

Grenzwertsätze

Dr. Thomas Zehrt

Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

Statistik II FS 2010

Outline

- 1 Stochastische Konvergenz
- 2 Die Ungleichung von Tschebyschev
- 3 Das Gesetz der grossen Zahlen
- 4 Der Satz von Bernoulli
- 5 Der zentrale Grenzwertsatz
 - Der zentrale Grenzwertsatz: Herleitung
 - Der zentrale Grenzwertsatz: Beispiel
 - Zusammenfassung und Ausblick
- 6 Approximationen
 - Grenzwertsatz von de Moivre und Laplace
 - Poissonscher Grenzwertsatz

Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, die zugehörigen Verteilungsfunktionen seien mit $F_i = F_i(t)$ bezeichnet.

Definition

Eine Folge $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen konvergiert stochastisch gegen die reelle Zahl a , wenn für beliebige $c > 0$ die folgende Beziehung gilt:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P(|X_i - a| \geq c) = 0.$$

Äquivalent dazu:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P(|X_i - a| < c) = 1$$

Bemerkung: Das ist **keine** Konvergenz im klassischen Sinne und es bedeutet auch nicht, dass X_i gegen a konvergiert.

Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P(|X_i - a| \geq c) = 0.$$

Das bedeutet für **jedes** $c > 0$:

①

$$0 = \lim_{i \rightarrow \infty} P(X_i - a \leq -c) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(X_i \leq a - c) = \lim_{i \rightarrow \infty} F_i(a - c)$$

②

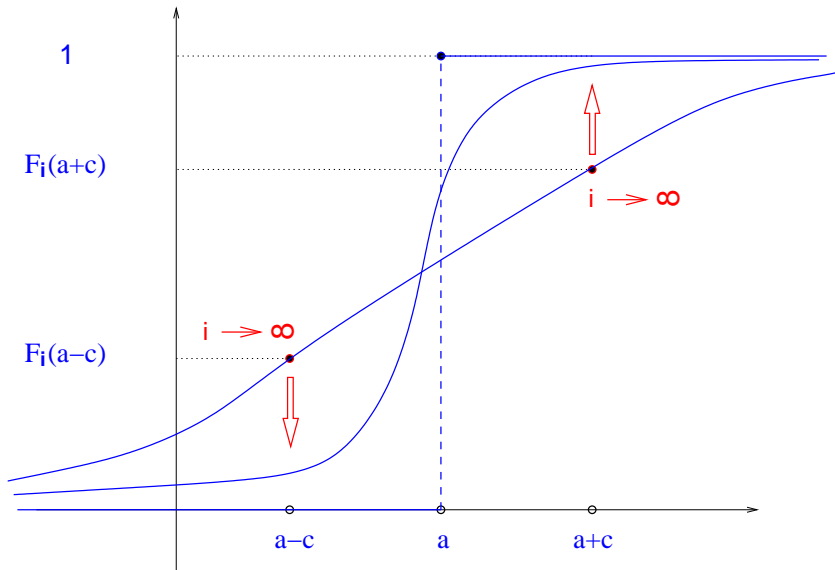
$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{i \rightarrow \infty} P(X_i - a \geq c) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} (1 - P(X_i < a + c)) \\ &= 1 - \left(\lim_{i \rightarrow \infty} F_i(a + c) - \underbrace{\lim_{i \rightarrow \infty} P(X_i = a + c)}_{=0} \right) \end{aligned}$$

Für alle $c > 0$ gilt somit:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} F_i(a - c) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} F_i(a + c) = 1$$

Theorem

Eine Folge von Zufallsvariablen konvergiert genau dann stochastisch gegen a , wenn die Folge $(F_i(t))_{i \in \mathbb{N}}$ ihrer Verteilungsfunktionen (in jeder Stetigkeitsstelle) gegen die Verteilungsfunktion einer Einpunktverteilung konvergiert.



Aufgabe

Sei a eine beliebige reelle Zahl und $c > 0$. Kennzeichnen Sie die folgenden beiden Teilmengen der reellen Zahlen auf dem Zahlenstrahl.

- $\{ x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < c \}$
- $\{ x \in \mathbb{R} \mid |x - a| \geq c \}$

Lösung:

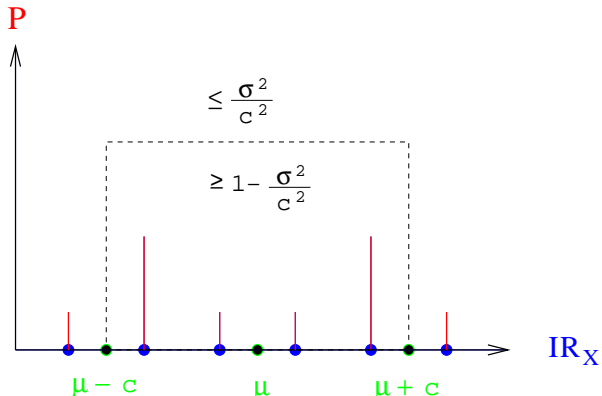
Theorem (Die Ungleichung von Tschebyshev)

Sei X eine beliebige Zufallsvariable mit $\mu = E(X)$ und $\sigma^2 = \text{Var}(X)$.
Dann gelten für jede positive Zahl c die folgenden beiden
(äquivalenten) Ungleichungen:

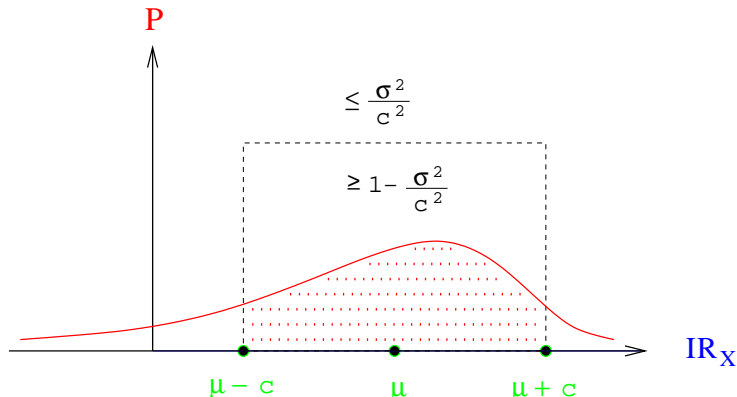
$$P(|X - \mu| < c) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{c^2} \quad \text{oder} \quad P(|X - \mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$$

d.h. man kann relativ leicht die Wahrscheinlichkeit abschätzen, mit der
 X einen Wert innerherhalb (oder ausserhalb) des Intervalls
 $[\mu - c, \mu + c]$ annimmt.

Die Ungleichung von Tschebyschev für diskrete Zufallsvariablen



Die Ungleichung von Tschebyschev für stetige Zufallsvariablen



Aufgabe

Von einer Zufallsvariablen X sei nur bekannt, dass sie den Erwartungswert 15 und die Varianz 4 besitzt. Wie gross ist $P(10 < X < 20)$ mindestens?

Lösung:

$k\sigma$ - Bereiche

Was liefert uns die Ungleichung von Tschebyschev für spezielle Wahlen der Konstanten c ? Dabei wollen wir uns die Fälle $c = k \cdot \sigma$ für $k = 1, 2$ und 3 genauer anschauen. Mit den üblichen Abkürzungen $\mu = E(X)$ und $\sigma^2 = Var(X)$ folgt aus der ersten Ungleichung von Tschebyschev zunächst:

$$P(|X - \mu| < k \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2 \cdot \sigma^2} = 1 - \frac{1}{k^2}$$

Daraus lassen sich die ersten drei $k\sigma$ -Regeln ableiten:

① $k = 1$, die 1 · σ -Regel

$$P(|X - \mu| < \sigma) \geq 1 - 1 = 0$$

② $k = 2$, die 2 · σ -Regel

$$P(|X - \mu| < 2 \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

③ $k = 3$, die 3 · σ -Regel

$$P(|X - \mu| < 3 \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit $E(X_i) = \mu$ und $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$.

Für das arithmetische Mittel

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

von den ersten n dieser Zufallsvariablen gilt

$$E(\bar{X}_n) = \mu \quad \text{und} \quad \text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Mit der Tschebyschevungleichung folgt

$$1 \geq P(|\bar{X}_n - \mu| < c) \geq 1 - \frac{\text{Var}(\bar{X}_n)}{c^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{n \cdot c^2}$$

Für festes $c \geq 0$ strebt die rechte Seite für $n \rightarrow \infty$ gegen 1.

Theorem (Gesetz der grossen Zahlen)

Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit $E(X_i) = \mu$ und $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$. Für das arithmetische Mittel $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ von den ersten n dieser Zufallsvariablen gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| < c) = 1$$

d.h. die Folge $(\bar{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert stochastisch gegen μ .

Ist n nur gross genug, so unterscheiden sich \bar{X}_n und μ mit hoher Wahrscheinlichkeit nur um einen (kleinen) Wert $< c$.

Die historischen Lottozahlen der letzten 25 Jahre (1302 Ausspielungen) aus Deutschland (7 aus 49) zeigen das Gesetz der grossen Zahlen sehr anschaulich.

1 187	2 194	3 194	4 178	5 176	6 187	7 175
8 197	9 201	10 173	11 175	12 180	13 157	14 181
15 172	16 180	17 190	18 183	19 191	20 181	21 200
22 191	23 186	24 177	25 196	26 200	27 180	28 167
29 186	30 182	31 199	32 211	33 189	34 175	35 183
36 199	37 175	38 199	39 199	40 195	41 183	42 182
43 189	44 181	45 188	46 191	47 175	48 195	49 207

Jeden Samstag wurden sieben Kugeln (einschliesslich Zusatzzahl) gezogen, es liegt somit ein sehr grosser Stichprobenumfang von $n = 7 \cdot 1302 = 9114$ vor. Das arithmetische Mittel der gezogenen Lottozahlen beträgt

$$\bar{X}_{9114} = \frac{1}{9114}(1 \cdot 187 + 2 \cdot 194 + \dots + 49 \cdot 207) = 25.2211$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist sicher die Gleichverteilung mit Erwartungswert und Varianz

$$\mu = \sum_{i=1}^{49} i \cdot \frac{1}{49} = \frac{50}{2} = 25 \quad \sigma^2 = \sqrt{(49^2 - 1)/12} = 14.1421$$

Also gilt

$$|\bar{X}_{9114} - \mu| = |25.2211 - 25| = 0.2211$$

$$P(|\bar{X}_{9114} - 25| < 0.222) \geq 1 - \frac{\text{Var}(\bar{X}_n)}{c^2} = 1 - \frac{14.1421^2}{9114 \cdot 0.222^2} = 0.5521$$

Sei jedes X_i Null-Eins-verteilt, d.h.

$$X_i = \begin{cases} 1 & (\text{Ereignis } A) \\ 0 & (\text{Ereignis } \bar{A}) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{mit } P(X_i = 1) = p \\ \text{mit } P(X_i = 0) = 1 - p \end{array}$$

Dann folgt

$$E(X_i) = p = \mu \quad \text{und} \quad \text{Var}(X_i) = p(1 - p) = \sigma^2$$

Die Zufallsvariable

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

stellt hier die relative Häufigkeit des Ereignisses A bei n unabhängigen Wiederholungen dar.

Mit der Tschebyschevungleichung folgt wieder

$$P(|\bar{X}_n - p| < c) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n \cdot c^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - p| < c) = 1$$

Theorem (Satz von Bernoulli)

Die relative Häufigkeit eines zufälligen Ereignisses A in n unabhängigen Wiederholungen konvergiert stochastisch gegen die Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses A .

Anwendung: Schätzen von p durch die relative Häufigkeit \bar{X}_n

gegeben: $c > 0$ und Irrtumswahrscheinlichkeit $1 - \alpha$

gesucht: Wie gross muss n gewählt werden, so dass

$$P(|\bar{X}_n - p| < c) \geq 1 - \alpha$$

Lösung:

$$P(|\bar{X}_n - p| < c) \geq \underbrace{1 - \frac{p(1-p)}{n \cdot c^2}}_{\text{Auflösen nach } n} \geq 1 - \alpha$$

$$n \geq \frac{p(1-p)}{\alpha \cdot c^2}$$

Aufgabe

Eine faire Münze soll n -mal geworfen werden, so dass die relative Häufigkeit für das Ereignis „Kopf„ mit 98%-iger Wahrscheinlichkeit im Intervall $(0.4, 0.6)$ liegt. Wie gross muss n mindestens sein?

Lösung:

Der zentrale Grenzwertsatz gibt einen Grund für die herausragende Rolle der Normalverteilung, denn er charakterisiert diese als Grenzverteilung von (additiven) Überlagerungen von vielen unabhängigen zufälligen Einzeleffekten.

Sei X_1, X_2, \dots eine (unendliche) Folge von identisch verteilten und unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mu = E(X_i)$ und $\sigma^2 = \text{Var}(X_i)$. Wir betrachten:

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Für den Erwartungswert und die Varianz von S_n folgt:

$$E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n \cdot \mu$$

$$\text{Var}(S_n) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = n \cdot \sigma^2$$

Diese Zufallsvariablen werden nun standardisiert:

$$Y_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} = \frac{S_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}}.$$

Y_n heisst auch die standardisierte Summe der X_1, X_2, \dots, X_n .

Satz (Zentraler Grenzwertsatz)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n \leq y) = \Phi(y)$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

Ist eine zufällige Erscheinung additiv aus unabhängigen zufälligen Ereignissen zusammengesetzt, so können Wahrscheinlichkeiten **näherungsweise** mit der Funktion Φ bestimmt werden.

Experiment: n -maliger Münzwurf

Dann gilt $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{K, Z\}\}$ mit der Gleichverteilung.

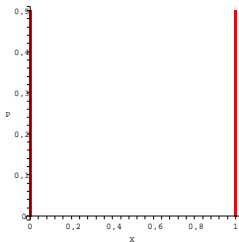
Sei

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{beim } i\text{-ten Wurf Kopf} \\ 1 & \text{beim } i\text{-ten Wurf Zahl} \end{cases}$$

Alle diese Zufallsvariablen sind unabhängig und gleichverteilt; es gilt

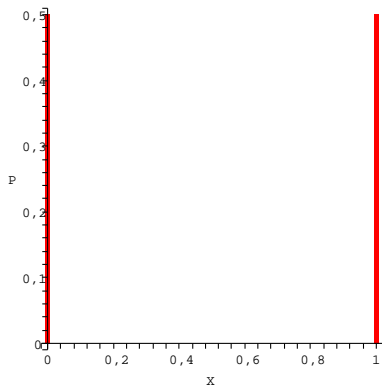
$$E(X_i) = \frac{1}{2} \text{ und } \text{Var}(X_i) = \frac{1}{4}.$$

Jedes X_i hat die Verteilung $\{(0, \frac{1}{2}), (1, \frac{1}{2})\}$.



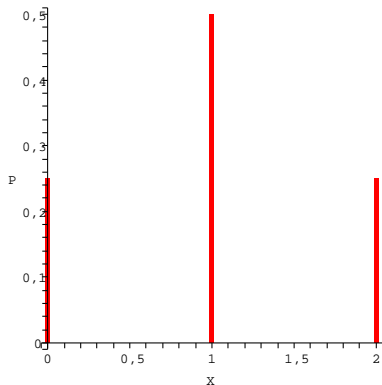
Nun addieren wir die Zufallsvariablen:

$$S_1 = X_1 \text{ Verteilung: } \left\{ \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{1}{2}\right) \right\}$$



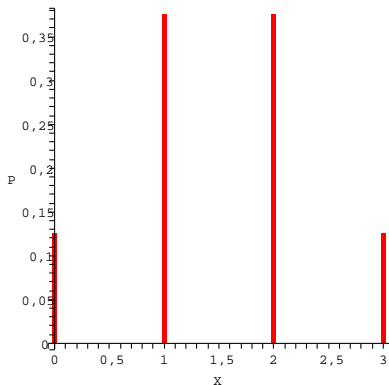
Beispiel Nun addieren wir die Zufallsvariablen:

$S_2 = X_1 + X_2$, Verteilung: $\left\{ \left(0, \frac{1}{4}\right), \left(1, \frac{2}{4}\right), \left(2, \frac{1}{4}\right) \right\}$



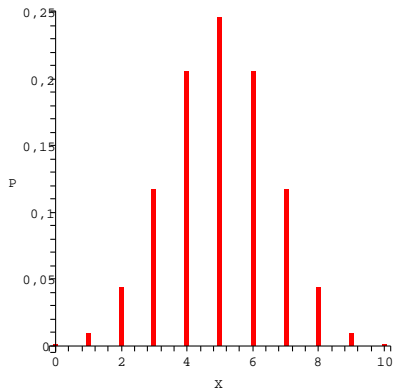
Nun addieren wir die Zufallsvariablen:

$$S_3 = X_1 + X_2 + X_3, \text{ Verteilung: } \left\{ \left(0, \frac{1}{8}\right), \left(1, \frac{3}{8}\right), \left(2, \frac{3}{8}\right), \left(3, \frac{1}{8}\right) \right\}$$



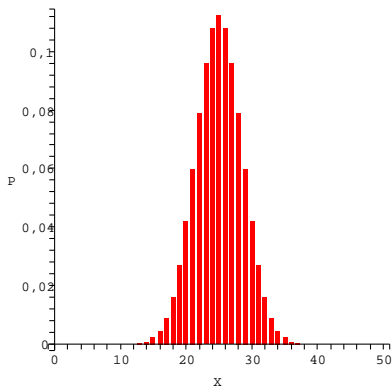
Nun addieren wir die Zufallsvariablen:

$$S_{10} = X_1 + \dots + X_{10}, \text{ Verteilung: } \left\{ \left(0, \frac{1}{2^{10}}\right), \left(1, \frac{10}{2^{10}}\right), \dots, \left(10, \frac{1}{2^{10}}\right) \right\}$$



Nun addieren wir die Zufallsvariablen:

$$S_{50} = X_1 + \dots + X_{50}, \text{ Verteilung:}$$



Lemma

Die Verteilung für $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ist gegeben durch

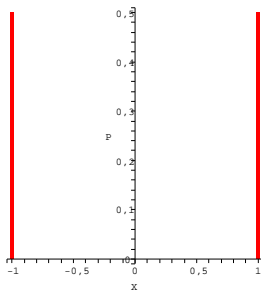
$$\left\{ \left(0, \frac{1}{2^n}\right), \left(1, \frac{n}{2^n}\right), \dots, \left(k, \frac{\binom{n}{k}}{2^n}\right), \dots, \left(n, \frac{1}{2^n}\right) \right\}$$

Beweis:

Nun betrachten wir die zugehörigen normalisierten Zufallsvariablen:

$$Y_n = \frac{S_n - n\frac{1}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{n} \cdot \frac{1}{2}}$$

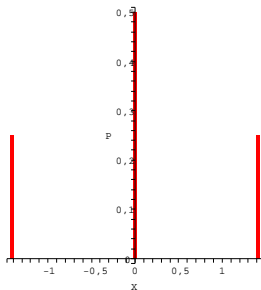
Y_1 , Verteilung: $\left\{ \left(-1, \frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{1}{2}\right) \right\}$



Nun betrachten wir die zugehörigen normalisierten Zufallsvariablen:

$$Y_n = \frac{S_n - n\frac{1}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{n} \cdot \frac{1}{2}}$$

Y_2 , Verteilung: $\left\{ \left(-\sqrt{2}, \frac{1}{4} \right), \left(0, \frac{2}{4} \right), \left(\sqrt{2}, \frac{1}{4} \right) \right\}$

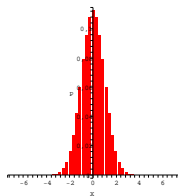
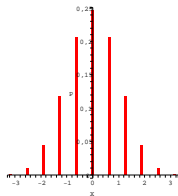
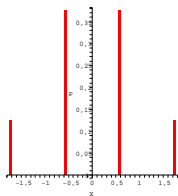
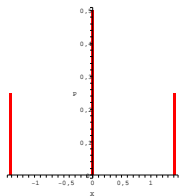


Lemma

Die Verteilung der Zufallsvariablen $Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{n} \cdot \frac{1}{2}}$ ist gegeben durch

$$\left\{ \left(\frac{0 - \frac{n}{2}}{\sqrt{n} \cdot \frac{1}{2}}, \frac{1}{2^n} \right), \dots, \left(\frac{k - \frac{n}{2}}{\sqrt{n} \cdot \frac{1}{2}}, \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \right), \dots, \left(\frac{n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n} \cdot \frac{1}{2}}, \frac{1}{2^n} \right) \right\}$$

und für $n \rightarrow \infty$ gilt $Y_n \sim N(0, 1)$



Zusammenfassung:

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n \cdot \mu}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}} = Y_n \sim N(0, 1) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N(\mu, \sigma^2/n) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Random-Walk

Eine Theorie behauptet, dass die Entwicklung von Aktienkursen auf (informationseffizienten) Märkten einem Random-Walk folgt:

$$\underbrace{k_{t+1}}_{\text{Kurs morgen}} = \underbrace{k_t}_{\text{Kurs heute}} + \epsilon_{t+1}$$

wobei die Kursänderungen $\epsilon_{t+1} = k_{t+1} - k_t$ Zufallsvariablen sind mit $E(\epsilon_i) = 0$ und $Var(\epsilon_i) = \sigma^2$.

Monatliche Kursänderung: $\epsilon_{t+1} + \epsilon_{t+2} + \dots + \epsilon_{t+n}$ (z.B. $n = 25$ Handelstage pro Monat)

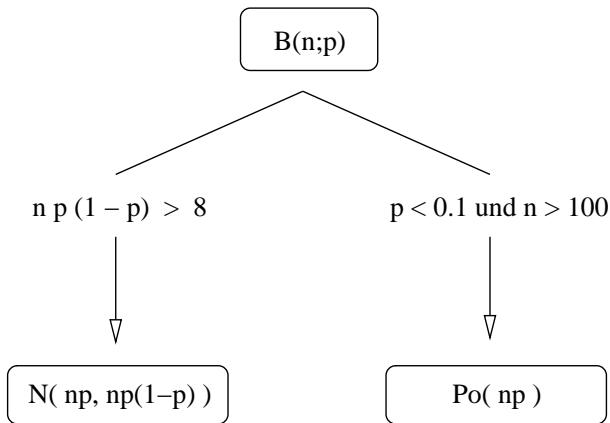
Zentraler Grenzwertsatz: $\sum_{i=1}^{25} \epsilon_{t+i} \sim N(0, 25\sigma^2)$
(die monatliche Kursänderung ist ungefähr normalverteilt mit dem Erwartungswert 0 und der 25-fachen Varianz $25\sigma^2$)

Random-Walk

Schlussfolgerungen aus der Random-Walktheorie

- Jede Kursprognose, die sich auf die vergangene Kursentwicklung stützt (z.B. die Charttechnik) ist unmöglich.
- Einzige akzeptable Prognose: Der Kurs bleibt wie er ist!

In der Praxis muss man häufig Wahrscheinlichkeiten von binomialverteilten Zufallsvariablen für grosse n bestimmen. Das ist sehr aufwändig. Hier helfen Approximationen der Binomialverteilung durch stetige Standardverteilungen.



Sei X binomialverteilt, d.h. $X \sim B(n; p)$ oder

$$P(X = x) = f_{Bi}(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

Die Zufallsvariable X gibt also an, wie oft in der n -fachen unabhängigen Wiederholung eines Einzelerperimentes ein Ereignis E (welches jeweils mit der konstanten Einzelwahrscheinlichkeit p eintritt) eingetreten ist. Daher kann X als Summe

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen X_i dargestellt werden mit:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{beim } i\text{-ten Versuch } E \\ 0 & \text{beim } i\text{-ten Versuch } E^c \end{cases}$$

Auf X kann der zentrale Grenzwertsatz angewendet werden. Wir wissen, dass

- $\mu = np$ (Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariablen) und
- $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ (Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsvariablen)

und es folgt zunächst:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Zusammenfassend kann man den folgenden Satz formulieren.

Satz (Grenzwertsatz von de Moivre und Laplace)

Sei $X \sim B(n; p)$ eine binomialverteilte Zufallsvariable, $\mu = np$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Diese Aussage, zusammen mit einer kleinen Korrektur um 0.5 an den Rändern, gibt uns eine Möglichkeit, Wahrscheinlichkeiten von binomialverteilten Zufallsvariablen angenähert zu bestimmen.

Praktische Approximationsregel

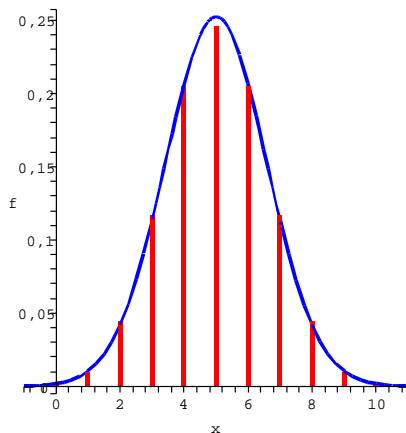
Sei $X \sim B(n; p)$ eine binomialverteilte Zufallsvariable, $\mu = np$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. Dann gilt

$$f_{Bi}(x; n, p) \approx \phi \left(x; np, \sqrt{np(1-p)} \right)$$

$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi \left(\frac{b - \mu + 0.5}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{a - \mu - 0.5}{\sigma} \right)$$

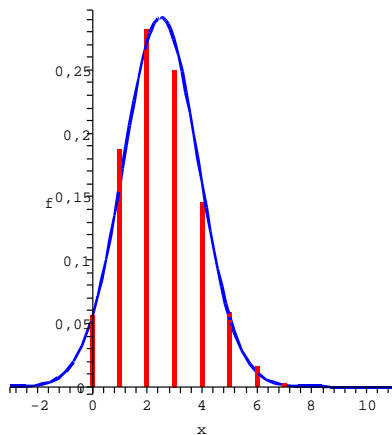
mit hinreichender Genauigkeit, falls $n \cdot p \cdot (1-p) > 9$ gilt.

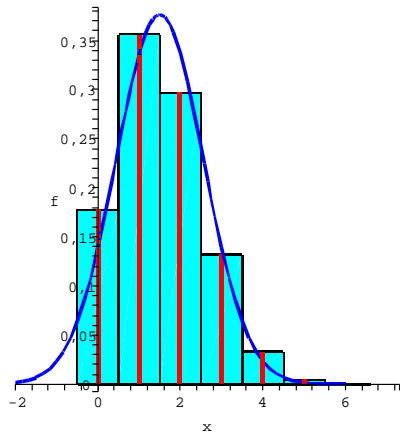
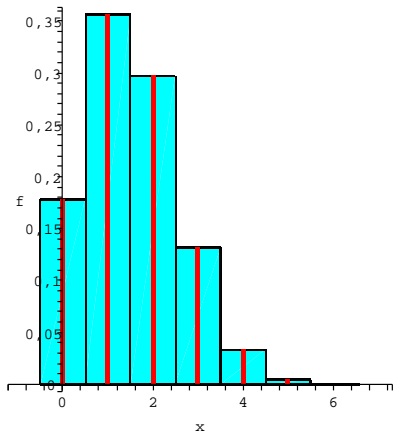
$n = 10$ und $p = 0.5 \rightarrow \mu = n \cdot p = 5$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \approx 1.58$
In der Skizze sehen Sie die Binomialverteilung $f_{Bi}(x; 10, 0.5)$ (als rotes Stabdiagramm) und die (blaue) Glockenkurve $\phi(x; 5, 1.58)$:



$n = 10$ und $p = 0.25 \longrightarrow \mu = n \cdot p = 2.5$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \approx 1.37$

In der Skizze sehen Sie die Binomialverteilung $f_{Bi}(x; 10, 0.25)$ (als rotes Stabdiagramm) und die (blaue) Glockenkurve $\phi(x; 2.5, 1.37)$:





Aufgabe

Bestimmen Sie approximativ die Zahl

$$P = \sum_{k=500}^{600} \binom{1000}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{1000-k} .$$

Lösung:

Satz

Für eine Folge von binomialverteilten Zufallsvariablen $X_n \sim B(n; p)$ wobei $p = p(n)$ mit $n \cdot p(n) = \lambda$ (d.h. zu grossen n gehören kleine p) gilt für alle $k = 0, 1, 2, \dots$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Beweis:

In der Praxis verwendet man diesen Grenzwertsatz zur näherungsweise Berechnung der Einzelwahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung bei grossem n und kleinem p .

Praktische Approximationsregel

Für grosse n und kleine p gilt für $\lambda = n \cdot p$

$$f_{Bi}(x; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Aufgabe

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Brennelement in einem Kernreaktor den Bedingungen einer Qualitätsprüfung nicht genügt, beträgt $p = 0.0002$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 von 5000, genau eins von 1000 bzw. keines von 100 dieser Brennelemente die Qualitätsbedingungen nicht erfüllen? Rechnen Sie exakt und mit Hilfe der Poissonapproximation.

Lösung: