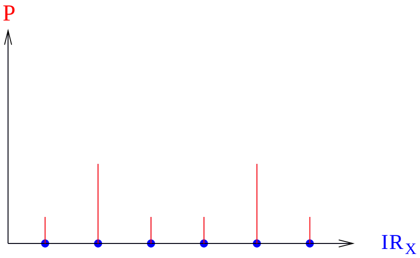
$$p_j \quad := \quad P(X = x_j), \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

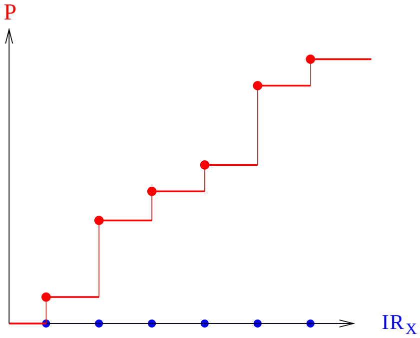
Die Verteilungsfunktion von X hat dann die Gestalt

$$F(x) = P(X \leq x) \quad = \quad \sum_{x_j \leq x} p_j.$$

Graphische Darstellung:

- in einem Stabdiagramm: über jeder Stelle x_j errichtet man einen Stab der Länge p_j,
- durch den Graphen der Verteilungsfunktion F



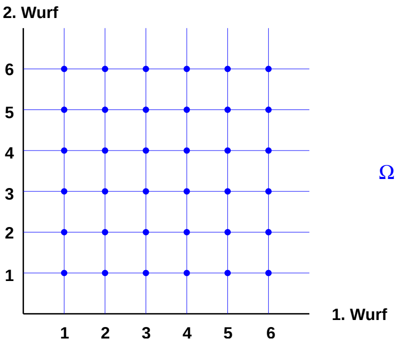


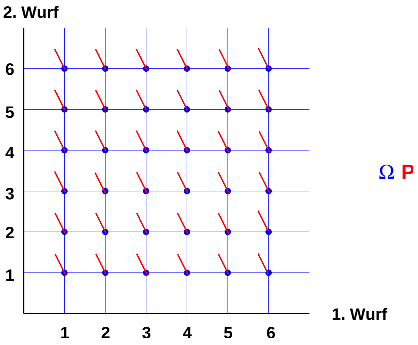
Example

Wir betrachten den zweifachen Wurf eines fairen Würfels und wissen:

$$\Omega \quad = \quad \{\ (\omega_1, \omega_2)\ :\ \omega_i \in \{1, \ldots, 6\}\ \}$$

und P ist die Gleichverteilung auf Ω.





Example

Wir definieren eine Zufallsvariable durch

$$\begin{array}{rccl} X: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\omega_1, \omega_2) & \longmapsto & \omega_1 + \omega_2 \end{array}$$

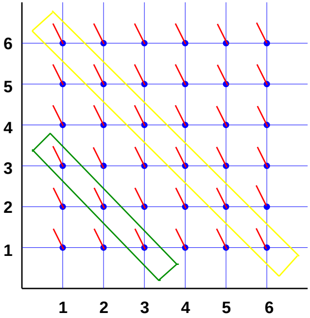
für alle $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$, d.h. X ist eine Funktion die jedem Ergebnis des Experimentes die Augensumme zuordnet.

Example

Es gilt zunächst $\mathbb{R}_X = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}$ und z.B.

$$P(X = 4) = P(\ (3,1) \text{ oder } (2,2) \text{ oder } (1,3)\ ) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36}$$

$$P(X = 7) = \qquad = \frac{6}{36}$$



Example

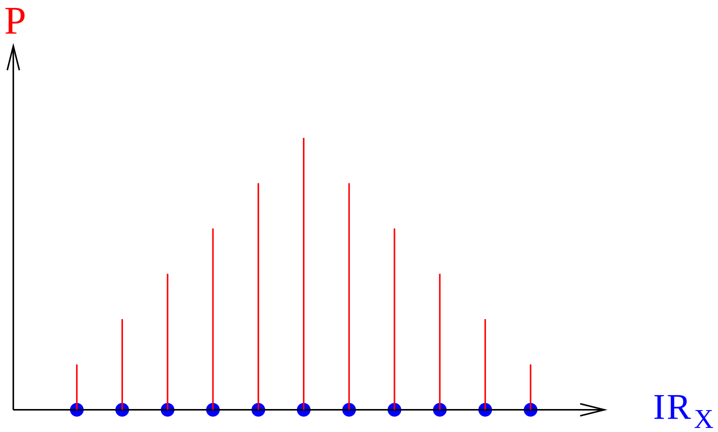
x	Elemente in $X^{-1}(x)$	$\lvert X^{-1}(x)\rvert$	$P(X = x)$
2	$(1,1)$	1	$1/36$
3	$(1,2),(2,1)$	2	$2/36$
4	$(1,3),(2,2),(3,1)$	3	$3/36$
5	$(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$	4	$4/36$
6	$(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)$	5	$5/36$
7	$(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$	6	$6/36$
8	$(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)$	5	$5/36$
9	$(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)$	4	$4/36$
10	$(4,6),(5,5),(6,4)$	3	$3/36$
11	$(5,6),(6,5)$	2	$2/36$
12	$(6,6)$	1	$1/36$

Example

Damit ergibt sich letztendlich die folgenden Verteilung für X:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Example



Definition

Eine Funktion f heisst Dichte oder Wahrscheinlichkeitsdichte falls sie die folgenden Eigenschaften hat:

1. $f(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$,
2. $f(t)$ ist stetig bis auf abzählbar viele Punkte,
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1$.

Definition

Eine Zufallsvariable heisst stetig mit der Dichte f falls sich die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ in der folgenden Weise schreiben lässt:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Satz

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine stetige Zufallsvariable einen beliebigen Wert x_0 annimmt, ist gleich Null:

$$P(X = x_0) \quad = \quad 0$$

Beweis:
Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und wir betrachten das Intervall $(x_0 - \delta, x_0]$. Dann gilt zunächst allgemein: $P(x_0 - \delta < X \leq x_0) = F(x_0) - F(x_0 - \delta)$ also

$$\begin{aligned} P(X = x_0) &= \lim_{\delta \to 0} P(x_0 - \delta < X \leq x_0) \\ &= \lim_{\delta \to 0} \left[F(x_0) - F(x_0 - \delta)\right] \\ &= F(x_0) - F(x_0) \ = \ 0. \end{aligned}$$

Bei stetigen Zufallsvariablen sind Punktereignisse $X = x_i$ <u>nicht</u> von Interesse!!

Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert zwischen a und b annimmt	$P(a \leq X \leq b)$ $= P(a < X < b)$ $= P(a \leq X < b)$
Ausgedrückt durch die Verteilungsfunktion	$= F(b) - F(a)$
Ausgedrückt durch die Dichte:	$= \int_a^b f(t)\, dt$

Aufgabe

Sind die folgenden Funktionen Wahrscheinlichkeitsdichten? Begründen Sie Ihre Aussage.

- $$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & t \in [2,4] \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$
- $\lambda > 0$
$$f(t;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$
- $$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$