Zur Lösung jeder Aufgabe gehört der **vollständige, sorfältig zu Papier gebrachte und nachvollziehbare** Rechenweg. Jede nicht triviale Behauptung sollte (kurz) begründet werden.

1. Wir betrachten die Gleichung $K_n \;=\; K_0\, q^n + E\, \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

   (a) Lösen Sie die Gleichung nach n auf. $\boxed{2}$

   (b) Bestimmen Sie $q = q(K_0, K_2, E)$ allgemein, falls $n = 2$ ist. $\boxed{2}$

   (c) Offensichtlich kann q als Nullstelle eines Polynomes vom Grad $n+1$ geschrieben werden, oder? Zeigen Sie, dass q sogar Nullstelle eines Polynoms vom Grad n ist und schreiben Sie dieses Polynom $f(q)$ auf. $\boxed{3}$

   (d) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Lösung von $f(q) = 0$ und berechnen Sie q_1 falls $q_0 = 1$ (Startwert) ist. $\boxed{5}$

2. Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}.$$

   (a) Skizzieren Sie die Menge M. $\boxed{4}$

   (b) Ist die Menge M konvex? Begründen Sie Ihre Behauptung (z.B. durch einen passenden Satz im Skript). $\boxed{2}$

3. Sei a ein reeller Parameter mit $0 < a < 1$. Wir betrachten die beiden Funktionen

$$f_a(x) \;=\; x^3 - x^2 - ax - a \qquad \text{und} \qquad F_a(x) \;=\; 1 + a\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right).$$

   (a) Zeigen Sie, dass das Nullstellenproblem $f_a(x) = 0$ äquivalent zum Fixpunktproblem $x = F_a(x)$ ist. $\boxed{2}$

   (b) Beweisen Sie, dass f_a auf dem Intervall $[1, 2]$ genau eine Nullstelle hat. $\boxed{2}$

   (c) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur approximativen Bestimmung der Nullstelle(n) von f_a. $\boxed{2}$

   (d) Zeigen Sie, dass $F_{0.5}$ das Intervall $I = [1, 2]$ auf sich abbildet. Ist $F_{0.5}$ eine Kontraktion auf I? Begründung! $\boxed{4}$

   (e) Zeigen Sie, dass $F_{0.2}$ das Intervall $I = [1, 2]$ auf sich abbildet. Ist $F_{0.2}$ eine Kontraktion auf I? Begründung! $\boxed{4}$

4. Sei $F : [a, b] \to [a, b]$ eine stetige kontraktive Funktion mit der Kontraktionskonstanten α, $x_{n+1} = F(x_n)$ die entsprechende Fixpunktiteration, $x_{fix} \in [a, b]$ der Fixpunkt und $x_0 \in [a, b]$. Beweisen Sie, dass für alle $n \geq 1$ Folgendes gilt: $\boxed{5}$

$$\frac{x_{n+1} - x_{fix}}{x_{n-1} - x_{fix}} \;\leq\; \alpha^2$$

5. Betrachten Sie die Funktion (a eine beliebige Konstante):

$$f(x_1, x_2) \;=\; \frac{1}{2}x_1^2 - x_1 + ax_2(x_1 - 1) - \frac{1}{3}x_2^3 + a^2x_2^2.$$

   (a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle stationären Punkte, falls $a = 2$ ist. $\boxed{3}$

   (b) Bestimmen Sie alle stationären Punkte (in Abhängigkeit von a) und klassifizieren Sie diese (in Abhängigkeit von a). $\boxed{6}$

6. Ein Unternehmen verwendet Kapital K, Arbeit A und Land L, um Q Einheiten eines Gutes zu produzieren, wobei

$$Q(K, A, L) \;=\; K^{1/4} + A^{1/2} + L^{1/4}.$$

   Weiterhin seien p der Verkaufspreis pro Einheit, k der Preis pro Einheit Kapital, a der Preis pro Einheit Arbeit und l der Preis pro Einheit Land.

   (a) Wie lautet die Gewinnfunktion des Unternehmens? Bestimmen Sie die Werte von K, A und L, die den Gewinn maximieren. $\boxed{5}$

   (b) Zeigen Sie: $\dfrac{\partial Q^*}{\partial k} = -\dfrac{\partial K^*}{\partial p}$. $\boxed{3}$

7. Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrll} \text{maximiere Zielfunktion} & f(x_1, x_2) = & x_2 - e^{-x_1} & \\ \text{Nebenbedingungen} & g_1(x_1, x_2) = & e^{x_1} + e^{x_2} & \leq 6 \\ & g_2(x_1, x_2) = & x_1 - x_2 & \leq 0 \end{array}$$

   (a) Skizzieren Sie die zulässige Menge S. $\boxed{3}$

   (b) Schreiben Sie die Kuhn-Tucker-Bedingungen des Problems auf. $\boxed{3}$

   (c) Bestimmen Sie die Lösung. Systematisch und nachvollziehbar vorgehen! $\boxed{6}$

8. Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrll} \text{maximiere Zielfunktion} & f(x_1, x_2) = & 2 - (x_1 - 1)^2 - e^{x_2^2} & \\ \text{Nebenbedingung} & g(x_1, x_2) = & x_1^2 + x_2^2 & \leq a(>0) \end{array}$$

   (a) Schreiben Sie die Kuhn-Tucker-Bedingungen für die Lösung des Problems auf und bestimmen Sie die einzige mögliche Lösung (Fallunterscheidung $a \in (0, 1)$ und $a \geq 1$). $\boxed{6}$

   (b) Der Optimalwert f^* von f wird von a abhängen. Berechnen Sie $\frac{df^*(a)}{da}$. $\boxed{4}$

9. Sei $y'(x) + a(x)y(x) \;=\; f(x, y(x))$ eine Differentialgleichung.

   (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung falls $a(x) = a$ und $f(x, y) = 0$. $\boxed{3}$

   (b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung falls $a(x) = -3$ und $f(x, y) = -x$. $\boxed{3}$

   (c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung falls $a(x) = 3$ und $f(x, y) = xy^2$.
   Hinweis: Substituieren Sie $\theta(x) := y(x)^{-1} = 1/y(x)$ $\boxed{5}$

10. Sei $y'(x) + a(x)y(x) \;=\; 0$ eine Differentialgleichung und $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei beliebige Lösungen. Beweisen oder widerlegen Sie:

   (a) $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ ist stets eine Lösung der Differentialgleichung. $\boxed{2}$

   (b) $y(x) = y_1(x) \cdot y_2(x)$ ist stets eine Lösung der Differentialgleichung. $\boxed{2}$