Schätzen und Testen

Dr. Thomas Zehrt

Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

Statistik II FS 2010

Outline

1. Wiederholung: Testverteilungen
2. Schätzen
   - Grundproblem
   - Punktschätzung
   - Punktschätzen mit der Maximum-Likelihood-Methode
   - Konfidenzschätzung von Parametern
3. Testen
   - Grundbegriffe der Testtheorie

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ seien n unabhängige und identisch $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen. Dann ist die Summe ihrer Quadrate $Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ χ^2-verteilt mit n Freiheitsgraden. Kurz: $Z \sim \chi_n^2$

Satz (Additionssatz)

Die Summe zweier unabhängiger χ_n^2-verteilter bzw. χ_m^2-verteilter Zufallsvariablen ist χ_{n+m}^2-verteilt.

Wesentliches Beispiel: Für unabhängige Zufallsvariablen $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) gilt für die Stichprobenvarianz

$$S_X^2 \quad = \quad \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

tatsächlich

$$\frac{n-1}{\sigma^2} \cdot S_X^2 \quad \sim \quad \chi_{n-1}^2.$$

Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim N(0,1)$ und $Y \sim \chi^2_n$ so besitzt der Quotient

$$\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \quad \sim \quad t_n$$

eine t_n-Verteilung (Student-Verteilung) mit n Freiheitsgraden.

Satz

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen. Dann sind $\overline{X}$ und S_X^2 unabhängig. Der folgende Quotient ist t_{n-1}-verteilt:

$$\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S_X} \;=\; \frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\ \sum_{i=1}^{n}\ (X_i-\overline{X})^2}} \quad \sim \quad t_{n-1}$$

Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \chi^2_m$ und $Y \sim \chi^2_n$ so besitzt der Quotient

$$\frac{X/m}{Y/n} \quad \sim \quad F_{m,n}$$

eine Fisher'sche F-Verteilung mit (m, n) Freiheitsgraden.

Wichtigste Anwendung
Für $X \sim N(\mu_X, \sigma^2)$ und $Y \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$ betrachten wir zunächst die beiden Stichprobenvarianzen

$$S_X^2 \quad = \quad \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} (X_i - \overline{X})^2 \quad \text{Stichprobenumfang } m$$

$$S_Y^2 \quad = \quad \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2 \quad \text{Stichprobenumfang } n$$

Dann gilt für das Verhältnis der beiden Stichprobenvarianzen:

$$\frac{S_X^2}{S_Y^2} \quad \sim \quad F_{m-1,n-1}$$

Anmerkung: Ist eine Zufallsvariable W nach $F_{m,n}$-verteilt, so ist $1/W$ natürlich $F_{n,m}$-verteilt.

- Ausgangspunkt: endliche oder unendliche Grundgesamtheit
- endlicher Fall: N sehr gross
- von Interesse: Merkmal (Zufallsvariable) X (z.B. Alter, Masse, Länge, ...) mit der Verteilung $P(X = x)$ (bzw.der Verteilungsfunktion $F = F_x$)
- Untersuchung: nur durch (Zufallls)Stichproben vom Umfang $n << N$ möglich

Definition

Eine Zufallsstichprobe vom Umfang n ist eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$, wobei X_i die Merkmalsausprägung des i-ten Elementes in der Stichprobe bezeichnet. Dabei sollen alle diese Zufallsvariablen die selbe Verteilung wie X haben.
Meist fassen wir diese Zufallsvariablen zu einem Vektor zusammen:

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Jede Realisierung $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dieser Zufallsvariablen heisst eine konkrete Stichprobe.

Für endliche Grundgesamtheiten: die X_i sind streng genommen abhängig und nicht identisch verteilt.

Die Information, die man auf Grund der Stichprobe über die Grundgesamtheit gewinnen möchte, lässt sich meistens in Form so genannter Parameter darstellen.

Das ist eine feste aber unbekannte reelle Zahle, die wir meist mit dem griechischen Buchstaben θ abkürzen werden, und im weiteren wird stets angenommen, dass die Verteilung von X von diesem unbekannten Parameter abhängt.

Schätzprinzip der schliessenden Statistik
Ein unbekannter Parameter der Grundgesamtheit wird durch den entsprechenden Parameter der Stichprobe geschätzt.

Zur Schätzung eines Parameters θ wird aus den n Stichprobenvariablen ein Wert berechnet.

Definition

Sei θ der unbekannte Parameter der Verteilung $F_\theta(X)$ und $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe. Dann nennt man

$$T(\mathbf{X}) \quad = \quad T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

eine Schätzung (T ist irgend eine Funktion) von θ. Für eine konkrete Stichprobe $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ergibt sich der Schätzwert $\hat{\theta} = T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Beachte: θ ist ein fester Wert also insbesondere **keine** Zufallsvariable, $T(\mathbf{X})$ ist eine Zufallsvariable.

Beispiel 1: Stichprobenmittel

Es sei $\mu := E(X)$ mit $X :=$ „Merkmalsausprägung eines zufällig ausgewählten Elementes der Grundgesamtheit„
Ist die Grundgesamtheit endlich mit N Elementen, so gilt hier natürlich

$$\mu \quad = \quad \frac{1}{N}(X_1 + X_2 + \cdots + X_N)$$

und μ ist das arithmetische Mittel.
Dann ist das Stichprobenmittel

$$T(\mathbf{X}) = \overline{X} \quad := \quad \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

eine Schätzfunktion für μ.

Beispiel 2: Stichprobenvarianz

Sei X wie oben definiert und $\sigma^2 := Var(X)$ die Varianz der Grundgesamtheit. Ein Schätzer für σ^2 ist die Stichprobenvarianz

$$T(\mathbf{X}) = S_X^2 \quad := \quad \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{\mu})^2 .$$

Eine Schätzfunktion ist eine Zufallsvariable, sie kann also bei jedem Versuch (Stichprobe) anders ausfallen. Schon garnicht kann man erwarten, dass $\hat{\theta}$ den Parameter θ exakt trifft.

Dagegen sollte eine gute Schätzfunktion zumindest **im Mittel** richtig schätzen, d.h. ihr Erwartungswert sollte gleich dem zu schätzenden Parameter sein.

Definition

Eine Schätzfunktion $T(\mathbf{X})$ für den Parameter θ heisst erwartungstreu, wenn $E(T(\mathbf{X})) = \theta$ gilt. Die Differenz $bias(T(\mathbf{X}); \theta) = E(T(\mathbf{X})) - \theta$ wird als Bias (Verzerrung) bezeichnet.
Sie heisst konsistent, wenn ihre Varianz mit wachsendem Stichprobenumfang n gegen 0 konvergiert:

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = 0.$$

Satz

Die Schätzfunktionen Stichprobenmittel $\hat{\mu}$ für μ und Stichprobenvarianz S_X^2 für σ^2 sind erwartungstreu und konsistent.

Beweis:
$\hat{\mu}$ ist erwartungstreuer und konsistenter Schätzer für μ:

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\mu}) &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\cdot n\cdot\mu = \mu \\
Var(\hat{\mu}) &= Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\sigma^2 = \frac{1}{n}\cdot\sigma^2 \to 0
\end{aligned}
$$

Wir wollen noch zeigen, dass S_X^2 erwartungstreu ist, was insbesondere daran liegt, dass man bei der Definition der Varianz durch $(n-1)$ anstatt durch n teilt. Es gilt zunächst:

$$S_X^2 \quad = \quad \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{\mu})^2 \; = \; \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1} \hat{\mu}^2$$

Da für jede Zufallsvariable X der Verschiebungssatz $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ gilt, folgt weiterhin für jede der Zufallsvariablen X_i und für die Zufallsvariable $\hat{\mu}$:

$$\begin{aligned} E(X_i^2) \quad &= \quad Var(X_i) + E(X_i)^2 \; = \; \sigma^2 + \mu^2 \\ E(\hat{\mu}^2) \quad &= \quad Var(\hat{\mu}) + E(\hat{\mu})^2 \; = \; \frac{1}{n}\, \sigma^2 + \mu^2 \end{aligned}$$

und somit insgesamt:

$$\begin{aligned} E(S_X^2) \quad &= \quad \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - \frac{n}{n-1} E(\hat{\mu}^2) \\ &= \quad \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\sigma^2 + \mu^2) - \frac{n}{n-1} \left(\frac{1}{n}\, \sigma^2 + \mu^2 \right) \\ &= \quad \frac{1}{n-1}\, n \, \left(\sigma^2 + \mu^2 \right) - \frac{n}{n-1} \left(\frac{1}{n}\, \sigma^2 + \mu^2 \right) \quad = \quad \sigma^2 \end{aligned}$$

Aufgabe

1. *Bestimmen Sie den Erwartungswert der Schätzfunktion*

$$T(\mathbf{X}) \quad := \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu})^2.$$

2. *Nehmen wir an, dass wir den Erwartungswert μ kennen. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Schätzfunktion*

$$T(\mathbf{X}) \quad := \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2.$$

Lösung:

X Zufallsvariable mit bis auf einen Parameter θ bekannter Verteilung $P(X = x) = P(x; \theta)$.

Mögliche Werte: $\theta \in \Theta$ mit

- Θ eine endliche Menge $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\}$ oder
- ein (offenes) Teilintervall der reellen Zahlen $\Theta = (a, b)$.

Der Parameter θ soll anhand einer konkreten Stichprobe $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ geschätzt werden. Die Funktion

$$\boxed{L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) \;=\; \prod_{i=1}^{n} P(x_i; \theta) \;=\; P(x_1; \theta) \cdot P(x_2; \theta) \cdots P(x_n; \theta)}$$

heisst Likelihood-Funktion zur konkreten Stichprobe $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ein Parameterwert $\theta_{ML} = \hat{\theta}$ mit

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta_{ML}) \quad \geq \quad L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$$

für **alle** erlaubten $\theta \in \Theta$ heisst Maximum-Likelihood-Schätzer oder einfach ML-Schätzer für den Parameter θ.

1. Vorgehen für $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k\}$
   1. Bestimme $\max\{L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta_1), \ldots, L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta_k)\}$
   2. Bestimme ein (nicht notwendigerweise eindeutiges) θ_i, welches dieses Maximum realisiert. Es gilt dann $\theta_{ML} := \theta_i$.
2. Vorgehen für $\Theta = (a, b)$: Lösen der
   1. Maximum-Likelihood-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial\theta} L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = 0$$

   2. oder der Log-Maximum-Likelihood-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = 0$$

Aufgabe

Es gelte $X \sim B(n; p)$ *mit bekanntem Parameter* n*. Bestimmen Sie einen allgemeinen ML-Schätzer für* p *bezüglich einer konkreten Stichprobe* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*.*

Lösung:

Aufgabe

Es gelte $X \sim Po(\lambda)$*. Bestimmen Sie einen allgemeinen ML-Schätzer für* λ *bezüglich der konkreten Stichprobe* $(3, 5, 2)$*.*

Lösung:

Allgemeine Problembeschreibung

Für den unbekannten Parameter θ wird ein Zufallsintervall mit den Grenzen $I_u(\mathbf{X})$ und $I_o(\mathbf{X})$ bestimmt, dass den Parameter θ mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit von mindestens $1-\alpha$ überdeckt:

$$\boxed{P(\, I_u(\mathbf{X}) \;\leq\; \theta \;\leq\; I_o(\mathbf{X})\,) \;\geq\; 1-\alpha}$$

Die Länge des Konfidenzintervalls $L = I_o - I_u$ ist ein Mass für die Genauigkeit der Schätzung. Die Länge L wächst mit fallendem α. Grössere Stichproben verkürzen i.A. das Konfindenzintervall.

Konfidenzschätzung des Erwartungswertes μ einer Normalverteilung falls $\sigma^2 = \sigma_0^2$ bekannt

- Gegeben: Stichprobe $\mathbf{X}$ der $N(\mu, \sigma_0^2)$-verteilten Zufallsvariablen X
- Punktschätzer für μ: $\overline{X} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$
- Konstruktion eines bzgl. $\overline{X}$ symmetrischen Konfidenzintervalls:
  - Es gilt: $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma_0^2/n)$
  - Normalisieren: $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
  - Es folgt: $P\left(\left|\dfrac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma_0}\right| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$
  - Auflösen: $[I_u(\mathbf{X}), I_o(\mathbf{X})] = \left[\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$

Aufgabe

Bei einer Flaschenabfüllanlage mit dem Sollwert 1000 *ml ist die tatsächliche Füllmenge eine normalverteilte Zufallsvariable* X *mit Standardabweichung* $\sigma = 3$ *ml. Eine Stichprobe im Umfang* $n = 50$ *ergab* $\bar{x} = 999$ *ml. Konstruieren Sie ein Konfidenzintervall für den Mittelwert* μ *für* $\alpha = 0.05$*. Wie gross ist der erforderliche Stichprobenumfang* n *um* $L \leq 2$ *ml zu erzwingen.*

Lösung:

Konfidenzschätzung des Erwartungswertes μ einer Normalverteilung falls σ^2 unbekannt

- Gegeben: Stichprobe $\mathbf{X}$ der $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen X
- Punktschätzer für μ: $\overline{X} \;=\; \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$

  Punktschätzer für σ^2: $S_X^2 \;=\; \dfrac{1}{n-1} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$
- Konstruktion eines bzgl. $\overline{X}$ symmetrischen Konfidenzintervalls:
  - Da $\overline{X}$ und S_X^2 unabhängig sind, gilt: $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_X}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$ ist t-verteilt.
  - Es folgt: $P\left(\left|\dfrac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S_X}\right| \leq t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right) \;=\; 1-\alpha$
  - Auflösen: $[I_u(\mathbf{X}), I_o(\mathbf{X})] = \left[\overline{X} - t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \dfrac{S_X}{\sqrt{n}},\; \overline{X} + t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \dfrac{S_X}{\sqrt{n}}\right]$

Eine Lady behauptet, dass sie am Geschmack erkennen kann, ob zuerst die Milch oder zuerst der Tee in die Tasse gegossen wurde. Wir wollen versuchen, diese Behauptung zu überprüfen.

Der Lady wird an n Tagen jeweils die Aufgabe gestellt, zwei Tassen, von denen eine vom Typ 1 und die andere vom Typ 2 ist, korrekt zu klassifizieren. Sei X die Zahl der Tage, an denen sie richtig klassifiziert.
Modell: $X \sim B(n; p)$.
Nullhypothese H_0: $p = 1/2$
Alternative H_1: $p > 1/2$

- Nullhypothese wird verworfen, wenn die Lady **genügend** oft Erfolg hat, also wenn $X \in K := \{x, x+1, \ldots, n\}$
- Falls sie weniger als x Tassen richtig klassifiziert, glauben wir weiterhin an die Nullhypothese.
- Bei der Bestimmung von x orientieren wir uns an der Irrtumswahrscheinlichkeit α.

$$
\begin{aligned}
P(\ H_0 \text{ verwerfen} \mid H_0 \text{ richtig}\ ) &= P(X \in K \mid p = 1/2\ ) \\
&= P(\ X \in \{x, x+1, \ldots, n\} \mid p = 1/2\ ) \\
&= \sum_{k=x}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sum_{k=x}^{n} \binom{n}{k} \ \leq\ \alpha
\end{aligned}
$$

Oder äquivalent dazu: Finde die kleinste natürliche Zahl x, so dass

$$
\sum_{k=x}^{n} \binom{n}{k} \ \leq\ 2^n \cdot \alpha
$$

Example

$$\text{Falls } n = 5 \text{ und } \alpha = 0.05: \quad \binom{5}{x} + \binom{5}{x+1} + \cdots + \binom{5}{5} \quad \leq \quad 1.6.$$

$$\underbrace{\binom{5}{0} + \underbrace{\binom{5}{1} + \underbrace{\binom{5}{2} + \underbrace{\binom{5}{3} + \underbrace{\binom{5}{4} + \underbrace{\binom{5}{5}}_{=1}}_{=6}}_{=16}}_{26}}_{31}}_{32}$$

also $x = 5$!! um die Schranke $\alpha = 0.05$ einzuhalten.

X Zufallsvariable mit den möglichen Verteilungen

$$\text{Hypothesenraum:} \quad \Omega = \left\{ P_\theta \ = \ P_\theta(X = x) \ : \ \theta \in \Theta \right\}$$

Bei einem (parametrischen) Testproblem wird der Hypothesenraum in zwei Teilmengen aufgeteilt:

- die zu testende Nullhypothese $H_0 = \{\theta | \theta \in \Theta_0\}$ und
- die Alternative $H_1 = \{\theta | \theta \in \Theta_1\}$ entscheiden soll.

Dabei gilt stets: $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ und bei Signifikanztests (die wir im weiteren ausschliesslich behandeln werden) auch $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$.

Die typischen Situationen dabei sind:

	H_0	H_1	
1.	$H_0 : \theta = \theta_0$	$H_1 : \theta = \theta_1$, $\theta_0 \neq \theta_1$	einfache Hypothese
2.	$H_0 : \theta = \theta_0$	$H_1 : \theta \neq \theta_0$	zweiseitigen Fragestellung
3.	$H_0 : \theta \leq \theta_0$	$H_1 : \theta > \theta_0$	einseitige Fragestellung
4.	$H_0 : \theta \geq \theta_0$	$H_1 : \theta < \theta_0$	einseitige Fragestellung

Eine Funktion $T(\mathbf{X}) = T(X_1, \ldots, X_n)$ der Stichprobenvariablen $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ heisst Testgrösse. Für die konkrete Stichprobe $(x_1, \ldots, x_n)$ ergibt sich $t = T(x_1, \ldots, x_n)$ als Realisierung der Testgösse.

Der Wertebereich der Zufallsgrösse $T(\mathbf{X})$ wird in folgende zwei Teile zerlegt:

- kritischer Bereich oder Ablehnbereich K
- Annahmebereich $\overline{K}$.

Aufgrund der Realisierung $(x_1, \ldots, x_n)$ wird dann folgende Testentscheidung getroffen:

- H_0 ablehnen, falls $t = T(x_1, \ldots, x_n) \in K$
- H_0 beibehalten, falls $t = T(x_1, \ldots, x_n) \in \overline{K}$

Innerhalb des gewählten Modells gibt es nun vier Möglichkeiten, wie die Realität und die Testentscheidung zusammentreffen können.

		Realität	
		H_0 ist richtig	H_0 ist falsch
Testent-scheidung	H_0 beibehalten	ok	Fehler 2. Art, β-Fehler
	H_0 verwerfen	Fehler 1. Art, α-Fehler	ok

Bei der Testkonstruktion gibt man die Wahrscheinlichkeit α eines Fehlers 1. Art vor. Diese Schranke bezeichnet man als <u>Signifikanzniveau</u> und der Test heisst <u>Signifikanztest zum Niveau α</u>.

Der kritische Bereich K wird dann so konstruiert, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art nicht grösser als α wird:

$$\boxed{P(\underbrace{H_0 \text{ verwerfen }}_{T(\mathbf{X})\in K}|H_0 \text{ richtig }) \;\leq\; \alpha}$$

Dabei sollte aber die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art $P(H_0 \text{ beibehalten } |H_0 \text{ falsch })$ nicht zu gross werden. Hierin liegt eine **unsymmetrische Behandlung** der beiden Risiken. Das Risiko einen Fehler 1. Art zu machen wird stärker gescheut.

Allgemeines Vorgehen:

1. Verteilungsannahme über die Zufallsvariable X (bzw. über deren Verteilungsfunktion F) machen
2. Formulieren der Nullhypothese und der Alternative.
3. Vorgabe der Irrtumswahrscheinlichkeit α
4. Konstruktion einer geeigneten Testgrösse $T(\mathbf{X}) = T(X_1, \ldots, X_n)$ als Funktion der Stichprobenvariablen $\mathbf{X}$, deren Verteilung unter der Nullhypothese vollständig bekannt sein muss.
5. Wahl eines kritischen Bereichs K aus dem möglichen Wertebereich von $T(\mathbf{X})$, so dass $P(T(\mathbf{X}) \in K | H_0 \text{ richtig }) \leq \alpha$ gilt.
6. Bestimmung der Realisierung $t = T(x_1, \ldots, x_n)$ der Testgrösse $T(\mathbf{X})$ anhand einer konkreten Stichprobe.
7. Entscheidungsregel: Liegt t in K, so wird die Nullhypothese abgelehnt, sonst beibehalten.