



Universität Basel

Skript

zur Vorlesung

Statistik II

Prof. Dr. H. Toutenburg
Malte Wissmann

FS 2009

Abteilung für Statistik und Ökonometrie

Universität Basel

27. November 2008



Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum

Diskrete und stetige Zufallsvariablen

- X diskret mit Werten x_1, x_2, \dots, x_n mit Wahrscheinlichkeitsfunktion
 $P(X = x_i) = p_i$ ($i = 1, \dots, n$)
Es gilt $\sum_{i=1}^n p_i = 1$
- X stetig, mit Dichtefunktion $f(x) \geq 0$
Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x),$$
$$0 \leq F(x) \leq 1$$

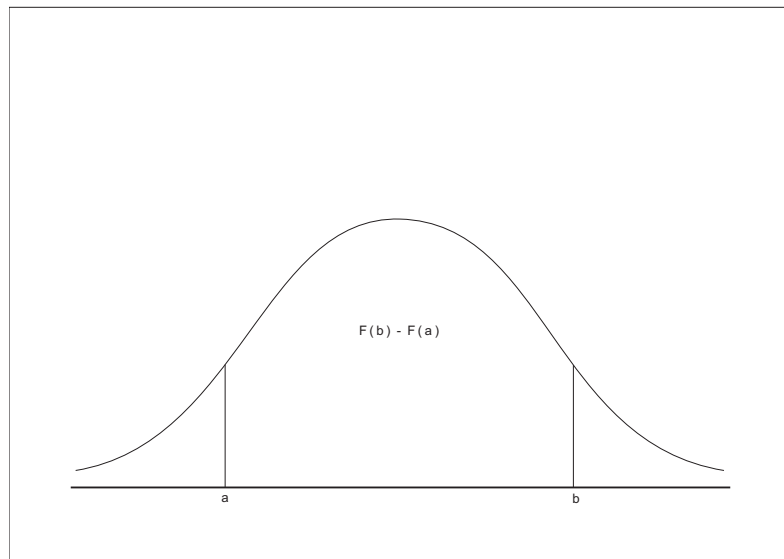
$$F(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^x p_i & X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^x f(u) du & X \text{ stetig} \end{cases}$$

Intervall $[a, b]$

X diskret: $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$

X stetig: $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

X symmetrisch um Null: $P(-a \leq X \leq a) = 2F(a) - 1$



Beispiel Ein Würfel ist eine diskrete Zufallsvariable mit folgender Wahrscheinlichkeitsfunktion:

x_i	p_i	$F(x)$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	1
Σ	1	

Beispiel Eine stetige Zufallsvariable X , die nur Werte zwischen 0 und 1 annimmt, kann z.B folgende Dichtefunktion besitzen:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt $f(x) \geq 0$ für alle $x \in (0, 1)$ und $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 2x dx = x^2|_0^1 = 1$.

Die Verteilungsfunktion erhält man analog durch Integration mit variabler Obergrenze.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Erwartungswert und Varianz

Erwartungswert:

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i p_i & X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & X \text{ stetig} \end{cases}$$

Varianz:

$$\text{Var}(X) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i & X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx & X \text{ stetig} \end{cases}$$

Verschiebungssatz

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Beispiel Für den Würfel erhalten wir

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5 \text{ und}$$

$$\text{Var}(X) = (1-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + (6-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{17.5}{6} = 2.9167.$$

Beispiel Den Erwartungswert der Dichte $f(x) = 2x$

erhält man wie folgt:

$$E(x) = 2 \cdot \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Für die Varianz nutzen wir den Verschiebungssatz und berechnen zuerst $E(x^2) = 2 \cdot \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{2}x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.
Dann erhalten wir $\text{Var}(X) = \frac{1}{2} - \frac{2^2}{3} = \frac{1}{18}$.

Rechenregeln

Seien X, Y Zufallsvariablen und a, b beliebige Konstanten.

$$E(a + bX) = a + bE(X)$$

$$E(a) = a$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$\text{Var}(a) = 0$$

$$\text{Var}(a + bX) = b^2\text{Var}(X)$$

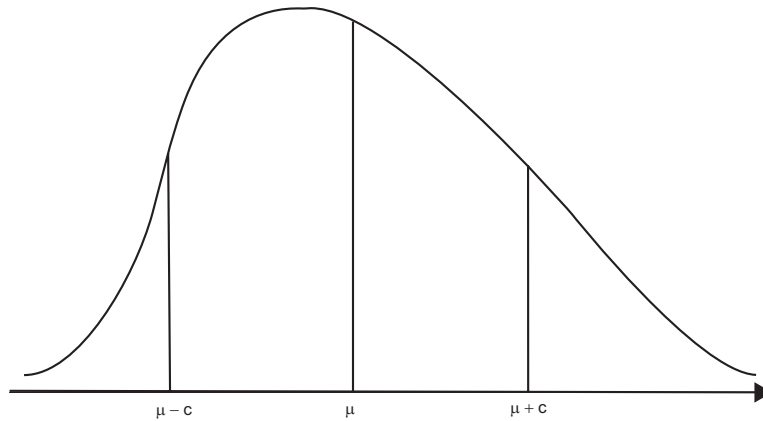
$$\text{Var}(-X) = \text{Var}(X)$$

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \quad \text{falls } X, Y \text{ unabhängig}$$

Ungleichung von Tschebyschev

X eine beliebige Zufallsvariable mit $E(X) = \mu$ und $\text{Var}(X) = \sigma^2$:

- $P(|X - \mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$
- alternativ: $P(|X - \mu| < c) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{c^2}$



Beispiel Körpergröße von Frauen in einem europäischen Land ist eine Zufallsvariable X mit $E(X) = \mu = 172\text{cm}$ und $\text{Var}(X) = \sigma^2 = 6^2$.

Durch die Ungleichung von Tschebychev können nun Wahrscheinlichkeiten ohne weitere Informationen über die Verteilung der Körpergrößen abgeschätzt werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Frau zwischen 160 cm und 184 cm gross ist, beträgt somit mindestens 75%:

$$P(|X - 172| < 12) \geq 1 - \frac{6^2}{12^2} = 0.75.$$

Die Gegenwahrscheinlichkeit, dass die Größe einer zufällig ausgewählte Frau außerhalb des Intervalls liegt, ist dann höchstens

$$P(|X - 172| \geq 12) \leq \frac{6^2}{12^2} = 0.25.$$

Zweidimensionale Zufallsvariablen

X und Y zwei beliebige Zufallsvariablen

Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion und Dichtefunktion

X und Y diskret:

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion

$P(X = x_i, Y = y_j)$ weist jedem Paar (x_i, y_j) eine Wahrscheinlichkeit p_{ij} zu:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} \quad i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$$

X und Y stetig:

Die gemeinsame Dichtefunktion $f_{XY}(x, y)$ weist jedem Paar (x, y) ihre Dichte zu:

$$f_{XY}(x, y) \geq 0 \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}$$

Beispiel Zwei faire Münzen (X und Y) werden gleichzeitig geworfen. Man erhält folgende gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion ($K = \text{Kopf}$, $Z = \text{Zahl}$):

$X \setminus Y$	Z	K
Z	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
K	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Randverteilungen

X und Y diskret:

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^J p_{ij} = p_{i+} \quad i = 1, \dots, I$$
$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^I p_{ij} = p_{+j} \quad j = 1, \dots, J$$

Randdichten

X und Y stetig:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

Unabhängigkeit

Sind X und Y unabhängig, so ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion das Produkt der Randverteilungen bzw. Randdichten.

Beispiel Randverteilungen zu den Münzwürfen sind durch folgende Tabelle gegeben:

X	$P(X = x)$	Y	$P(Y = y)$
Z	$\frac{1}{2}$	Z	$\frac{1}{2}$
K	$\frac{1}{2}$	K	$\frac{1}{2}$

Multiplizieren wir die Randverteilungen, so erhalten wir die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Kovarianz

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y)\end{aligned}$$

diskret

$$E(XY) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_i y_j p_{ij}$$

stetig

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy.$$

X, Y unabhängig $\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$.

Additionssatz für die Varianz

$$\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \pm 2\text{Cov}(X, Y)$$

Korrelationskoeffizient

$$\begin{aligned}\rho(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \\ -1 &\leq \rho(X, Y) \leq +1\end{aligned}$$

X, Y unabhängig $\longrightarrow \rho(X, Y) = 0$

$\rho(X, Y) = 0 \longrightarrow X, Y$ nicht notwendigerweise unabhängig

Spezielle diskrete Verteilungen

Die diskrete Gleichverteilung

Eine Zufallsvariable X , die nur die Werte $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_k = k$ (oder $x_i = i, i = 1, \dots, k$) mit gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen kann heißt diskret gleichverteilt.

$$P(X = i) = p_i = \frac{1}{k}, \quad i = 1, \dots, k$$

mit

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{k+1}{2} \\ \text{Var}(X) &= \frac{1}{12}(k^2 - 1). \end{aligned}$$

Beispiel Würfel mit $x_1 = 1, \dots, x_6 = 6, p_i = \frac{1}{6}$,
 $E(x) = \frac{6+1}{2} = 3.5$ und $\text{Var}(x) = \frac{6^2-1}{12} = 2.9167$.

Die Null-Eins-Verteilung oder Bernoulliverteilung

Ein einmaliges Bernoulliexperiment mit zwei Ausgängen (1=Erfolg und 0 = Misserfolg) hat folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = x) = \begin{cases} p & \text{für } x = 1 \\ 1 - p & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

mit

$$\begin{aligned} E(X) &= p \\ \text{Var}(X) &= p(1 - p). \end{aligned}$$

Beispiel Ein einmaliger Münzwurf mit $x = 1$ (Kopf) oder $x = 0$ (Zahl)

$$E(X) = \frac{1}{2} \text{ und } \text{Var}(X) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Die Binomialverteilung

Zufallsvariable X : Anzahl der Erfolge unter n

Versuchen wird als wiederholtes Bernoulliexperiment aufgefasst. Ist die Wahrscheinlichkeit p konstant (Ziehen mit Zurücklegen) für alle Wiederholungen, dann ist X binomial verteilt; kurz $X \sim B(n; p)$.

Bernoulliexperimente mit konstanter Wahrscheinlichkeit werden unabhängige Bernoulliexperimente genannt. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist dann

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

mit

$$\begin{aligned} E(X) &= np \\ \text{Var}(X) &= np(1 - p). \end{aligned}$$

Beispiel Mehrmaliges (n -maliges) Werfen einer Münze ist binomial verteilt mit n und $p = \frac{1}{2}$. Die

Wahrscheinlichkeitsfunktion vereinfacht sich zu

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2}^n, \text{ mit } E(X) = \frac{n}{2} \text{ und } \text{Var}(X) = \frac{n}{4}.$$

Die geometrische Verteilung

Wiederholtes unabhängiges Bernoulliexperiment.
Anzahl der Versuche bis das erste mal ein Erfolg
beobachtet wird (X hat die Ausprägungen
 $k = 1, 2, \dots$), X ist geometrisch verteilt $X \sim G(p)$.

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} \quad k = 1, 2, \dots$$

mit

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{p} \\ \text{Var}(X) &= \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} - 1 \right). \end{aligned}$$

Beispiel Münzwurf, die Versuche bis das erste Mal
Kopf erscheint sind geometrisch verteilt

$P(X = k) = \frac{1}{2^k}$. Im Mittel werfen wir die Münze
zweimal ($E(X) = \frac{1}{1/2}$) bis zum ersten Mal Kopf.

Die Varianz beträgt $\text{Var}(X) = 2(2 - 1) = 2$.

Die hypergeometrische Verteilung

Zufallsvariable X : Anzahl der Ereignisse vom Typ A unter n Versuchen. Nach jeder Wiederholung ändert sich die Zusammensetzung der Grundgesamtheit (Ziehen ohne Zurücklegen), die Wiederholungen sind nicht mehr unabhängig. X ist hypergeometrisch verteilt ($X \sim H(n, M, N)$), mit M Elementen vom Typ A in der Grundgesamtheit N . Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

mit

$$\begin{aligned} E(X) &= n \frac{M}{N} \\ \text{Var}(X) &= n \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \end{aligned}$$

Beispiel Poker: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man k Asse ($k = 1, \dots, 4$) unter $n = 5$ zufällig gezogenen Karten hat? \Rightarrow Hypergeometrisch verteilt, mit $M = 4$ Asse im Kartenspiel mit $N = 52$ Karten

$$P(X = k) = \frac{\binom{4}{k} \binom{48}{5-k}}{\binom{52}{5}}. \text{ Im Mittel sind}$$

$E(X) = 5 \frac{4}{52} = 0.385$ Asse auf der Hand. Die Varianz beträgt $\text{Var}(X) = 5 \frac{4}{52} (1 - \frac{4}{52}) (\frac{47}{51}) = 0.321$.

Die Poissonverteilung

Zufallsvariable X : Anzahl der Ereignisse in einem festen Intervall der Länge t (hier nur $t = 1$) ist Poissonverteilt ($X \sim Po(\lambda)$). Der Parameter $\lambda > 0$ gibt Aufschluss über die Intensität mit der Ereignisse in dem Intervall vorkommen.

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} \exp(-\lambda) \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$$

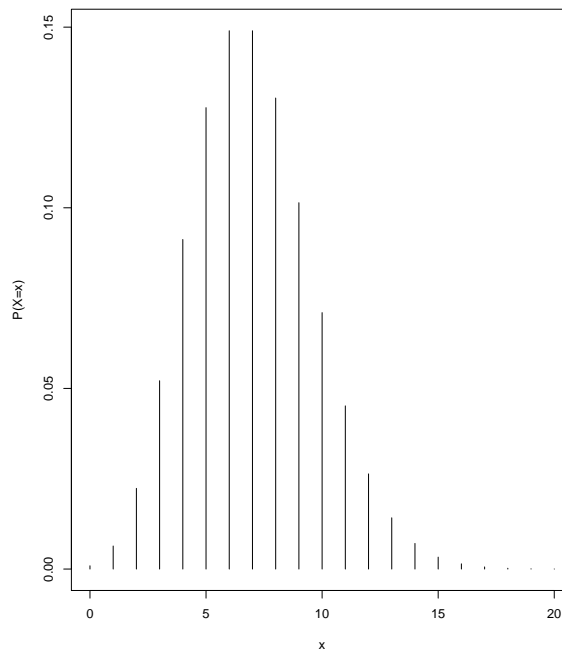
mit

$$E(X) = \text{Var}(X) = \lambda.$$

Beispiel Kundenankunft in einem Modegeschäft im Zeitraum von 15:00 bis 16:00 Uhr. Erfahrungswert: Intensität von 7 Kunden in dem Zeitraum.

Wahrscheinlichkeit, dass z.B. 9 Kunden den Laden betreten, beträgt $P(X = 9) = \frac{7^9}{9!} \exp(-7) = 0.1014$.

Die folgende Grafik stellt die Wahrscheinlichkeitsfunktion dar.



Die Multinomialverteilung

Eine Verallgemeinerung der Binomialverteilung für $n > 2$ Ereignisse ist die Multinomialverteilung.

$$P(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \cdot p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$$

mit

$$\begin{aligned} E(X) &= (np_1, \dots, np_n) \\ \text{Cov}(X_i, X_j) &= \begin{cases} np_i(1 - p_i) & \text{für } i = j \\ -np_i p_j & \text{für } i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

Spezielle stetige Verteilungen

Die stetige Gleichverteilung

X stetig und hat $X \in (a, b)$ eine konstante Dichte
 $\Rightarrow X$ stetig gleich verteilt $X \sim U(a, b)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \quad (a < b) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Erwartungswert und Varianz:

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{a+b}{2} \\ \text{Var}(X) &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

Beispiel

- X : Wartezeit auf S-Bahn mit 10-Minutentakt
 $\rightarrow (a, b) = (0, 10)$
- X : Eintreffen eines zerstreuten Studenten in einer
45-Minuten-Vorlesung $\rightarrow (a, b) = (0, 45)$

Die Normalverteilung

Normalverteilte Zufallsvariable mit Parametern μ und σ^2 ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$) und Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Die Parameter sind

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu \\ \text{Var}(X) &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Standardisierung einer $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariablen

Ist $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dann ist $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Beispiel Körpergröße von Frauen in einem europäischen Land sei normalverteilt mit $\mu = 172$ cm und $\sigma^2 = 6^2$.
 $\Rightarrow Z = \frac{X-172}{6}$ standardnormalverteilt mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$

Additionssatz

Seien X_1, \dots, X_n i.i.d. $\sim N(\mu, \sigma^2)$, dann ist die Summe $\sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$.

Der Mittelwert der Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n ist $\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Rechenregeln für normalverteilte Zufallsvariablen

$\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$ Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Wahrscheinlichkeiten für jede Normalverteilung $F(x)$ durch Standardisierung berechnen.

a, b beliebige Zahlen, $z_a = \frac{a-\mu}{\sigma}$, $z_b = \frac{b-\mu}{\sigma}$ ihre Standardisierungen und z ein beliebiges Quantil der Standardnormalverteilung.

$$P(X \leq b) = F(b) = \Phi(z_b)$$

$$P(X > b) = 1 - \Phi(z_b)$$

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi(z_b) - \Phi(z_a)$$

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

$$\Phi(0) = 0.5$$

$$P(-z \leq X \leq z) = 2\Phi(z) - 1$$

Wichtige Quantile der Standardnormalverteilung sind:

$$z_{1-0.05} = z_{0.95} = 1.64, z_{0.05} = -z_{0.95} = -1.64$$

$$z_{1-\frac{0.05}{2}} = z_{0.975} = 1.96, z_{0.025} = -1.96$$

Ein beliebiges Quantil x_p einer Normalverteilung:

$$x_p = \mu + \sigma \cdot z_p$$

Beispiel Körpergrößen Frauen

Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Frau zwischen 160 cm und 184 cm gross ist, beträgt

$$P(160 \leq X \leq 184) = \Phi\left(\frac{184-172}{6}\right) - \Phi\left(\frac{160-172}{6}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0.97725 - 1 = 0.9545.$$

Etwas über 95% der Frauen zwischen 160 cm und 184 cm gross.

95% der Frauen sind höchstens

$$x_{0.95} = 172 + 6 \cdot 1.64 = 181.84 \text{ cm gross.}$$

Die χ^2 -Verteilung

Seien Z_1, \dots, Z_n i.i.d. $\sim N(0, 1)$. Dann ist
$$\sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi_n^2.$$

Anwendung: Seien X_1, \dots, X_n i.i.d. $\sim N(\mu, \sigma^2)$, so ist die Stichprobenvarianz

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

wie folgt verteilt:

$$S_X^2 \sim \frac{\sigma^2}{n-1} \chi_{n-1}^2$$

Die t -Verteilung

Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim N(0, 1)$ und $Y \sim \chi_n^2$, dann ist der Quotient

$$\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t_n.$$

Anwendung: Sind X_1, \dots, X_n i.i.d. $\sim N(\mu, \sigma^2)$, dann ist

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S_X} \sqrt{n} \sim t_{n-1}.$$

Die F -Verteilung

X und Y unabhängig mit $X \sim \chi_m^2$ und $Y \sim \chi_n^2$, der Quotient ist dann

$$\frac{X/m}{Y/n} \sim F_{m,n}.$$

Anwendung: Insbesondere ist $t_n^2 \sim F_{1,n}$ und somit $\sqrt{F_{1,n}} \sim t_n$.

Seien X_1, \dots, X_n i.i.d. $\sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$,
 Y_1, \dots, Y_m i.i.d. $\sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ und die einzelnen X_i und Y_j untereinander unabhängig, dann ist

$$\frac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F_{n-1, m-1}.$$

Approximation: Binomial \rightarrow Normal

Für grosses n ist es aufwendig Wahrscheinlichkeiten mit der Binomialverteilung zu berechnen. Dann approximiert man, falls $np(1-p) \geq 9$, die Binomialverteilung durch eine Normalverteilung $B(n; p) \rightarrow N(np, np(1-p))$.

Für die Zufallsvariable $\hat{p} = \frac{\sum X_i}{n}$ folgt dann $\hat{p} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$.

Beispiel Anzahl Kopf unter $n = 100$ Münzwürfen, so können einzelnen Wahrscheinlichkeiten anstatt mit einer Binomialverteilung auch mit einer Normalverteilung berechnet werden. Da $np(1-p) = 25 \geq 9$ ist, ist diese Approximation zulässig.

Z.B. Wahrscheinlichkeit höchstens 45 mal Kopf zu bekommen

$$P(X \leq 45) = \Phi\left(\frac{45-50}{5}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587.$$

Berechnung ist wesentlich einfacher als die Berechnung des Ausdrucks

$$P(X \leq 45) = \sum_{k=0}^{45} \binom{100}{k} \frac{1}{2}^{100}.$$

Stichprobenfunktionen

Funktionen von Zufallsvariablen sind ebenfalls Zufallsvariablen!

Das arithmetische Mittel einer Zufallsstichprobe ist eine Zufallsvariable mit folgenden Eigenschaften:

Seien X_i ($i = 1, \dots, n$) identisch unabhängig verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 , dann hat die Stichprobenfunktion

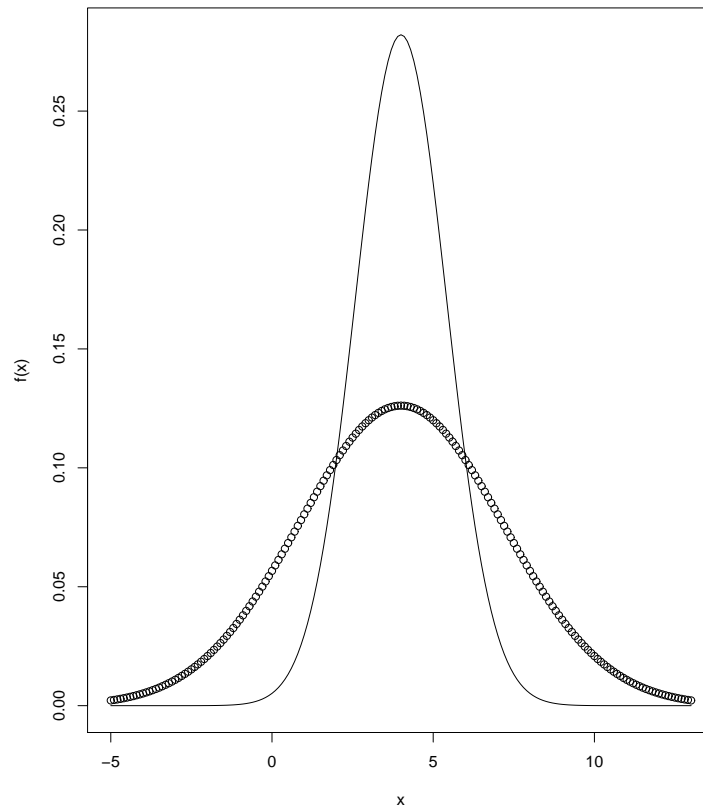
$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

den Erwartungswert μ und die Varianz $\frac{\sigma^2}{n}$:

$$\bar{X} \sim \left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Beispiel Es werden $n = 5$ Beobachtungen aus einer Grundgesamtheit mit $\mu = 4$ und $\sigma^2 = 10$ gezogen. Dann hat der Mittelwert ebenfalls den Erwartungswert 4. Die Varianz ist aber nur 2 und somit wesentlich kleiner. Ist die Grundgesamtheit z.B. normalverteilt so erhält man folgende Dichtefunktion für die Grundgesamtheit (gepunktete Linie) und für den Mittelwert (durchgezogene Linie).

$$X \sim N(4, 10) \rightarrow \bar{X} \sim N(4, 2).$$



Intervallschätzungen

Konfidenzintervall für μ ($\sigma^2 = \sigma_0^2$ bekannt)

$$[I_u(\mathbf{X}), I_o(\mathbf{X})] = \left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right].$$
$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$: $1 - \frac{\alpha}{2}$ Quantil der Standardnormalverteilung,
 $\alpha = 0.05 \rightarrow z_{0.975} = 1.96$.

Beispiel Stichprobe vom Umfang $n = 10$ mit $\bar{x} = 23$.
Vor der Untersuchung war $\sigma^2 = 25$ bekannt.
Konfidenzintervall zum Niveau $\alpha = 0.05$ ist

$$[I_u(\mathbf{X}), I_o(\mathbf{X})] = \left[23 - 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}}, 23 + 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}} \right]$$
$$= [23 - 3.099, 23 + 3.099] = [19.901, 26.099].$$

Der unbekannte Erwartungswert μ wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% von dem Konfidenzintervall mit den Grenzen 19.901 und 26.099 überdeckt.

Konfidenzintervall für μ (σ^2 unbekannt)

$$\begin{aligned} & [I_u(\mathbf{X}), I_o(\mathbf{X})] \\ &= \left[\bar{X} - t_{n-1;1-\alpha/2} \cdot \frac{S_X}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1;1-\alpha/2} \cdot \frac{S_X}{\sqrt{n}} \right] \\ \bar{X} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \\ S_x^2 &= \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2 \end{aligned}$$

$t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$: $1 - \frac{\alpha}{2}$ Quantil der t-Verteilung mit $n - 1$ Freiheitsgraden, z.B. $\alpha = 0.05$ und $n = 10 \rightarrow t_{9,0.975} = 2.2622$.

Beispiel Stichprobe vom Umfang $n = 10$ mit $\bar{x} = 23$ und $s^2 = 25$. Konfidenzintervall zum Niveau $\alpha = 0.05$ ist

$$\begin{aligned} [I_u(\mathbf{X}), I_o(\mathbf{X})] &= \left[23 - 2.2622 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}}, 23 + 2.2622 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}} \right] \\ &= [23 - 3.5769, 23 + 3.5769] = [19.4231, 26.5769]. \end{aligned}$$

Der unbekannte Erwartungswert μ wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% von dem Konfidenzintervall mit den Grenzen 19.4231 und 26.5769 überdeckt.

Konfidenzintervall für die Varianz σ^2 (μ unbekannt)

$$[I_u(\mathbf{X}), I_o(\mathbf{X})] = \left[\frac{n-1}{\chi_{n-1; 1-\alpha/2}^2} S_X^2, \frac{n-1}{\chi_{n-1; \alpha/2}^2} S_X^2 \right]$$
$$S_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Beispiel Stichprobe vom Umfang $n = 10$ mit $s^2 = 25$.

$$\chi_{9, 0.975}^2 = 19, \chi_{9, 0.025}^2 = 2.7.$$

Konfidenzintervall zum Niveau $\alpha = 0.05$,

$$[I_u(\mathbf{X}), I_o(\mathbf{X})] = \left[\frac{9}{19} 25, \frac{9}{2.7} 25 \right]$$
$$= [11.8421, 83.3333].$$

Die unbekannte Streuung σ^2 wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% von dem Konfidenzintervall mit den Grenzen 11.8421 und 83.3333 überdeckt.

Konfidenzintervall für p

Schätzwert $\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$

$n\hat{p}(1 - \hat{p}) \geq 9 \Rightarrow$ Binomialverteilung durch

Normalverteilung approximierbar

\rightarrow Konfidenzintervall für p

$$[I_u(\mathbf{X}), I_o(\mathbf{X})]$$

$$= \left[\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

mit $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ das $1 - \frac{\alpha}{2}$ Quantil der

Standardnormalverteilung ($\alpha = 0.05 \rightarrow z_{0.975} = 1.96$).

Beispiel Qualitätskontrolle, es wurden $n = 100$ Teile zufällig untersucht, 10 mangelhafte Teile wurden entdeckt. Somit ist $\hat{p} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ und da $n\hat{p}(1 - \hat{p}) = 100 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} = 9$ ist, kann approximiert werden. Konfidenzintervall für den Anteil defekter Teile in der Grundgesamtheit ist

$$[I_u(\mathbf{X}), I_o(\mathbf{X})]$$

$$= \left[\frac{1}{10} - 1.96 \sqrt{\frac{1 \cdot 9}{10 \cdot 10 \cdot 100}}, \frac{1}{10} + 1.96 \sqrt{\frac{1 \cdot 9}{10 \cdot 10 \cdot 100}} \right] =$$

$$[0.1 - 0.06, 0.1 + 0.06] = [0.04, 0.16].$$

Der unbekannte Anteil p an defekten Teilen wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% von dem Konfidenzintervall mit den Grenzen 4% und 16% überdeckt.

Testprobleme

Ein- und Zweistichprobenprobleme

Einstichprobenprobleme prüfen als Nullhypothese H_0 , ob Sollwerte / Standards eingehalten werden oder nicht:

- Abfüllgewichte (1kg Mehl, 1kg Zucker)
- Langjährige mittlere Julitemperatur in München (22°C)
- Bisherige Frauenquote im Fach Statistik (57%)
- Anteil der Verkehrsunfälle unter Alkohol (12%)
- Körpergröße (Männer) = 178cm

Bei Einstichprobenproblemen beinhalten die Alternativ- oder Arbeitshypothesen H_1 Abweichungen vom Sollwert / Standard:

- Unterschreitung des Abfüllgewichts ($\mu < 1kg$)
- Veränderung der Durchschnittstemperatur ($\mu \neq 22^\circ \text{C}$)
- Anstieg der Frauenquote ($p > 57\%$)
- Rückgang der Alkoholunfälle ($p < 12\%$)
- Körpergröße von Männern im Mittel gestiegen ($\mu > 178\text{cm}$)

Zweistichprobenprobleme prüfen als Nullhypothese H_0 , ob zwei unabhängige Stichproben gleiche Parameter besitzen:

- mittleres Abfüllgewicht bei Maschine 1 gleich mittleres Abfüllgewicht bei Maschine 2
- mittlere Punktzahl BWL = mittlere Punktzahl VWL (in der Statistiklausur)
- Durchschnittstemperatur (Juli) in München = Durchschnittstemperatur (Juli) in Basel
- Varianz der Körpergröße (Männer) = Varianz der Körpergröße (Frauen)
- Anteil $P(A)$ säumiger Ratenzahler im Versandhaus A = Anteil $P(B)$ säumiger Ratenzahler im Versandhaus B, also $P(A) = P(B) = p$ oder $P(A) - P(B) = 0$

Bei Zweistichprobenproblemen beinhalten die Alternativ- oder Arbeitshypothesen H_1 ein- oder zweiseitige Abweichungen von der Gleichheit dieser Parameter:

- mittleres Abfüllgewicht (Maschine 1) $<$ mittleres Abfüllgewicht (Maschine 2)
- mittlere Punktzahl (BWL) \neq mittlere Punktzahl (VWL)
- Durchschnittstemperatur (Juli) in München $>$ Durchschnittstemperatur (Juli) in Basel
- Varianz der Körpergröße (Männer) \neq Varianz der Körpergröße (Frauen)
- Gegenhypothese zu den säumigen Ratenzahlern $P(A) - P(B) > 0$

Ein- und Zweiseitige Tests

Fall	Nullhypothese	Alternativhypothese	
(a)	$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	zweiseitiges Testproblem
(b)	$\theta \geq \theta_0$	$\theta < \theta_0$	einseitiges Testproblem
(c)	$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$	einseitiges Testproblem

Beispiel

- Abfüllgewichte (z.B. 1kg Mehl, 1kg Zucker) unterschritten $H_0 : \mu \geq 1kg$, $H_1 : \mu < 1kg$
- Bisherige Frauenquote im Fach Statistik gestiegen $H_0 : p \leq 57\%$, $H_1 : \mu > 57\%$

Allgemeines Vorgehen

- 1) Verteilungsannahme über die Zufallsvariable X
- 2) Formulierung von H_0 und H_1
- 3) Vorgabe einer Irrtumswahrscheinlichkeit α (z.B. $\alpha = 0.05$)
- 4) Konstruktion einer geeigneten Testgröße $T(\mathbf{X}) = T(X_1, \dots, X_n)$ als Funktion der Stichprobenvariablen \mathbf{X}
- 5) Wahl eines kritischen Bereichs K mit $P_\theta(T(\mathbf{X}) \in K) \leq \alpha$
- 6) Berechnung der Realisierung $t = T(x_1, \dots, x_n)$ der Testgröße $T(\mathbf{X})$ anhand der konkreten Stichprobe (x_1, \dots, x_n) .
- 7) Entscheidungsregel:

$$t \in K : H_0 \text{ ablehnen} \implies H_1 \text{ signifikant}$$

$$t \notin K : H_0 \text{ nicht ablehnen}$$

Wichtig: H_0 nicht ablehnen heißt nicht, dass H_0 gilt! H_0 kann nicht bewiesen werden, sondern nur widerlegt. Nur durch wiederholte gescheiterte Widerlegungsversuche kann man Vertrauen in H_0 gewinnen, jedoch wird das nie ein endgültiger Beweis sein.

Einstichprobenprobleme

Prüfen des Mittelwerts bei bekannter Varianz (einfacher Gauss-Test)

1. *Verteilungsannahme:* $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$, σ_0^2 bekannt

2. *Festlegen von H_0 und H_1 :*

$H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$, zweiseitig

$H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$, einseitig

$H_0 : \mu \geq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0$, einseitig

3. *Vorgabe der Irrtumswahrscheinlichkeit α :* $\alpha = 0.05$
(selten auch $\alpha = 0.01$)

4. *Konstruktion der Testgröße:* Schätzung des unbekanntes Erwartungswertes durch den Stichprobenmittelwert

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \stackrel{H_0}{\sim} N\left(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$$

durch Standardisierung erhält man die Prüfgröße

$$T(\mathbf{X}) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0} \sqrt{n} \stackrel{H_0}{\sim} N(0, 1).$$

5. Kritischer Bereich: Da die Testgröße standardnormalverteilt ist erhält man folgende kritische Bereiche:

Fall	H_0	H_1	Kritischer Bereich K
(a)	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$K = (-\infty, -z_{1-\alpha/2}) \cup (z_{1-\alpha/2}, \infty)$
(b)	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$K = (-\infty, -z_\alpha)$
(c)	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$K = (z_{1-\alpha}, \infty)$

Im Fall (a) mit $H_0: \mu = \mu_0$ und $H_1: \mu \neq \mu_0$ sind beide Enden der Verteilung der Testgröße für die Entscheidung relevant.

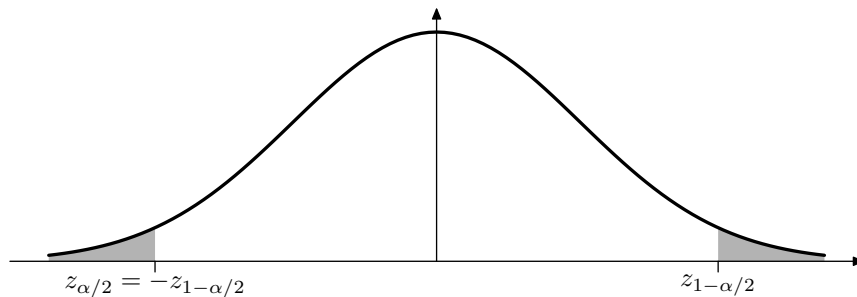


Abbildung 1: Kritischer Bereich für den zweiseitigen einfachen Gauss-Test $H_0: \mu = \mu_0$ gegen $H_1: \mu \neq \mu_0$. Der kritische Bereich $K = (-\infty, -z_{1-\alpha/2}) \cup (z_{1-\alpha/2}, \infty)$ besitzt unter H_0 die durch die grauen Flächen dargestellte Wahrscheinlichkeitsmasse α .

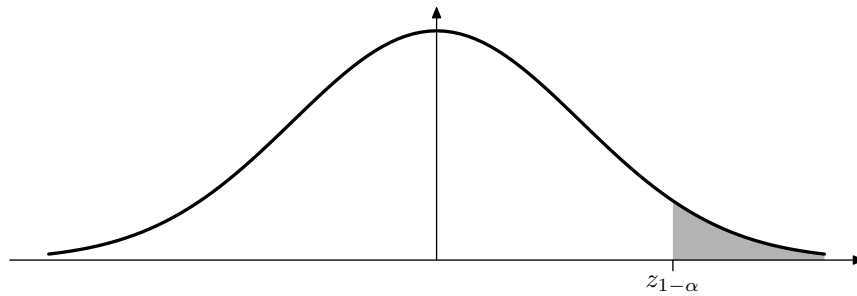


Abbildung 2: Kritischer Bereich für den einseitigen einfachen Gauss-Test $H_0: \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1: \mu > \mu_0$. Der kritische Bereich $K = (z_{1-\alpha}, \infty)$ besitzt unter H_0 die durch die graue Fläche dargestellte Wahrscheinlichkeitsmasse α .

6. Realisierung der Testgröße: Aus Stichprobe x_1, \dots, x_n wird der Stichprobenmittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

und die Realisierung $t = T(x_1, \dots, x_n)$ der Testgröße $T(\mathbf{X})$ ermittelt

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0} \sqrt{n}.$$

7. Testentscheidung: Testgröße innerhalb des kritischen Bereichs, so muß die Nullhypothese verworfen werden. Daraus folgt:

Fall	H_0	H_1	Lehne H_0 ab, wenn
(a)	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$ t > z_{1-\alpha/2}$
(b)	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$t < z_\alpha = -z_{1-\alpha}$
(c)	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$t > z_{1-\alpha}$

$$(\alpha = 0.05 \rightarrow z_{0.975} = 1.96, z_{0.95} = 1.64)$$

Beispiel Eine Firma liefert tiefgefrorene Torten. Die (in kg gemessene) Masse X der Torten sei normalverteilt. Das angegebene Verkaufsgewicht ist $\mu = 2$ kg, Varianz $\sigma_0^2 = 0.1^2$ ist aus Erfahrung bekannt.

Stichprobe vom Umfang $n = 20$ mit einem durchschnittlichen Gewicht von $\bar{x} = 1.97$ kg soll überprüfen, ob das Stichprobenergebnis gegen die Hypothese $H_0: \mu \geq 2$ kg spricht.

$\alpha = 0.05 \rightarrow z_{1-\alpha} = 1.64$. Realisierung der Testgröße:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0} \sqrt{n} = \frac{1.97 - 2}{0.1} \sqrt{20} = -1.34.$$

\Rightarrow Nullhypothese wird nicht abgelehnt, da

$$t = -1.34 > -1.64 = -z_{1-0.05} = z_{0.05}.$$

Beispiel $X =$ Körpergröße (männlich), $X \sim N(\mu, 5^2)$

Stichprobe: $x_1, \dots, x_9 \rightarrow \bar{x} = 182$

$$H_0: \mu = 178 \quad H_1: \mu \neq 178$$

$$t(x) = \frac{182-178}{5} \sqrt{9} = \frac{4 \cdot 3}{5} = 2.4 > z_{0.975} = 1.96$$

$\Rightarrow H_0$ ablehnen

$\Rightarrow H_1$ statistisch signifikant

Weitere Einstichprobenproblem bei Normalverteilung

t-Test

Varianz unbekannt \rightarrow Schätzung Stichprobenvarianz

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ σ^2 unbekannt

$H_0: \mu = \mu_0$ gegen $H_1: \mu \neq \mu_0$

$$T(\mathbf{X}) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_X} \sqrt{n} \stackrel{H_0}{\sim} t_{n-1}$$

H_0 ablehnen falls $|t(x)| \geq t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$

Beispiel $X =$ Körpergröße (männlich), $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Stichprobe: $x_1, \dots, x_9 \rightarrow \bar{x} = 182, s_x^2 = 8^2$

$H_0: \mu = 178$ $H_1: \mu \neq 178$

$$t(x) = \frac{182-178}{8} \sqrt{9} = \frac{4 \cdot 3}{8} = 1.5 < t_{8; 0.975} = 2.3060$$

$\implies H_0$ nicht ablehnen

Obwohl die 9 Männer im Mittel (182) größer als die Population ($\mu = 178$) sind, ist diese Abweichung zufällig und nicht signifikant.

Zweistichprobenprobleme bei Normalverteilung

F-Test

Bevor die Mittelwerte zweier Stichproben verglichen werden können, müssen die Varianzen der Stichproben verglichen werden. Dazu dient der *F*-Test.

X und Y , unabhängig mit $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

Stichproben (X_1, \dots, X_{n_X}) und (Y_1, \dots, Y_{n_Y})

$H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ gegen $H_1: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

$$T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \stackrel{H_0}{\sim} F_{n_X-1, n_Y-1}$$

H_0 ablehnen falls $t(x, y) < F_{n_X-1, n_Y-1, \frac{\alpha}{2}}$ oder $t(x, y) > F_{n_X-1, n_Y-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$

Beispiel $X =$ Output Maschine X , $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$

$Y =$ Output Maschine Y , $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

Stichprobe: $n_X = 9$, $s_X^2 = 4^2$, $n_Y = 16$, $s_Y^2 = 6^2$

Es soll geprüft werden, ob sich die Varianzen signifikant unterscheiden.

$$\Rightarrow t(x, y) = \frac{16}{36} = 0.444$$

$$F_{8,15,0.025} = 0.24$$

$$F_{8,15,0.975} = 3.2$$

Da $0.24 < 0.444 < 3.2$ kann H_0 nicht abgelehnt werden.

Die beiden Varianzen unterscheiden sich nicht signifikant.

doppelter Gauß-Test

X und Y , unabhängig mit $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ (σ_X^2 und σ_Y^2 bekannt)

Stichproben (X_1, \dots, X_{n_X}) und (Y_1, \dots, Y_{n_Y})

$H_0: \mu_X = \mu_Y$ gegen $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$

$$T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{n_Y \sigma_X^2 + n_X \sigma_Y^2}} \sqrt{n_X \cdot n_Y} \stackrel{H_0}{\sim} N(0, 1)$$

H_0 ablehnen falls $|t(x, y)| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Beispiel Maschinenbeispiel

Stichprobe: $n_X = 9$, $\bar{x} = 12$, $\sigma_X^2 = 4^2$, $n_Y = 16$, $\bar{y} = 10$, $\sigma_Y^2 = 6^2$

Angenommen, Produzent kennt die Varianzen seiner Maschinen, dann kann er den doppelten Gauß-Test anwenden um die Outputniveaus zu vergleichen.

$$\Rightarrow t(x, y) = \frac{12-10}{\sqrt{16 \cdot 16 + 9 \cdot 36}} \sqrt{9 \cdot 16} = \frac{2}{\sqrt{580}} \sqrt{3 \cdot 4} \approx 1$$

$$z_{0.975} = 1.96$$

Da $1 < 1.96$ kann H_0 nicht abgelehnt werden. Die durchschnittlichen Outputniveaus unterscheiden sich nicht signifikant.

doppelter t -Test

X und Y unabhängig mit $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ (Voraussetzung: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ aber unbekannt)

Stichproben (X_1, \dots, X_{n_X}) und (Y_1, \dots, Y_{n_Y})

$H_0: \mu_X = \mu_Y$ gegen $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$

$$T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S} \sqrt{\frac{n_X \cdot n_Y}{n_X + n_Y}} \stackrel{H_0}{\sim} t_{n_X+n_Y-2}$$

mit gepoolter Varianz

$$S^2 = \frac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{n_X + n_Y - 2}$$

H_0 ablehnen falls $|t(x, y)| > t_{n_X+n_Y-2, 1-\frac{\alpha}{2}}$

Beispiel Maschinenbeispiel

Stichprobe: $n_X = 9$, $\bar{x} = 12$, $s_X^2 = 4^2$, $n_Y = 16$, $\bar{y} = 10$, $s_Y^2 = 6^2$

Die Varianzen unbekannt, also doppelter t -Test.

$$s^2 = \frac{8 \cdot 16 + 15 \cdot 36}{9 + 16 - 2} = \frac{668}{23} \approx 5.4^2$$

$$\Rightarrow t(x, y) = \frac{12-10}{5.4} \sqrt{\frac{9 \cdot 16}{9+16}} = \frac{2}{5.4} \frac{3 \cdot 4}{5} \approx 0.89$$

$$t_{23, 0.975} = 2.07$$

Da $0.89 < 2.07$ kann H_0 nicht abgelehnt werden. Die durchschnittlichen Outputniveaus unterscheiden sich nicht signifikant.

paired t -Test

Sind beide Merkmale an den gleichen Merkmalsträgern erhoben worden, so spricht man vom matched-pair

Design:

i	X	Y	$D = X - Y$
1	x_1	y_1	$d_1 = x_1 - y_1$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	x_n	y_n	$d_n = x_n - y_n$

$D = X - Y$ mit

$$D \sim N(0, \sigma_D^2)$$

$$H_0: \mu_D = 0 \text{ gegen } H_1: \mu_D \neq 0$$

$$T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = T(\mathbf{D}) = \frac{\bar{D}}{S_D} \sqrt{n} \stackrel{H_0}{\sim} t_{n-1}$$

mit

$$S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n-1}$$

$$H_0 \text{ ablehnen falls } |t(x, y)| > t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$$

Beispiel Gewicht von $n = 4$ Männern (X : vor einer Diät, Y : nach einer Diät):

Stichprobe:

i	X	Y	D	$(D - \bar{D})^2$
1	80	78	2	1
2	65	61	4	9
3	70	72	-2	9
3	81	81	0	1
			$\bar{D} = 1$	$\sum = 20$

$$s_D^2 = \frac{20}{3} = 6.67$$

$$\Rightarrow t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{6.67}} \sqrt{4} = 0.77$$

$$t_{3,0.975} = 3.18$$

Da $0.77 < 3.18$ kann H_0 nicht abgelehnt werden. Die Diät hat keinen signifikanten Einfluss auf das Gewicht.

Binomialtest für p $H_0: p = p_0$ gegen $H_1: p \neq p_0$

$$T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n; p)$$

 $\hat{p} = \frac{\sum X_i}{n}$ so, dass $n\hat{p}(1 - \hat{p}) \geq 9$ \Rightarrow

$$T(\mathbf{X}) = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}} \sqrt{n} \stackrel{approx.}{\sim} N(0, 1)$$

 H_0 ablehnen falls $|t(x, y)| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ **Beispiel** VersandhausEreignis A : Kunde zahlt unpünktlich (mehr als 14 Tage bis Zahlungseingang)Stichprobe: $n = 200$, 70 Kunden mit A

$$\Rightarrow \hat{p} = \frac{70}{200} = 0.35$$

 $H_0: p = 0.25$ (Erfahrungswert der letzten Jahre) $H_1: p \neq 0.25$

$$n\hat{p}(1 - \hat{p}) \geq 9 = 200 \cdot 0.35 \cdot 0.65 > 9 \checkmark$$

$$t(\mathbf{X}) = \frac{0.35 - 0.25}{\sqrt{0.25 \cdot 0.75}} \sqrt{200} = \frac{0.1}{0.433} 14.14 = 3.266$$

$$z_{0.975} = 1.96$$

Da $3.266 > 1.96$ muss H_0 abgelehnt werden. Die Zahlungsmoral der Kunden hat sich signifikant verändert.

Prüfen der Gleichheit zweier Binomialwahrscheinlichkeiten

$H_0: p_X = p_Y = p$ gegen $H_1: p_X \neq p_Y$

$$T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{D}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p}) \left(\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y} \right)}} \stackrel{approx.}{\sim} N(0, 1)$$

mit

$$D = \frac{X}{n_X} - \frac{Y}{n_Y} \quad \text{und} \quad \hat{p} = \frac{X + Y}{n_X + n_Y}$$

H_0 ablehnen falls $|t(x, y)| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Beispiel CDU- Wahlchancen in Berlin (X) und Stuttgart (Y)

$H_0: p_X = p_Y = p$ gegen $H_1: p_X \neq p_Y$

Stichprobe:

$n_X = 500, X = 150$ CDU Wähler

$n_Y = 400, Y = 250$ CDU Wähler

$$\Rightarrow d = \frac{150}{500} - \frac{250}{400} = \frac{3}{10} - \frac{5}{8} = -\frac{13}{40}$$

$$\hat{p} = \frac{150+250}{500+400} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow t(x, y) = \frac{-\frac{13}{40}}{\sqrt{\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} \left(\frac{1}{500} + \frac{1}{400} \right)}} = -9.75$$

Da $9.75 > 1.96$ muss H_0 abgelehnt werden. Die Wahlchancen der CDU in den beiden Städten sind signifikant voneinander verschieden.

Nichtparametrische Tests

Anpassungstests

Bei Anpassungstests wird überprüft, ob sich bestimmte empirische Daten an ein theoretisches Verteilungsmodell $F_0(x)$ anpassen.

χ^2 -Anpassungstest

$H_0: F(x) = F_0(x)$ gegen $H_1: F(X) \neq F(Y)$

$$T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} \underset{\text{asympt.}}{\sim} \chi_{k-1-r}^2$$

mit

- N_i die absolute Häufigkeit der Stichprobe \mathbf{X} für die Klasse i ($i = 1, \dots, k$)
- p_i mit Hilfe von $F_0(x)$ berechnete (hypothetische) Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X in die Klasse i fällt
- r : Anzahl der aus der Stichprobe geschätzten Parameter

H_0 ablehnen falls $t(x) > \chi_{k-1-r, 1-\alpha}^2$

Beispiel Wahl zum Bundestag

	CDU/CSU	SPD	FDP	andere
H_0	45%	40%	10%	5%
p_i unter H_0	0.45	0.40	0.10	0.05
Stichprobe n_i	400	350	150	100
$n = 1000 \Rightarrow np_i$	450	400	100	50

$$\begin{aligned}
 t(x) &= \frac{(400 - 450)^2}{450} + \frac{(350 - 400)^2}{400} + \frac{(150 - 100)^2}{100} + \frac{(100 - 50)^2}{50} \\
 &= \frac{2500}{450} + \frac{2500}{400} + \frac{2500}{100} + \frac{2500}{50} \\
 &= 86.81
 \end{aligned}$$

$$\chi_{4-1;0.95}^2 = 7.81 \quad (k = 4 \text{ Klassen, } r = 0 \text{ geschätzte}$$

Parameter)

Da $86.81 > 7.81$ muss H_0 abgelehnt werden. Also trifft die hypothetischen Prognose für die Bundestagswahl nicht zu, die empirischen Ergebnisse haben eine andere Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest

$H_0: F(x) = F_0(x)$ gegen $H_1: F(x) \neq F_0(x)$, F stetige Verteilung.

$$T(\mathbf{X}) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_0(x) - \hat{F}(x)|$$

Beispiel Körpergrößen von Studenten

Es soll überprüft werden ob die Körpergrößen, aufgeteilt nach dem Geschlecht der Studenten, normalverteilt sind. Zuerst die Histogramme der Körpergrößen.

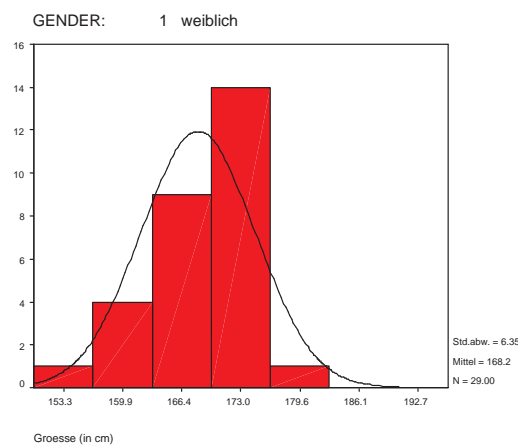


Abbildung 3: Körpergrößen der Studentinnen

Die Linie im Bild stellt die an die Daten angepasste Dichte der Normalverteilung dar. Die Daten passen sich relativ gut an die Normalverteilung an.

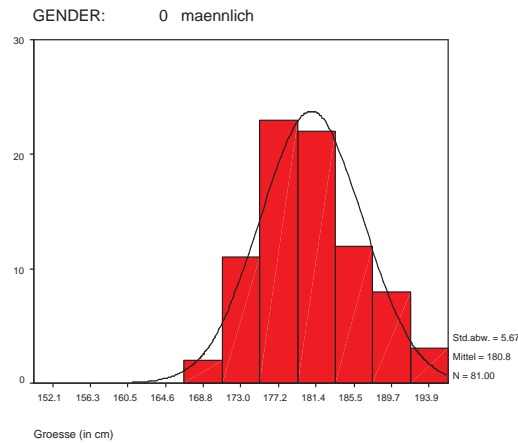


Abbildung 4: Körpergrößen der Studenten

Nun wird der Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest durchgeführt. In der folgenden Tabelle sind die Statistiken für den Test zusammengefasst.

Geschlecht		Größe (in cm)
männlich	N	81
	Parameter der	\bar{x}
	Normalverteilung	s
	Extremste	Absolut
	Differenzen	Positiv
		Negativ
	Kolmogorov-	Smirnov-Z
	Asym. Signifikanz	(2-seitig)
weiblich	N	29
	Parameter der	\bar{x}
	Normalverteilung	s
	Extremste	Absolut
	Differenzen	Positiv
		Negativ
	Kolmogorov-	Smirnov-Z
	Asym. Signifikanz	(2-seitig)

Die Nullhypothese wird für beide Geschlechter nicht abgelehnt. Die beobachteten Körpergrößen der Studenten widerlegen die jeweiligen Normalverteilungshypothesen nicht.

Kolmogorov-Smirnov-Test im Zweistichprobenproblem

X, Y unabhängig mit $X \sim F$ und $Y \sim G$. Es wird getestet, ob X und Y aus derselben Verteilung stammen.

$H_0: F(t) = G(t)$ gegen $H_1: F(t) \neq G(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$

$$T(\mathbf{X}) = K = \max_{t \in S} |\hat{F}(t) - \hat{G}(t)|$$

(S bezeichnet hierbei die (gepoolte) Stichprobe $S = X \cup Y$)

Beispiel Haben die Körpergrößen der männlichen und weiblichen Studenten die gleiche Verteilung oder unterscheiden sie sich?

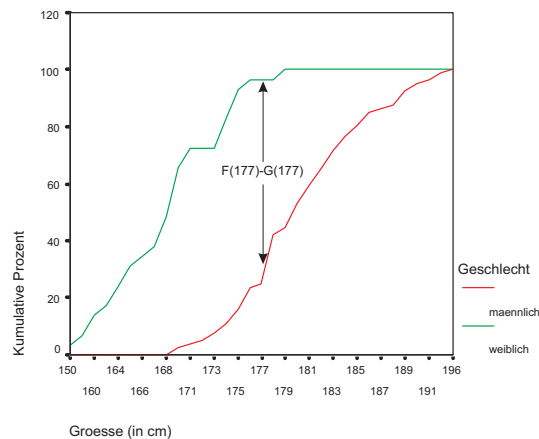


Abbildung 5: Die Verteilungsfunktionen der Körpergrößen

Man sieht deutliche Unterschiede zwischen den Verteilungsfunktionen. Die Lage der Funktionen

unterscheidet sich stark und auch die Steigungen sind unterschiedlich.

Schauen wir ob der Kolmogorov-Smirnov-Test diese Unterschiede aufdeckt.

Extremste	Absolut	.771
Differenzen	Positiv	.000
	Negativ	-.771
Kolmogorov-	Smirnov-Z	3.561
Asym.Signifikanz	(2-seitig)	.00

Die Nullhypothese wird abgelehnt, die Körpergrößen stammen aus signifikant unterschiedlichen Verteilungen.

Mann-Whitney-U-Test

X, Y stetig mit Stichproben $(X_1, \dots, X_{n_X}, Y_1, \dots, Y_{n_Y})$

$H_0 : P(X_i > Y_i) = 0.5$ gegen $H_0 : P(X_i > Y_i) \neq 0.5$

$$T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{U - \frac{n_X \cdot n_Y}{2}}{\sqrt{\frac{n_X \cdot n_Y \cdot (n_X + n_Y + 1)}{12}}} \stackrel{\text{approx.}}{\sim} N(0, 1)$$

wobei $U = \min\{U_1, U_2\}$ und

$$U_1 = n_X \cdot n_Y + \frac{n_X(n_X + 1)}{2} - R_{1+}$$

$$U_2 = n_Y \cdot n_Y + \frac{n_Y(n_Y + 1)}{2} - R_{2+}$$

R_{1+} = die Summe der Rangzahlen X -Stichprobe

R_{2+} = die Summe der Rangzahlen Y -Stichprobe

Wichtig: (X_i, Y_i) in gemeinsamer Rangordnung

$\Rightarrow H_0$ ablehnen falls $|t(x, y)| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Beispiel Punktzahlen einer Klausur für beide Geschlechter

Punktzahl	17	19	22	27	29	31	45	
Geschlecht	m	m	w	m	w	w	w	
Rang	1	2	3	4	5	6	7	
R_{m+}	1	+2		+4				= 7
R_{w+}			3		+5	+6	+7	= 21

$$U_m = 3 \cdot 4 + \frac{3(3+1)}{2} - 7 = 11$$

$$U_w = 3 \cdot 4 + \frac{4(4+1)}{2} - 21 = 1$$

$$U = \min\{11, 1\} = 1$$

$$\Rightarrow t(x, y) = \frac{1 - \frac{3 \cdot 4}{2}}{\sqrt{\frac{3 \cdot 4(3+4+1)}{12}}} = \frac{-5}{\sqrt{8}} = -1.77$$

$$z_{0.975} = 1.96$$

Da $1.77 < 1.96$ kann H_0 nicht abgelehnt werden. Die Punktzahlen der beiden Geschlechter weisen keinen signifikanten Unterschied auf.

Analyse von Kontingenztafeln

χ^2 -Unabhängigkeitstest

$H_0 : X$ und Y unabhängig gegen $H_1 : X$ und Y nicht unabhängig

$$T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{(n_{ij} - \hat{n}_{ij})^2}{\hat{n}_{ij}} \sim \chi_{(I-1)(J-1)}^2$$

mit

I : Anzahl Zeilen

J : Anzahl Spalten

$$\hat{n}_{ij} = \frac{\text{Zeilensumme}_i \cdot \text{Spaltensumme}_j}{n}$$

n_{ij} : beobachtete Häufigkeit

H_0 ablehnen falls $|t(x, y)| > \chi_{(I-1)(J-1), 1-\alpha}^2$

Beispiel Zwei Merkmale (X, Y) mit zwei Ausprägungen (A, B)

$X \setminus Y$	A	B	Σ
A	17	83	100
B	28	172	200
Σ	45	255	300

$$\text{z.B. } \hat{n}_{11} = \frac{45 \cdot 100}{300} = 15$$

$\Rightarrow \hat{n}_{ij}$:

15	85
30	170

$$\chi^2 = \frac{(17-15)^2}{15} + \frac{(83-85)^2}{85} + \frac{(28-30)^2}{30} + \frac{(172-170)^2}{170} = 0.47$$

$$\chi_{1,0.95}^2 = 3.84$$

Da $0.47 < 3.84$ kann H_0 nicht abgelehnt werden.

Schätzung für den Odds-Ratio in einer 2×2 -Tafel

$$\widehat{OR} = \frac{n_{11}n_{22}}{n_{12}n_{21}}$$

$$\hat{\theta}_0 = \ln \widehat{OR} = \ln \frac{n_{11}n_{22}}{n_{12}n_{21}}$$

Schätzung der Standardabweichung von $\hat{\theta}_0$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\theta}_0} = \left(\frac{1}{n_{11}} + \frac{1}{n_{22}} + \frac{1}{n_{12}} + \frac{1}{n_{21}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Test

$H_0: \theta_0 = 0$ gegen $H_1: \theta_0 \neq 0$ oder

$H_0: OR_0 = 1$ gegen $H_1: OR_0 \neq 1$

$$T(\mathbf{X}) = \frac{\hat{\theta}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\theta}_0}} \underset{\text{asympt.}}{\sim} N(0, 1) \quad \text{unter } H_0$$

H_0 ablehnen falls $|t(x)| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Konfidenzintervall für θ_0

$$[I_u, I_o] = \left[\hat{\theta}_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\theta}_0}, \hat{\theta}_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\theta}_0} \right]$$

H_0 ablehnen falls $\theta_0 \notin [I_u, I_o]$

Konfidenzintervall für OR

$$[\exp(I_u), \exp(I_o)]$$

H_0 ablehnen falls $OR_0 \notin [\exp(I_u), \exp(I_o)]$

Beispiel Fortsetzung des obigen Beispiels:

$$\widehat{OR} = \frac{17 \cdot 172}{28 \cdot 83} = 1.26$$

$$\hat{\theta}_0 = \ln(1.26) = 0.23$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\theta}_0} = \sqrt{\frac{1}{17} + \frac{1}{83} + \frac{1}{28} + \frac{1}{172}} = 0.335$$

$$H_0: \theta_0 = 0 \rightarrow t(x) = \frac{0.23}{0.335} = 0.8$$

$$z_{0.975} = 1.96$$

$\Rightarrow H_0$ nicht ablehnen

Alternativ über Konfidenzintervall:

$$[I_u, I_o] = [0.23 - 1.96 \cdot 0.335, 0.23 + 1.96 \cdot 0.335] = [-0.43, 0.89]$$

Da $\theta_0 = 0 \in [-0.43, 0.89]$ kann H_0 nicht abgelehnt werden.

$$[\exp(I_u), \exp(I_o)] = [0.66, 2.41]$$

Da $OR_0 = 1 \in [0.66, 2.41]$ kann H_0 nicht abgelehnt werden.

Der Odds-Ratio bzw. der Logarithmus des Ratios ist nicht signifikant von 1 bzw. 0 verschieden.

Lineare Regression

Inferenz im einfachen Regressionsmodell

Modell: $Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i$

Annahmen:

$$\begin{aligned}x_i &: \text{ nicht stochastisch} \\E(\epsilon_i) &= 0 \\Var(\epsilon_i) &= E(\epsilon_i^2) = \sigma^2 \\Cov(\epsilon_i) &= E(\epsilon_i \epsilon_j) = 0 \\ \epsilon_i &\sim N(0, \sigma^2)\end{aligned}$$

Schätzfunktionen:

$$\begin{aligned}a &= \bar{Y} - b\bar{x} \\b &= \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.\end{aligned}$$

Eigenschaften der Schätzfunktionen:

- Erwartungstreue: $E(a) = \alpha$, $E(b) = \beta$
- Varianz von a: $Var(a) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right)$
- Varianz von b: $Var(b) = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}$

Hypothesentests

Hypothesen:

$$H_0 : \beta_1 = b_0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq b_0$$

Wichtiger Spezialfall: $b_0 = 0!$

Schätzung unbekanntem Parameter σ^2 :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Teststatistik:

$$T = \frac{b - b_0}{\sqrt{\widehat{Var}(b)}} = \frac{(b - b_0)\sqrt{S_{xx}}}{\hat{\sigma}} \sim t_{n-2}$$

H_0 wird abgelehnt, wenn $|T| > t_{n-2, 1-\frac{\alpha}{2}}$.

Anmerkung:

- Test für Parameter α laufen analog
- selbstverständlich sind auch einseitige Fragestellungen vorstellbar

Multiple Regression

Modell: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$

Beispiel SPSS Outputs:

- Leistungsfähigkeit von Autos: Y: Gefahrene Meilen pro Gallone (Benzin)
- Einflußgrößen waren dabei die Merkmale 'PS', 'Gewicht', 'Beschleunigung' (von 0 auf 100 km/h), 'Baujahr' und 'Herstellungsland'

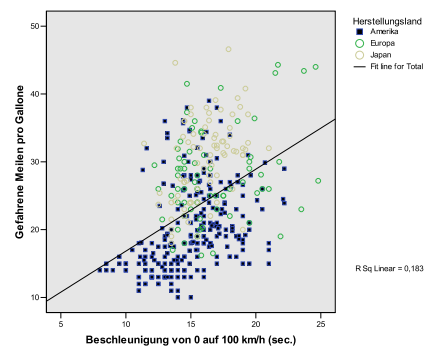
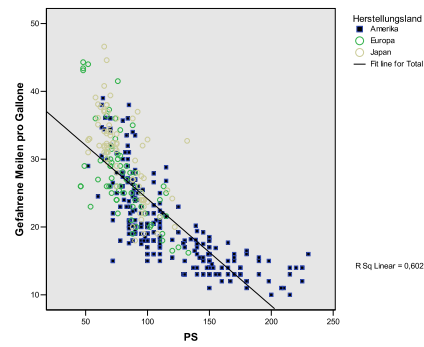
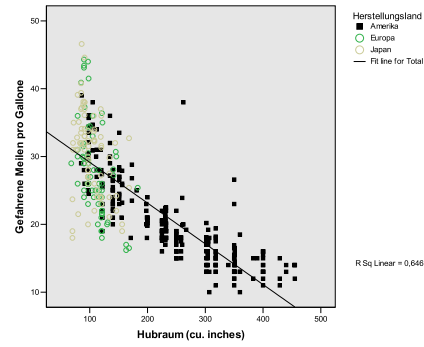
Korrelationen von Y, X_1, \dots, X_5 , alle signifikant (p-value < 0.05 , sie sind im Output nicht abgebildet) von Null verschieden.

	Meilen	PS	Gewicht	Beschl.	Baujahr	Zylinder
Meilen	1	-0.771	-0.807	0.434	0.576	-0.774
PS	-0.771	1	0.859	-0.701	-0.419	0.844
Gewicht	-0.807	0.859	1	-0.415	-0.310	0.895
Beschl.	0.434	-0.701	-0.415	1	0.308	-0.528
Baujahr	0.576	-0.419	-0.310	0.308	1	-0.357
Zylinder	-0.774	0.844	0.895	-0.528	-0.357	1

Mit Y sind negativ korreliert: 'PS', 'Gewicht' und 'Anzahl der Zylinder'.

Positiv korreliert sind die Merkmale 'Beschleunigung' und 'Baujahr'. 'Herstellungsland' ist eine kategoriale Variable. Sie wird dummykodiert mit Land1 = USA, Land2 = Europa, Japan = Referenzkategorie.

Grafiken:



SPSS Outputs:

Model	R	R square	Adj. R-Sq	Std. Error
1	0.907	0.823	0.819	3.307

Model		SS	df
1	Regression	19432.238	8
	Residual	4177.538	382
	Total	23609.775	390

Model		B	Std. Error	t	Sig.
1	(Constant)	-14.764	4.695	-3.145	0.002
	Hubraum	.025	.008	3.253	.001
	PS	-.021	.014	-1.503	.134
	Gewicht	-.007	.001	-10.264	.000
	Beschleunigung	.061	.100	.0615	.539
	Baujahr	.780	.052	15.032	.000
	Anzahl Zylinder	-.519	.323	-1.607	.109
	Land1	-2.879	.553	-5.202	.000
	Land2	-.209	.566	-.370	.712

Es werden die Koeffizientenschätzungen (Spalte: B), ihre Standardabweichungen (Spalte: Std. Error), die Teststatistik (Spalte: t) und die Überschreitungswahrscheinlichkeit (Spalte: Sig.) abgebildet. Weiter erhält man Informationen über das Bestimmtheitsmass (R square) und die Quadratsummen (SS). Das Regressionsmodell (Modell 1) lautet:

$$\begin{aligned}
 Y = & -14.76 + 0.25 \cdot \text{Hubraum} - 0.021 \cdot \text{PS} - 0.007 \cdot \text{Gewicht} + 0.061 \\
 & + 0.061 \cdot \text{Beschleunigung} + 0.780 \cdot \text{Baujahr} - 0.519 \cdot \text{Zylinder} \\
 & - 2.879 \cdot \text{Land1} - 0.209 \cdot \text{Land2}
 \end{aligned}$$

Einfluss der Länder (Interpretation von Dummies):

$$Y = (\text{fest}) - 2.879 \cdot \text{Land1, USA} = 1$$

$$Y = (\text{fest}) - 0.209 \cdot \text{Land2, Europa} = 1$$

$$Y = (\text{fest}) + 0 \cdot \text{Japan, wenn Land1 und Land2 beide 0}$$

→ in den USA produzierten Autos eine geringere Leistungsfähigkeit aufweisen!

Streuungszerlegung:

$$\begin{aligned}
 SQ_{total} &= SQ_{Reg} + SQ_{Res} \\
 23609.775 &= 19432.238 + 4177.538
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{19432.238}{23609.775} \approx 0.82.$$

- Nicht signifikant von Null verschieden sind: 'PS', 'Beschleunigung' und 'Anzahl der Zylinder' (p-Werte > 0.05)
- 'Land2' nicht signifikant! Da 'Land1' aber signifikant ist, ist auch das Herstellungsland insgesamt signifikant!

SPSS Output: Modell nur mit den signifikanten Variablen

Model	R	R square	Adj. R-Sq	Std. Error
2	0.906	0.822	0.819	3.312

Model		SS	df
2	Regression	19398.274	6
	Residual	4211.501	384
	Total	23609.775	390

Model		B	Std. Error	t	Sig.
1	(Constant)	-14.820	4.153	-3.568	0.000
	Hubraum	.017	.006	2.829	.005
	PS	-.024	.011	-2.251	.025
	Gewicht	-.007	.001	-11.467	.000
	Baujahr	.778	.052	15.013	.000
	Land1	-2.792	.551	-5.065	.000
	Land2	-.161	.566	-.283	.777

Anmerkung: Nachdem Anzahl Zylinder und Beschleunigung aus dem Modell entfernt wurden ist PS signifikant.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
0.0	0.500000	0.503989	0.507978	0.511966	0.515953
0.1	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555670
0.2	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835
0.3	0.617911	0.621720	0.625516	0.629300	0.633072
0.4	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031
0.5	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705401
0.6	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914
0.7	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350
0.8	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546
0.9	0.815940	0.818589	0.821214	0.823814	0.826391
1.0	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830
1.1	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857
1.2	0.884930	0.886861	0.888768	0.890651	0.892512
1.3	0.903200	0.904902	0.906582	0.908241	0.909877
1.4	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066
1.5	0.933193	0.934478	0.935745	0.936992	0.938220
1.6	0.945201	0.946301	0.947384	0.948449	0.949497
1.7	0.955435	0.956367	0.957284	0.958185	0.959070
1.8	0.964070	0.964852	0.965620	0.966375	0.967116
1.9	0.971283	0.971933	0.972571	0.973197	0.973810
2.0	0.977250	0.977784	0.978308	0.978822	0.979325
2.1	0.982136	0.982571	0.982997	0.983414	0.983823
2.2	0.986097	0.986447	0.986791	0.987126	0.987455
2.3	0.989276	0.989556	0.989830	0.990097	0.990358
2.4	0.991802	0.992024	0.992240	0.992451	0.992656
2.5	0.993790	0.993963	0.994132	0.994297	0.994457
2.6	0.995339	0.995473	0.995604	0.995731	0.995855
2.7	0.996533	0.996636	0.996736	0.996833	0.996928
2.8	0.997445	0.997523	0.997599	0.997673	0.997744
2.9	0.998134	0.998193	0.998250	0.998305	0.998359
3.0	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817

z	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.519939	0.523922	0.527903	0.531881	0.535856
0.1	0.559618	0.563559	0.567495	0.571424	0.575345
0.2	0.598706	0.602568	0.606420	0.610261	0.614092
0.3	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732
0.4	0.673645	0.677242	0.680822	0.684386	0.687933
0.5	0.708840	0.712260	0.715661	0.719043	0.722405
0.6	0.742154	0.745373	0.748571	0.751748	0.754903
0.7	0.773373	0.776373	0.779350	0.782305	0.785236
0.8	0.802337	0.805105	0.807850	0.810570	0.813267
0.9	0.828944	0.831472	0.833977	0.836457	0.838913
1.0	0.853141	0.855428	0.857690	0.859929	0.862143
1.1	0.874928	0.876976	0.879000	0.881000	0.882977
1.2	0.894350	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475
1.3	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736
1.4	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888
1.5	0.939429	0.940620	0.941792	0.942947	0.944083
1.6	0.950529	0.951543	0.952540	0.953521	0.954486
1.7	0.959941	0.960796	0.961636	0.962462	0.963273
1.8	0.967843	0.968557	0.969258	0.969946	0.970621
1.9	0.974412	0.975002	0.975581	0.976148	0.976705
2.0	0.979818	0.980301	0.980774	0.981237	0.981691
2.1	0.984222	0.984614	0.984997	0.985371	0.985738
2.2	0.987776	0.988089	0.988396	0.988696	0.988989
2.3	0.990613	0.990863	0.991106	0.991344	0.991576
2.4	0.992857	0.993053	0.993244	0.993431	0.993613
2.5	0.994614	0.994766	0.994915	0.995060	0.995201
2.6	0.995975	0.996093	0.996207	0.996319	0.996427
2.7	0.997020	0.997110	0.997197	0.997282	0.997365
2.8	0.997814	0.997882	0.997948	0.998012	0.998074
2.9	0.998411	0.998462	0.998511	0.998559	0.998605
3.0	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999

Tabelle 1: Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ der Standardnormalverteilung $N(0, 1)$

df	$1 - \alpha$			
	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66
2	2.92	4.30	6.97	9.92
3	2.35	3.18	4.54	5.84
4	2.13	2.78	3.75	4.60
5	2.01	2.57	3.37	4.03
6	1.94	2.45	3.14	3.71
7	1.89	2.36	3.00	3.50
8	1.86	2.31	2.90	3.36
9	1.83	2.26	2.82	3.25
10	1.81	2.23	2.76	3.17
11	1.80	2.20	2.72	3.11
12	1.78	2.18	2.68	3.05
13	1.77	2.16	2.65	3.01
14	1.76	2.14	2.62	2.98
15	1.75	2.13	2.60	2.95
16	1.75	2.12	2.58	2.92
17	1.74	2.11	2.57	2.90
18	1.73	2.10	2.55	2.88
19	1.73	2.09	2.54	2.86
20	1.73	2.09	2.53	2.85
30	1.70	2.04	2.46	2.75
40	1.68	2.02	2.42	2.70
60	1.67	2.00	2.39	2.66
∞	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabelle 2: $(1 - \alpha)$ -Quantile $t_{df;1-\alpha}$ der t -Verteilung

df	$1 - \alpha$					
	0.01	0.025	0.05	0.95	0.975	0.99
1	0.0001	0.001	0.004	3.84	5.02	6.62
2	0.020	0.051	0.103	5.99	7.38	9.21
3	0.115	0.216	0.352	7.81	9.35	11.3
4	0.297	0.484	0.711	9.49	11.1	13.3
5	0.554	0.831	1.15	11.1	12.8	15.1
6	0.872	1.24	1.64	12.6	14.4	16.8
7	1.24	1.69	2.17	14.1	16.0	18.5
8	1.65	2.18	2.73	15.5	17.5	20.1
9	2.09	2.70	3.33	16.9	19.0	21.7
10	2.56	3.25	3.94	18.3	20.5	23.2
11	3.05	3.82	4.57	19.7	21.9	24.7
12	3.57	4.40	5.23	21.0	23.3	26.2
13	4.11	5.01	5.89	22.4	24.7	27.7
14	4.66	5.63	6.57	23.7	26.1	29.1
15	5.23	6.26	7.26	25.0	27.5	30.6
16	5.81	6.91	7.96	26.3	28.8	32.0
17	6.41	7.56	8.67	27.6	30.2	33.4
18	7.01	8.23	9.39	28.9	31.5	34.8
19	7.63	8.91	10.1	30.1	32.9	36.2
20	8.26	9.59	10.9	31.4	34.2	37.6
25	11.5	13.1	14.6	37.7	40.6	44.3
30	15.0	16.8	18.5	43.8	47.0	50.9
40	22.2	24.4	26.5	55.8	59.3	63.7
50	29.7	32.4	34.8	67.5	71.4	76.2
60	37.5	40.5	43.2	79.1	83.3	88.4
70	45.4	48.8	51.7	90.5	95.0	100.4
80	53.5	57.2	60.4	101.9	106.6	112.3
90	61.8	65.6	69.1	113.1	118.1	124.1
100	70.1	74.2	77.9	124.3	129.6	135.8

Tabelle 3: $(1 - \alpha)$ -Quantile $c_{df;1-\alpha}$ der χ^2 -Verteilung

		df_1								
df_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.36	19.37	19.38	
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.88	8.84	8.81	
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.78	
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.92	2.85	2.80	
13	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.84	2.77	2.72	
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.77	2.70	2.65	
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.70	2.64	2.59	
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.52	2.45	2.40	
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.34	2.27	2.21	

df_2	df_1							
	10	11	12	14	16	20	24	30
1	242	243	244	245	246	248	249	250
2	19.39	19.40	19.41	19.42	19.43	19.44	19.45	19.46
3	8.78	8.76	8.74	8.71	8.69	8.66	8.64	8.62
4	5.96	5.93	5.91	5.87	5.84	5.80	5.77	5.74
5	4.74	4.70	4.68	4.64	4.60	4.56	4.53	4.50
6	4.06	4.03	4.00	3.96	3.92	3.87	3.84	3.81
7	3.63	3.60	3.57	3.52	3.49	3.44	3.41	3.38
8	3.34	3.31	3.28	3.23	3.20	3.15	3.12	3.08
9	3.13	3.10	3.07	3.02	2.98	2.93	2.90	2.86
10	2.97	2.94	2.91	2.86	2.82	2.77	2.74	2.70
11	2.86	2.82	2.79	2.74	2.70	2.65	2.61	2.57
12	2.76	2.72	2.69	2.64	2.60	2.54	2.50	2.46
13	2.67	2.63	2.60	2.55	2.51	2.46	2.42	2.38
14	2.60	2.56	2.53	2.48	2.44	2.39	2.35	2.31
15	2.55	2.51	2.48	2.43	2.39	2.33	2.29	2.25
20	2.35	2.31	2.28	2.23	2.18	2.12	2.08	2.04
30	2.16	2.12	2.00	2.04	1.99	1.93	1.89	1.84

Tabelle 4: $(1 - \alpha)$ -Quantile $f_{df_1, df_2; 1-\alpha}$ der F -Verteilung für $\alpha = 0.05$