Universität Basel

Ergänzung des Skripts

zur Vorlesung

Statistik II

Dr. Thomas Zehrt

FS 2010

Abteilung für Quantitative Methoden

24. März 2010

Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum

Regeln der Kombinatorik

	ohne Wiederholung	mit Wiederholung
Permutationen	$n!$	$\frac{n!}{n_1!\cdots n_s!}$
Kombination		
ohne Reihenfolge	$\binom{n}{m}$	$\binom{n+m-1}{m}$
mit Reihenfolge	$\binom{n}{m}m!$	n^m

Permutation = Vertauschung von Elementen

ohne Wiederholung: alle Elemente verschieden

z.B. (1 2 3) (1 3 2) (2 1 3) (2 3 1) (3 1 2) (3 2 1)
n! = 3! = 6

mit Wiederholung: gleiche Elemente(-gruppen)
z.B. (1 1 2 2) $\quad 1 \leftrightarrow 1$ nicht unterscheidbar

$$\frac{4!}{2!2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} = 6$$

Kombination = Ziehung einer Teilmenge von m aus n Elementen

- ohne Wiederholung (alle Elemente verschieden)
  - ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
    $(a,b) = (b,a)$
  - mit Berücksichtigung der Reihenfolge
    $(a,b) \neq (b,a)$
- mit Wiederholung (gleiche Elemente möglich)
  - ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
    $(a,a,b) = (a,b,a) = (b,a,a)$
  - mit Berücksichtigung der Reihenfolge
    $(a,a,b) \neq (a,b,a) \neq (b,a,a)$

Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ereignisse

Zufälliges Ereignis A: Menge von Ergebnissen $(\omega_1,\ldots\omega_k)$ $k \leq n$ eines Zufallsexperiments

Elementarereignis: Element ω_i von A

Ereignisraum: Menge aller Elementarereignisse $\Omega = (\omega_1,\ldots\omega_n), A \subseteq \Omega$

Beispiel Würfel: $\Omega = (1,\ldots 6)$, Elementarereignisse $\omega_i = i$, z.B. Menge der ungeraden Zahlen $A = (1,3,5)$

Laplace-Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

Beispiel Würfel: A : gerade Zahl, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) $P(\emptyset) = 0$

(4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

(5) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

Würfel: $A_1 = (2,4,6) \quad A_2 = (3,6) \quad A_3 = (1,3,5)$
$A_1 \cup A_2 = (2,3,4,6) \quad A_1 \cap A_2 = (6)$
$P(A_1 \cup A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Beispiel Würfel:

$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{P(6)}{P(2,4,6)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$

Unabhängigkeit

$$P(B|A) = P(B)$$

Eintreten von A ändert die Wahrscheinlichkeit für B nicht.

Beispiel Zweimaliges Würfeln, beim ersten Wurf erhielt man eine $B_1 = 6$ mit $P(B_1) = \frac{1}{6}$.
Dieser Wurf ändert die Wahrscheinlichkeit für den nächsten Wurf und das Ereignis wieder eine '6' zu erzielen (nennen wir es B_2) nicht: $P(B_2 \mid B_1) = \frac{1}{6}$

Multiplikationssatz

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

Beispiel Würfel: $P(B_1) = P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Aus dem Multiplikationssatz folgt für unabhängige Ereignisse:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Beispiel Würfel: $P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

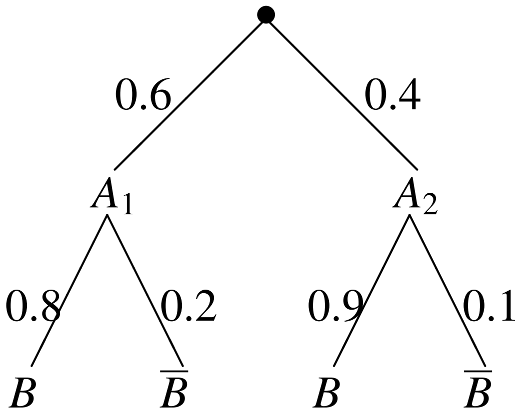
Sei $A_1, \ldots, A_m$ vollständige Zerlegung von Ω und B ein übergreifendes Ereignis:

$$P(B) = \sum P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{m} P(B|A_i)P(A_i)$$

Beispiel: B: Klausur bestanden, A_1: BWL, A_2: VWL, $n = 100$ Studenten, $n_1 = 60$, $n_2 = 40$

$\Longrightarrow P(A_1) = 0.6, P(A_2) = 0.4$
Die Erfolgschancen der beiden Studiengänge seien $P(B|A_1) = 0.8$, $P(B|A_2) = 0.9$, somit ist die gesamte Erfolgschance:
$P(B) = 0.8 \cdot 0.6 + 0.9 \cdot 0.4 = 0.84$

Die Struktur der Lösung wird in einem Baumdiagramm veranschaulicht.



Wahrscheinlichkeiten entlang der einzelnen Äste werden multipliziert und Wahrscheinlichkeiten zwischen Ästen werden addiert.

Der Satz von Bayes

Sei A_i eine vollständige Zerlegung von Ω und $P(B) > 0$, dann gilt

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{P(B)}$$

Beispiel Klausur:

$$P(A_1|B) = \frac{0.8 \cdot 0.6}{0.84} = 0.57$$
$$P(A_2|B) = \frac{0.9 \cdot 0.4}{0.84} = 0.43 = 1 - P(A_1|B)$$