Universität Basel
WWZ

Fortgeschrittene Mathematik

Dr. Thomas Zehrt

Problem 3:

Sei $y'(x) = f(x, y(x))$ eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung mit Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$.

Finden Sie die Lösung dieses Anfangswertproblems bzw. eine möglichst gute Näherungslösung.

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation und Beispiele

Gewöhnliche Differentialgleichungen sind Gleichungen, die eine Funktion in Relation zu ihren Ableitungen setzt. Viele natürliche Prozesse lassen sich durch gewöhnliche Differentialgleichungen mathematisch modellieren. Wir wollen Methoden kennenlernen, um Lösungen von (einfachen) gewöhnlichen Differentialgleichungen der Gestalt $y'(x) = f(x, y(x))$ zu bestimmen.

Modelle der normalen Vermehrung Sei x die Zeit und $y = y(x)$ die Anzahl Individuen in einer Population. Wie üblich wird durch Δx die Änderung der Grösse x bezeichnet. Weiterhin ist $\Delta y(x, \Delta x) = y(x + \Delta x) - y(x)$.

Beobachtet man gewisse Populationen, dann stellt man fest, dass der Zuwachs $\Delta y(x, \Delta x)$ vom Zeitpunkt x auf den Zeitpunkt $x + \Delta x$ oft proportional

- zur Anzahl der Individuen $y(x)$ zum Zeitpunkt x und
- zur Länge der verstrichenen Zeit Δx

ist. Es existiert also eine Konstante k, so dass

$$\boxed{\Delta y(x, \Delta x) \; = \; y(x + \Delta x) - y(x) \; = \; k \cdot y(x) \cdot \Delta x}$$

Unser Ziel ist es natürlich, die Entwicklung der Population zu verstehen und sogar vorherzusagen. Wir würden also gerne die Funktion $y(x)$ explizit aus dieser Relation bestimmen. Dazu stehen uns zwei Wege offen.

1. Annahme: Die Zeit x ändert sich in diskreten und gleichgrossen Schritten (z.B. von Jahr zu Jahr). Wir setzen also $\Delta x = 1$.

   Wir erhalten dann eine Differenzengleichung $y(x + 1) - y(x) \; = \; k \cdot y(x)$. Nutzt man noch die in diesem Fall üblichen Notationen $y_x = y(x)$ und $y_{x+1} = y(x + 1)$ so ergibt sich $y_{x+1} - y_x \; = \; k \cdot y_x$ oder $y_{x+1} \; = \; (1 + k) \cdot y_x$. Das ist eine lineare Differenzengleichung 1. Ordnung, die wir mit den Methoden aus den Vorlesungen Mathematik 1 und 2 (oder durch direkte Rechnung) allgemein lösen können:

   $$y_x \; = \; (1 + k)^x \cdot y_0.$$

   In diesem Fall können wir den Parameter k als relative Populationsänderung zwischen zwei aufeinanderfolgende Messungen vestehen:

   $$k \; = \; \frac{y_{x+1} - y_x}{y_x}.$$

2. Annahme: Die Zeit x ändert sich stetig, die Funktion $y = y(x)$ ist differenzierbar und die obige Änderungsregel ist eher für (sehr) keine Änderungen Δx der Zeit richtig. In diesem Fall können wir den Differenzenquotienten durch den Differentialquotienten ersetzen:

   $$\frac{\Delta y(x, \Delta x)}{\Delta x} \; \approx \; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x, \Delta x)}{\Delta x} \; = \; \frac{dy(x, \Delta x)}{dx} \; = \; y'(x)$$

und wir erhalten dann eine so genannte gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y'(x) \quad = \quad k \cdot y(x)$$

und wir suchen eine Funktion, die sich beim Ableiten ver-k-facht. Die allgemeine Lösung ist hier:

$$y(x) \quad = \quad e^{k \cdot x} \cdot y_0$$

und die Zahl k kann als (konstante) Wachstumsrate der Funktion $y(x)$ verstanden werden:

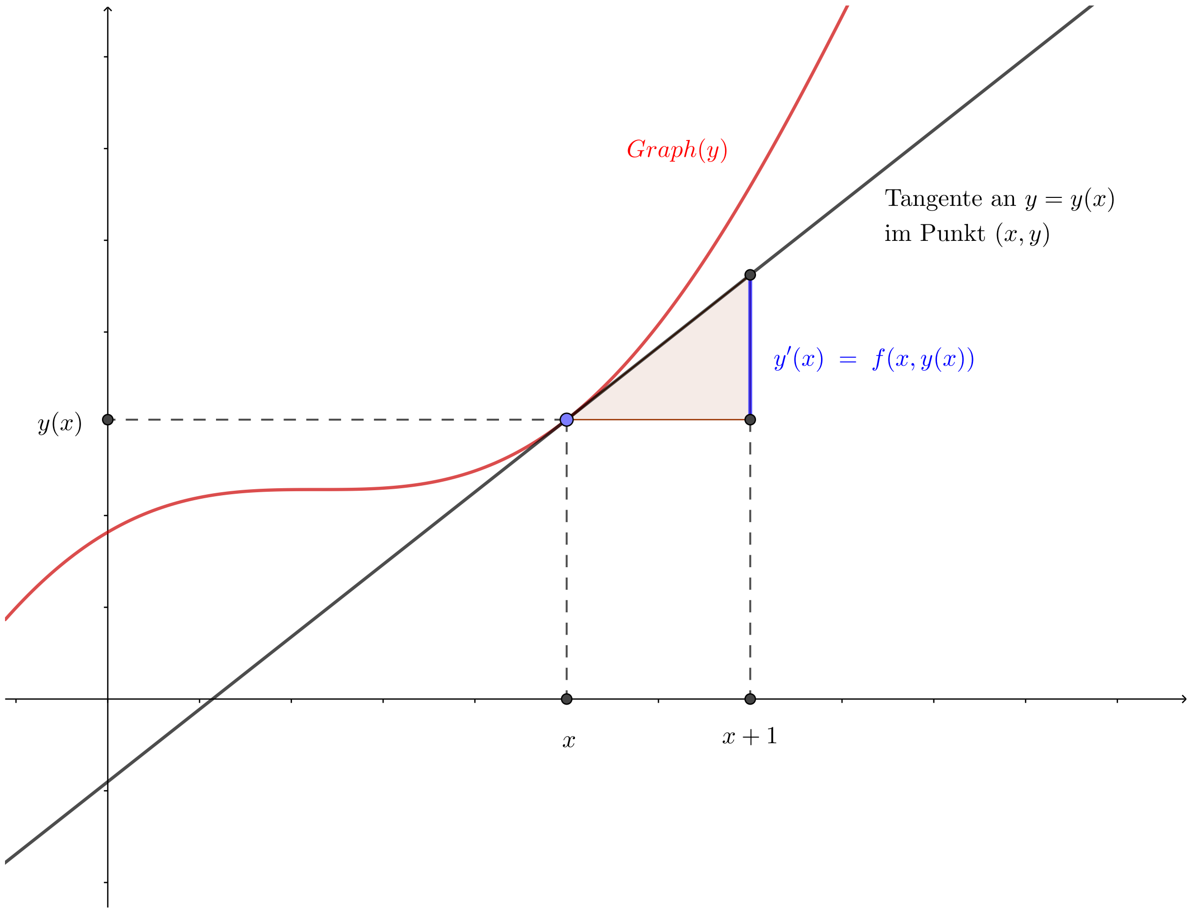
$$k \quad = \quad \frac{y'(x)}{y(x)}.$$

2 Mathematisches Vorwissen

2.1 Geometrische Interpretation von $y'(x) = f(x, y(x))$

Richtungsfeld und Feldlinien

$$\underbrace{y'(x)}_{\substack{\text{Steigung der}\\ \text{Lösungsfunktion im Punkt } x}} \quad = \quad \underbrace{f(x, y(x))}_{\substack{\text{Funktionswert von f}\\ \text{an der Stelle } (x, y(x))}}$$



In der (x, y)-Ebene bedeutet das: Läuft der Graph einer Lösung $y(x)$ durch den Punkt (x, y), so muss er dort die Steigung $f(x, y)$ haben.

Ist also die Funktion f gegeben und zeichnet man in jedem Punkt der (x, y)-Ebene ein kurzes Tangentenstück mit der Steigung $f(x, y) = \tan(\tau)$, so entsteht das sogenannte Richtungsfeld der DGL. Diese Tangentenstücke geben in jedem Punkt die Steigung der Lösungskurve an, d.h. eine Lösungskurve ist eine Feldlinie des Richtungsfeldes.

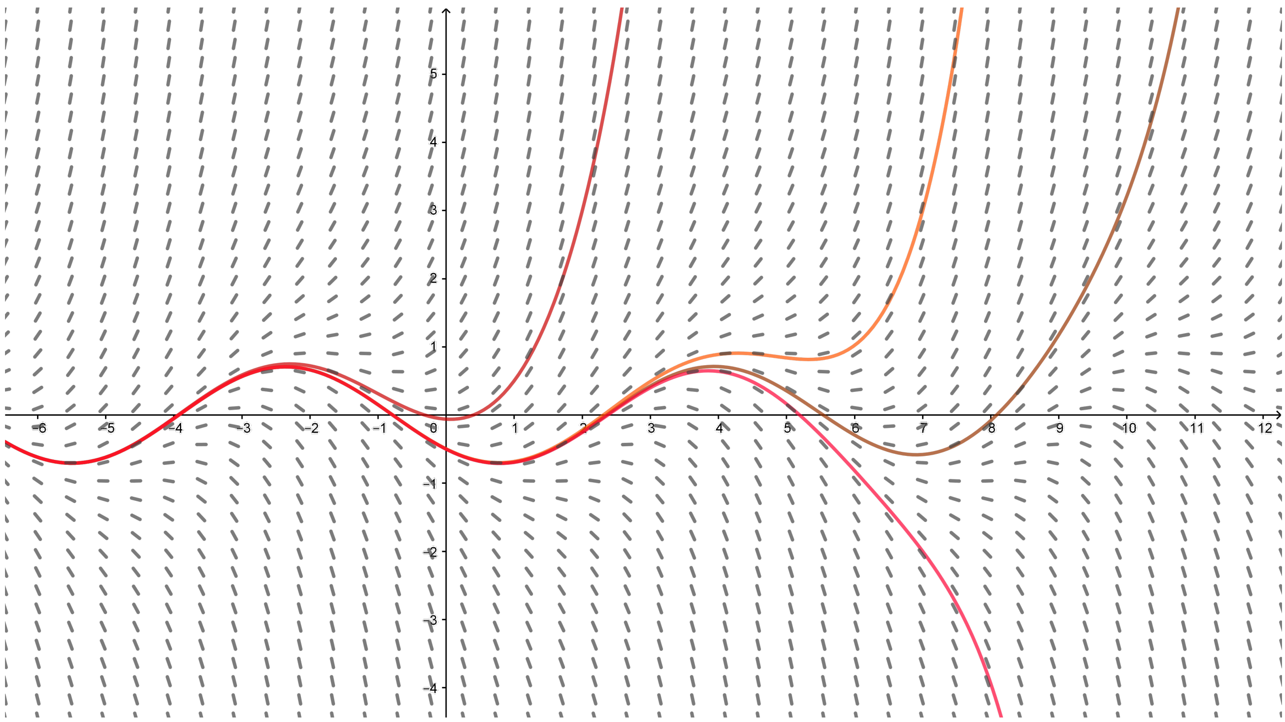
Ein weiteres hilfreiches Mittel zum besseren geometrischen Verständnis sind die sogenannten Isoklinen des Richtungsfeldes, d.h. die Niveaulinien

$$f(x, y) \quad = \quad c$$

für einen beliebigen Wert $c \in \mathbb{R}$. Das sind also alle Punkte (die stets eine Kurve bilden) in der $x - y$-Ebene, mit dem gleichen Anstieg c des zugehörigen Linienelements. Hinreichend viele Isoklinen mit den zugehörigen Linienelementen vermitteln einen guten optischen Eindruck vom Verlauf der Lösungskurven.

Beispiel 2.1 *Die folgende Skizze stellen das Richtungsfeld bzw. drei Lösungskurven (rot) der DGL* $y' = \sin(x) + y$ *dar. Die Lösungskurven folgen dabei dem durch die Differentialgleichung vorgegebenen Richtungsfeld.*

Die Isoklinen haben die implizite Gestalt $\sin(x) + y = c$ *oder* $y = c - \sin(x)$.



2.2 Einparametrige Kurvenscharen

Wir betrachten eine sogenannte einparametrige Kurvenschar

$$\phi(x, y, c) \;=\; 0$$

in der $x-y-$Ebene, d.h. für jede sinnvolle Wahl des Parameters $c \in \mathbb{R}$ bezeichnet $\phi(x, y, c) = 0$ eine (implizite) Kurve in dieser Ebene.

Beispiel 2.2 *Durch die Gleichung*

$$\phi(x, y, C) = x^2 + y^2 - c^2 \;=\; 0$$

ist für jede reelle Zahl c ein Kreis in der $x-y-$Ebene vom Radius $|c|$ gegeben.

Jeder einparametrigen Kurvenschar der $x - y-$Ebene kann man eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung zuordnen. Dabei müssen wir aber voraussetzen, dass sich y (implizit und für alle x) als Funktion von x schreiben lässt. Dann wird die Gleichung $\phi(x, y(x), c) = 0$ mittels Kettenregel nach x abgeleitet:

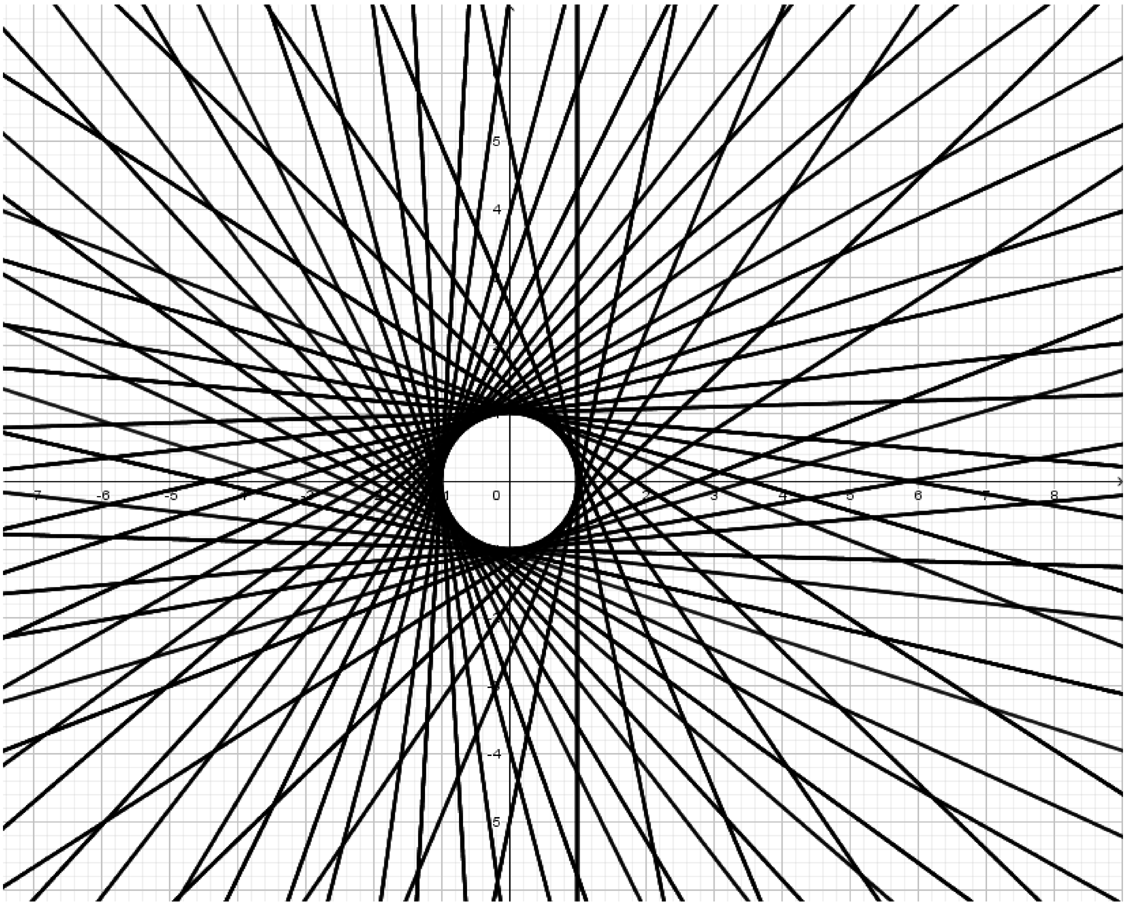
$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx}\,\phi(x, y(x), c) \\ &= \phi_x(x, y(x), c) \cdot \underbrace{\frac{dx}{dx}}_{=1} + \phi_y(x, y(x), c) \cdot \frac{dy}{dx} + \phi_c(x, y(x), c) \cdot \underbrace{\frac{dc}{dx}}_{=0} \\ &= \phi_x(x, y(x), c) + \phi_y(x, y(x), c) \cdot y'(x). \end{aligned}$$

Indem man nun aus den beiden Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} 0 &= \phi(x, y, c) \\ 0 &= \phi_x(x, y, c) + \phi_y(x, y, c) \cdot y' \end{aligned}}$$

den Scharparameter c eliminiert, erhält man die DGL der Kurvenschar.

Beispiel 2.3 *Wir betrachten die Kurvenschar (eine Familie von Geraden)* $\phi(x, y, c) = x\cos(c) + y\sin(c) - 1 = 0$



und erhalten die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= x\cos(c) + y\sin(c) - 1 \\ 0 &= \cos(c) + \sin(c)\, y'. \end{aligned}$$

Aus beiden Gleichungen versuchen wir nun den Parameter c zu eliminieren und erhalten die Differentialgleichung der Kurvenschar:

$$1 + y'^2 = (y - xy')^2.$$

Achtung: Eigentlich ist das keine Differentialgleichung, denn wir wollen unter einer Differentialgleichung 1. Ordnung eine Gleichung der Form $y' = f(x, y)$ verstehen, d.h. dass sich y' (eindeutig) isolieren lassen muss. Versuchen Sie, die obige differentialgleichungsartige Gleichung in die gewünschte Form zu bringen!

3 Lösungswege

3.1 Direkte Lösungsverfahren für spezielle Klassen

3.1.1 Exakte Differentialgleichungen

Exakte Differentialgleichungen entstehen durch Differentiation einer Gleichung $U(x, y) = konstant$ nach der Kettenregel. Wir gehen hier wieder davon aus, dass durch diese Gleichung eine Funktion $y = y(x)$ implizit definiert wir. Sie haben die Form

implizit	$U_x(x, y) + U_y(x, y)\, y' = 0$
explizit ($U_y \neq 0$)	$y' = -\dfrac{U_x(x, y)}{U_y(x, y)}$

Nur sieht man diesen Differentialgleichungen im Allgemeinen ihr Exaktheit nicht einfach an.

Beispiel 3.1 $2x+3\cos(y)+(2y-3x\sin(y))\, y' = 0$ *ist exakt, denn sie ensteht aus der Gleichung* $U(x, y) = x^2 + 3x\cos(y) + y^2 = c$ *durch Ableiten nach der Kettenregel. Beweisen Sie das!*

Nun wollen wir den Begriff einer exakten DGL formulieren und ein einfaches Testkriterium angeben.

Definition 3.1 *Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und A, B stetig differenzierbare Funktionen auf G. Die Differentialgleichung*

$$A(x, y) + B(x, y)\, y' \;=\; 0$$

heisst exakt, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion U auf G gibt, so dass auf G die folgenden Gleichungen gelten:

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x} = A \quad \textit{und} \quad U_y = \frac{\partial U}{\partial y} = B.$$

Satz 1 (Exaktheitstest) *Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet (d.h. G hat keine Löcher). Dann ist die DGL*

$$A(x, y) + B(x, y)\, y' \;=\; 0$$

genau dann exakt auf G, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial y} A(x, y) \;=\; \frac{\partial}{\partial x} B(x, y)$$

für alle $(x, y) \in G$ erfüllt ist.

....

Lösungsverfahren für exakte DGL $\mathbf{A(x,y) + B(x,y)\, y' = 0}$

1. $\dfrac{\partial}{\partial y} A(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x} B(x,y)$ auf G bestätigen.
2. Über den Ansatz $U_x = A$ und $U_y = B$ eine Stammfunktion bestimmen.
   (a) A unbestimmt nach x integrieren:
   $$U(x,y) \;=\; \int A(x,y)dx + c(y).$$
   (b) U partiell nach y differenzieren, mit B gleichsetzen und so $c'(y)$ bestimmen.
   $$U_y(x,y) \;=\; \left(\int A(x,y)dx\right)_y + c'(y) \;=\; B(x,y).$$
   (c) $c(y)$ durch Integration nach y aus $c'(y)$ bestimmen.

   Die allgemeine implizite Lösung ist nun: $U(x,y) = konstant$.
3. Diese Gleichung -falls möglich- nach y auflösen und den Definitionsbereich bestimmen. Mittels Anfangsbedingung die Konstante bestimmen.

....

Beispiel 3.2

$$\underbrace{2xy}_{=:A} + \underbrace{(2y + x^2)}_{=:B}\, y' = 0 \qquad y(0) = 1$$

1. $2x = A_y = B_x$

2. $U_x = 2xy$ *und* $U_y = 2y + x^2$

(a)
$$U(x,y) \;=\; \int 2xydx + c(y) \qquad = \; x^2y + c(y)$$

(b)
$$U_y(x,y) \;=\; \left(x^2y\right)_y + c'(y) \;=\; x^2 + c'(y) \;=\; \underbrace{2y + x^2}_{B(x,y)} \Rightarrow c'(y) \;=\; 2y$$

(c) $c(y) = y^2$ *und allgemeine impilzite Lösung:* $U(x,y) = x^2y + y^2 = c$

3. Anfangsbedingung $x = 0, y = 1 \Rightarrow c = 1$
Spezielle impilzite Lösung: $U(x,y) = x^2y + y^2 = 1$
Spezielle explizite Lösung: $y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^4 + 4} - x^2\right)$

3.1.2 Trennbare Differentialgleichungen

Trennbare Differentialgleichungen haben (nach eventueller Umformung) die Gestalt

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = y' = f(x) \cdot g(y)}$$

mit stetigen, auf Intervallen $I \subset \mathbb{R}$ und $J \subset \mathbb{R}$ definierten Funktionen f und g.

Fall 1: $\mathbf{g(y) \neq 0}$

Durch Trennung der Variablen ergibt sich eine exakte Differentialgleichung mit der Stammfunktion $U(x, y)$:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x) - \frac{1}{g(y)}\, y' \\ U(x,y) &= \int_{x_0}^{x} f(z)\, dz - \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(z)}\, dz \end{aligned}$$

Aufgabe 3.1 *Beweisen Sie diese Darstellung der Stammfunktion, d.h. lösen Sie die obige DGL nach dem Schema für exakte Differentialgleichungen.*

Fall 2: $\mathbf{g(z) = 0}$ für ein $\mathbf{z \in J}$

Dann ist $y(x) = z$ für alle $x \in I$ eine konstante Lösung der Differentialgleichung.

....

Lösungsverfahren für trennbare DGL $\mathbf{\frac{dy}{dx} = y' = f(x) \cdot g(y)}$

1. Alle Nullstellen $z \in J$ von g bestimmen. $y(x) = z$ ist jeweils eine konstante Lösung.
2. Trennung der Variablen für $g(y) \neq 0$:
   ,,y und dy nach links" und ,,x und dx nach rechts"
   $$\frac{1}{g(y)}\,dy \quad = \quad f(x)\,dx$$
3. Jede Seite bestimmt integrieren:
   $$G(y) := \int \frac{1}{g(y)}\,dy \qquad F(x) := \int f(x)\,dx$$
   Die allgemeine Lösung lautet dann: $G(y) - F(x) = c$.
4. Diese Gleichung -falls möglich- nach y auflösen und den Definitionsbereich bestimmen. Mittels Anfangsbedingung die Konstante c bestimmen.

....

Beispiel 3.3

$$\frac{dy}{dx} \;=\; y' = y^2 \qquad y(0) = 1$$

1. *Nullstellen $g(0) = 0$: $y(x) = 0$ ist eine konstante Lösung.*
2. *Trennung der Variablen für $g(y) \neq 0$:*
   $$\frac{1}{y^2}\,dy \quad = \quad dx$$
3. $$G(y) := \int \frac{1}{y^2}\,dy \;=\; -y^{-1} \qquad F(x) := \int dx \;=\; x$$
   allgemeine Lösung: $-y^{-1} - x = c$ oder $y(x) = -\dfrac{1}{x+c}$.
4. *$y(0) = 1$ erzwingt $c = -1$ und die Lösung ist $y(x) = \dfrac{1}{1-x}$*

3.1.3 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung sind von der Form

$$\boxed{y' + a(x)\, y = f(x)}$$

mit auf einem Intervall I erklärten Funktionen a und f. Die rechte Seite f heisst Störfunktion oder Störglied und die DGL heisst homogen, falls $f = 0$ ist, andernfalls inhomogen. Die der DGL zugeordnete homogene DGL ist $y' + a(x)\, y = 0$.

Lösung der homogenen linearen DGL

Satz 2 *Ist die Funktion a auf I stetig, so ist die vollständige allgemeine Lösung der homogenen DGL $y' + a(x)\, y = 0$ gegeben durch*

$$y_h(x) \quad = \quad C \cdot e^{-A(x)}$$

mit (irgend)einer Stammfunktion $A(x) = \int a(x)dx$.
Die Lösung des Anfangswertproblems $y' + a(x)\, y = 0$ mit $y(x_0) = y_0$ ist dann

$$y_h(x) \quad = \quad y_0 \cdot e^{-A(x)}$$

mit der konkreten Stammfunktion $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(z)dz$.

Beweis:

- $y \neq 0$: dann ist die homogene DGL trennbar und man erhält

$$\begin{aligned}
& y' + a(x)\, y = 0 \\
\Rightarrow\quad & \frac{dy}{y} = -a(x)dx \\
\Rightarrow\quad & \ln(|y|) = -\int a(x)dx + C_1 \;=\; -A(x) + C_1 \\
\Rightarrow\quad & y = \underbrace{e^{C_1}}_{=:C} \cdot e^{-A(x)}
\end{aligned}$$

- $y = 0$: ist für $C = 0$ mit in der obigen Lösung enthalten.
- Für die Lösung des Anfangswertproblems gilt zusätzlich:

$$y_h(x_0) \;=\; y_0 \cdot e^{-A(x_0)} \;=\; y_0 \cdot e^0 \;=\; y_0.$$

$\square$

Lösung der inhomogenen linearen DGL Die vollständige allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL ist stets von der Gestalt

$$y(x) \;=\; y_h(x) + y_p(x) \;=\; Ce^{-A(x)} + y_p(x).$$

Dabei ist y_p **irgendeine** partikuläre Lösung der inhomogenen DGL und $y_h(x)$ die allgemeine Lösung der zugeordneten homogenen DGL

> **denn** seien y_1 und y_2 beliebige Lösungen der inhomogenen DGL. Dann ist die Differenz $y_1 - y_2$ stets eine Lösung der homogenen Gleichung, d.h. zwei beliebige Lösungen unterscheiden sich stets um irgendeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung.

Wir benötigen also nur noch eine einzige Lösung der inhomogenen DGL und machen einen Ansatz:

$$y(x) = y_p(x) = C(x) \cdot y_h(x),$$

d.h. wir betrachten die Konstante C in der Lösung der zugehörigen homogenen DGL als Funktion in x. Diesen Ansatz setzen wir in die DGL ein:

$$\begin{aligned}
f(x) &= y' + a(x)\, y \\
&= (C(x) \cdot y_h(x))' + a(x)\, C(x) \cdot y_h(x) \\
&= C'(x) \cdot y_h(x) + C(x) \cdot y_h'(x) + a(x)\, C(x) \cdot y_h(x) \\
&= C'(x) \cdot y_h(x) + C(x) \underbrace{(y_h'(x) + a(x)\, y_h(x))}_{=0} \\
&= C'(x) \cdot y_h(x)
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
C'(x) &= \frac{f(x)}{y_h(x)} \\
C(x) &= \int \frac{1}{y_h(x)} f(x)\, dx \;=\; \int e^{A(x)} f(x)\, dx, \\
y_p(x) &= C(x) \cdot y_h(x) \;=\; \left(\int e^{A(x)} f(x)\, dx\right) e^{-A(x)}
\end{aligned}$$

mit $y_h(x) = e^{-A(x)}$. Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz 3 *Die lineare DGL besitzt auf dem Intervall I die vollständige allgemeine Lösung der inhomogenen DGL gegeben durch*

$$y(x) \;=\; C \cdot e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int e^{A(x)}\, f(x)\, dx \;=\; e^{-A(x)} \left(\int e^{A(x)}\, f(x)\, dx + C \right)$$

mit (irgend)einer Stammfunktion $A(x) = \int a(x)dx$.
Die Lösung des Anfangswertproblems $y' + a(x)\, y = f(x)$ mit $y(x_0) = y_0$ ist dann

$$y(x) \;=\; y_0 \cdot e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{A(z)}\, f(z)\, dz \;=\; e^{-A(x)} \left(\int_{x_0}^{x} e^{A(z)}\, f(z)\, dz + y_0 \right)$$

mit der konkreten Stammfunktion $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(z)dz$.

Spezieller Ansatz Ist die Funktion $a(x) = \textit{konstant}$ und die rechte Seite f von einer der folgenden Formen:

$$f(x) = \begin{cases} p(x) \\ p(x) \cdot e^{kx} \\ p(x) \cdot \sin(kx) + q(x) \cdot \cos(kx) \end{cases} .$$

mit Polynomen p und q, so führt ein Ansatz vom Typ der rechten Seite mit unbestimmten Koeffizienten oft schneller zu einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung.

....

Lösungsverfahren für lineare DGL $\mathbf{y' + a(x)y = f(x)}$

1. Berechne eine Stammfunktion $A(x) = \int a(x)\, dx$ und $y_h(x) = c \cdot e^{-A(x)}$.
2. Bestimme y_p entweder duch einen Ansatz vom Typ der rechten Seite oder durch Variation der Konstanten oder direkt mit der Lösungsformel.
3. Allgemeine Lösung ist
$$y(x) \;=\; y_p(x) + c \cdot e^{-A(x)}.$$
4. Mittels Anfangsbedingung die Konstante c bestimmen.

....

Beispiel 3.4 *Wir betrachten die lineare DGL:*

$$I'(x) + 2\, I(x) \;=\; \cos(3x).$$

1. *$a(x) = 2$, also $A(x) = \int 2\, dx \;=\; 2x$ und $I_h(x) = c \cdot e^{-2x}$.*
2. *Ansatz vom Typ der rechten Seite ($p, q \in \mathbb{R}$):*
$$I_p(x) \;=\; p\cos(3x) + q\sin(3x) \quad \textit{also} \quad I_p'(x) \;=\; -3p\sin(3x) + 3q\cos(3x)$$
Einsetzen in die DGL:
$$\begin{aligned} I'(x) + 2\, I(x) &= -3p\sin(3x) + 3q\cos(3x) + 2p\cos(3x) + 2q\sin(3x) \\ &= (3q + 2p)\cos(3x) + (2q - 3p)\sin(3x) \\ &= \cos(3x). \end{aligned}$$
Also:
$$3q + 2p = 1, \quad 2q - 3p = 0 \quad \textit{also} \quad p = \frac{2}{13}, \quad q = \frac{3}{13}$$
$$I_p(x) \;=\; \frac{2}{13}\cos(3x) + \frac{3}{13}\sin(3x)$$
3. *Allgemeine Lösung ist*
$$I(x) \;=\; \frac{2}{13}\cos(3x) + \frac{3}{13}\sin(3x) + c \cdot e^{-2x}$$

3.2 Numerische Lösungsverfahren für Anfangswertprobleme

Nehmen wir an, dass wir ein Anfangswertproblem $y'(x) = f(x, y(x))$ mit $y(a) = y_0$ auf dem Intervall $[a, b]$ zu lösen hätten. Im Allgemeinen wird eine explizite Lösung scheitern, da die Funktion f zu kompliziert ist. Wir wollen hier kurz das so genannte Euler-Verfahren besprechen.

Zunächst wird unser Problem diskretisiert. Für ein $N \in \mathbb{N}$ definieren wir die Schrittweite

$$h = \frac{b-a}{N}$$

sowie $N+1$ Gitterpunkte $x_i = a + ih$ für $i = 0, 1, 2, \ldots, N$. Natürlich wird das Intervall $[a, b]$ dabei in N gleichgrosse Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ $i = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ eingeteilt. Wir nennen dieses Vorgehen auch äquidistante Diskretisierung.

Ziel:

In den Gitterpunkten x_i sollen Näherungslösungen y_i für die exakte Lösung $y(x_i)$ gefunden werden:

$$y_i \approx y(x_i).$$

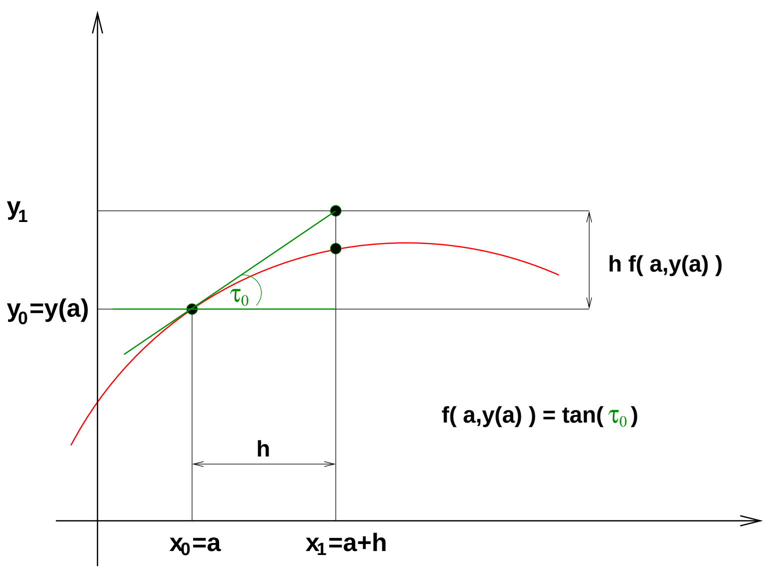
Vorgehen:

1. Im Punkt $x_0 = a$ kennen wir den exakten Wert der Lösungsfunktion $y(x)$ durch die Anfangsbedingung: $y(a) = y_0$. Somit kennen wir dort auch den exakten Wert der Ableitung:

$$y'(x_0) = y'(a) = f(a, y(a)) = f(a, y_0).$$

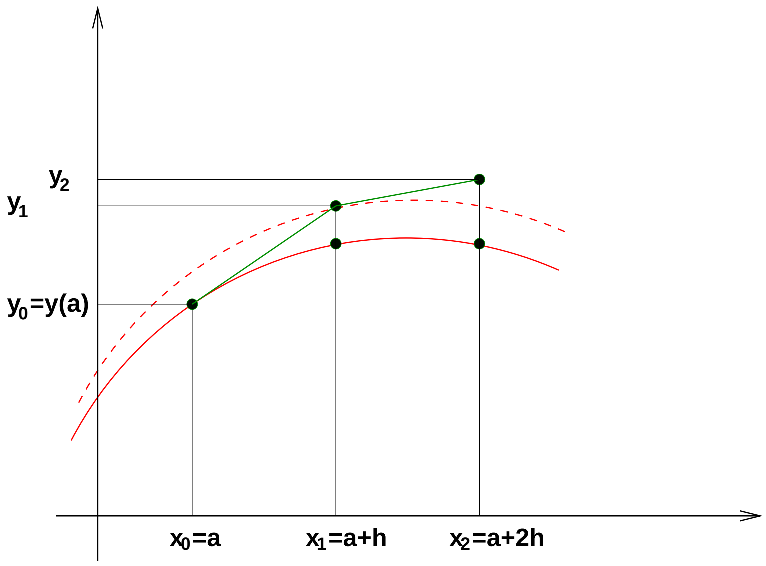
2. Wir hoffen nun, dass die Steigung des Richtungsfeldes in der Umgebung des Punktes $(a, y(a))$ nur wenug von $y'(a)$ abweicht und verwenden daher diesen Anstieg um zu einer Näherung y_1 von $y(x_1) = y(a+h)$ zu gelangen:

$$y(x_1) \approx y_1 = y_0 + hf(x_0, y(x_0)) = y_0 + hf(a, y(a)).$$



3. Ausgehend von der Näherung $y_1 \approx y(x_1)$ kann man nach dem selben Prinzip eine Näherung

$$y(x_2) \approx y_2 \quad = \quad y_1 + hf(x_1, y_1)$$



berechnen und man erhält die allgemeine Rekursion zur Berechnung der Approximationen der Lösungsfunktion für $i = 1, 2, \ldots, N$:

$$\boxed{y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})}$$

Das Ergebnis dieses Prozesses ist somit eine Folge $y_0, y_1, \ldots, y_N$ von $N+1$ reellen Zahlen, die Näherungswerte unserer gesuchten Lösungsfunktion $y(x)$ an den definierten Stützstellen sein sollten:

$$\begin{aligned} y_0 &= y(x_0) \\ y_1 &\approx y(x_1) \\ y_2 &\approx y(x_2) \\ \ldots & \quad \ldots \\ y_N &\approx y(x_N) \end{aligned}$$

Um ein graphisches Bild dieser disketen Näherungslösung zu erhalten, können wir durch diese Punkte einen linearen Spline (Polygonzug) legen und erhalten eine auf dem ganzen Intervall $[a, b]$ definierte Näherungslösung. Das auf diese Weise konstruierte Polygon heisst Euler-Polygon.

Beispiel 3.5 *Wir betrachten das AWP* $y' = x^2 + \frac{1}{10}y$, $y(-1.5) = 0$ *auf dem Intervall* $[-1.5, 1.5]$. *Es soll mit Hilfe des Euler-Verfahrens eine Näherungslösung mit* $N = 5$ *konstruiert werden (ein Euler-Polygon). Es gilt*

$$h \;=\; \frac{1.5 - (-1.5)}{5} \;=\; 0.6 \;=\; \frac{3}{5},$$

unsere Stützstellen sind also gegeben durch die Formel $x_i = -\frac{3}{2} + \frac{3}{5}i$ *für* $i = 0, \ldots, 5$ *also explizit*

$$\begin{array}{lll} x_0 = -\dfrac{3}{2} & x_1 = -\dfrac{9}{10} & x_2 = -\dfrac{3}{10} \\ x_3 = \dfrac{3}{10} & x_4 = \dfrac{9}{10} & x_5 = \dfrac{3}{2}. \end{array}$$

Die Näherungswerte berechnen sich nach der Vorschrift

$$y_{n+1} \;=\; y_n + hf(x_n, y_n) \;=\; y_n + \frac{3}{5}x_n^2 + \frac{3}{50}y_n \;=\; \frac{3}{5}x_n^2 + \frac{53}{50}y_n.$$

Es gilt:

$$y_0 = 0$$

$$\begin{aligned} y_1 = \frac{3}{5}x_0^2 + \frac{53}{50}y_0 &= 1.35 \\ y_2 = \frac{3}{5}x_1^2 + \frac{53}{50}y_1 &= 1.917 \\ y_3 = \frac{3}{5}x_2^2 + \frac{53}{50}y_2 &= 2.08602 \\ y_4 = \frac{3}{5}x_3^2 + \frac{53}{50}y_3 &= 2.26518 \\ y_5 = \frac{3}{5}x_4^2 + \frac{53}{50}y_4 &= 2.88709. \end{aligned}$$

4 Lineare DGL'n 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

4.1 Einführung

Dieser Typ von DGL'n tritt in der Praxis sehr häufig auf, hauptsächlich bei Anwendungen bei denen es um die Beschreibung von periodischen Vorgängen geht. Die allgemeine Form ist

$$\boxed{y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) \;=\; f(x)}$$

mit Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ und einer so genannten Stör- oder Steuerungsfunktion f über einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Die DGL heist homogen, wenn $f = 0$ ist, sonst inhomogen. Ganz charakteristisch für lineare DGL'n ist das so genannte **Superpositionsprinzip**:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Falls}\\ y_1''(x) + a\,y_1'(x) + b\,y_1(x) \;=\; f_1(x)\\ \text{und}\\ y_2''(x) + a\,y_2'(x) + b\,y_2(x) \;=\; f_2(x)\end{array}} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\begin{array}{c}y(x) := c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\\ \text{ist für alle } c_1, c_2 \in \mathbb{R}\\ \text{eine Lösung der DGL}\\ y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) \;=\; c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\end{array}}$$

Machen Sie sich das klar! Beweisen Sie diese Aussage, eventuell auch für lineare DGL'n höherer Ordnung.

Aus dem Superpositionsprinzip können wir recht allgemeine Schlussfolgerungen ziehen:
Falls $y_1''(x) + a\,y_1'(x) + b\,y_1(x) \;=\; f(x)$ und $y_2''(x) + a\,y_2'(x) + b\,y_2(x) \;=\; f(x)$ so gilt

$$\begin{aligned} & (y_1''(x) - y_2''(x)) + a\,(y_1'(x) - y_2'(x)) + b\,(y_1(x) - y_2(x)) \\ = \;& (y_1(x) - y_2(x))'' + a\,(y_1(x) - y_2(x))' + b\,(y_1(x) - y_2(x)) \;=\; 0 \end{aligned}$$

Falls also $y_1(x)$ und $y_2(x)$ irgendwelche Lösungen der inhomogenen DGL sind, so ist die Differenz $y(x) \;:=\; y_1(x) - y_2(x)$ stets eine Lösung der zugehörigen homogenen DGL. Zwei verschiedene Lösungen der inhomogenen Gleichung unterscheiden sich also stets um (irgend)eine Lösung der homogenen Gleichung. Wir können also **alle** Lösungen der inhomogenen DGL finden, indem wir alle Lösungen der homogenen DGL finden und dazu eine (einzige) Lösung der inhomogenen Gleichung addieren.

Satz 4 *Jede (der uendlich vielen) Lösungen der inhomogenen linearen DGL mit konstanten Koeffizienten $y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) \;=\; f(x)$ ist von der Form*

$$y(x) := y_p(x) + y_h(x)$$

wobei

- *$y_p(x)$ eine* **fest wählbare** *Lösung der inhomogenen Gleichung, eine so genannte partikuläre Lösung, und*
- *$y_h(x)$ irgendeine (der unendlich vielen) Lösungen der homogenen Gleichung ist.*

Wir müssen also zwei Dinge anpacken:

1. Finde **alle** Lösungen der homogenen DGL $y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) \;=\; 0$ und
2. finde **eine** Lösung der inhomogenen DGL $y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) \;=\; f(x)$.

4.2 Komplexifizierung des Problems

Der Übergang zu komplexen Zahlen und komplexen Funktionen bringt bei linearen DGLn elegante Vereinfachungen, gerade was die Klassifikation der Lösungstrukturen angeht. Wir fassen dazu $y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$ als eine DGL für komplexwertige Funktionen $y(x) = u(x) + iv(x)$, $y'(x) = u'(x) + iv'(x)$ und $y''(x) = u''(x) + iv''(x)$ auf und erlauben auch komplexwertige Störfunktionen $f(x) = g(x) + ih(x)$.

Überlegen Sie sich, dass folgendes gilt:

Satz 5 *Sei $a, b \in \mathbb{R}$ und $u, v : I \to \mathbb{R}$. Dann gilt: $y(x) = u(x) + iv(x)$ ist genau dann eine Lösung von $y''(x) + a\, y'(x) + b\, y(x) \;=\; g(x) + ih(x)$, wenn*

- $u''(x) + a\, u'(x) + b\, u(x) \;=\; g(x)$ *und*
- $v''(x) + a\, v'(x) + b\, v(x) \;=\; h(x)$

gilt.

Beispiel 4.1 *Zur reellen linearen DGL*

$$y''(x) - 4\, y'(x) + 13\, y(x) \;=\; \cos(x)$$

betrachtet man wegen $Re(e^{ix}) = Re(\cos(x) + i\sin(x)) = \cos(x)$ (Euler-Gleichung) die komplexe DGL

$$y''(x) - 4\, y'(x) + 13\, y(x) \;=\; e^{ix}$$

Diese kann mit dem Ansatz $y(x) = ce^{ix}$ gelöst werden. Zunächst gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} y(x) &= ce^{ix} \\ y'(x) &= cie^{ix} \\ y''(x) &= ci^2e^{ix} \;=\; -ce^{ix}. \end{aligned}$$

Setzen wir das in die DGL ein, erhalten wir die Gleichung

$$-ce^{ix} - 4\, cie^{ix} + 13\, ce^{ix} \;=\; e^{ix}$$

aus der wir den Term e^{ix} kürzen können. Wir erhalten eine Gleichung für die Konstante c:

$$-c - 4\, ci + 13\, c \;=\; 1 \qquad \Longrightarrow \qquad c \;=\; \frac{3}{40} + \frac{1}{40}i.$$

Also ist

$$y^{\mathbb{C}}(x) \;=\; \left(\frac{3}{40} + \frac{1}{40}i\right) e^{ix}$$

eine komplexe Lösung der komplexifizierten DGL. Ausserdem muss (wegen des obigen Satzes) der Realteil dieser Lösung unsere AusgangsDGL lösen! Überprüfen Sie, dass

$$y^{\mathbb{R}}(x) \;=\; Re\left(\left(\frac{3}{40} + \frac{1}{40}i\right) e^{ix}\right) \;=\; \frac{1}{40}(3\cos(x) - \sin(x))$$

gilt! Machen Sie auch sicherheitshalber eine Probe, dass wir tatsächlich eine Lösung der AusgangsDGL gefunden haben.

4.3 Die allgemeine Lösung von $y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) \;=\; 0$

Das allgemeine Superpositionsprinzip zeigt im homogenen Fall $f_1 = f_2 = 0$ sofort die folgende nette Eigenschaft:

Satz 6 *Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ der homogenen linearen DGL $y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) \;=\; 0$ ist ein Vektorraum über den reellen Zahlen, d.h. gilt $y_1, y_2 \in \mathcal{L}$ so ist auch jede Linearkombination $c_1y_1 + c_2y_2 \in \mathcal{L}$.*

Es gilt sogar: $\dim(\mathcal{L}) =$ *Ordnung der DGL = 2*

Der Vektorraum $\mathcal{L}$ heisst Lösungsraum der DGL und eine Basis von $\mathcal{L}$ wird als Lösungsbasis oder Fundamentalsystem der DGL bezeichnet.

Unser Ziel ist es somit, zwei linear unabhängige Lösungsfunktionen y_1 und y_2 der homogenen DGL zu finden. Dann kann **jede** Lösung in der Form

$$y_h(x) := c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

mit irgendwelchen reellen Zahlen c_1 und c_2 geschrieben werden.

Linear unabhängige Funktionen Dabei heissen zwei Funktionen y_1 und y_2 auf dem Intervall I linear unabhängig, wenn folgendes gilt: Falls $\alpha_1y_1(x) + \alpha_2y_2(x) = 0$ für **alle** $x \in I$ gilt, dann muss $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ gelten.

Die beiden Funktionen sind linear abhängig auf I, falls es eine Konstante α gibt, so dass $y_1(x) = \alpha y_2(x)$ für **alle** $x \in I$ gilt.

Ein Fundamentalsystem für die homogene DGL $y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) \;=\; 0$ Wir wählen den geschickten komplexwertigen Lösungsansatz

$$y(x) \;=\; y_h(x) = e^{\lambda x} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\lambda x} \\ y'(x) &= \lambda e^{\lambda x} \\ y''(x) &= \lambda^2 e^{\lambda x} \end{aligned}$$

und einsetzen in die DGL liefert

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} \;=\; \left(\lambda^2 + a\lambda + b\right) e^{\lambda x} \;=\; 0.$$

Da stets $e^{\lambda x} \neq 0$ gilt, erhalten wir die charakteristische Gleichung der homogenen DGL (ein Polynom vom Grad 2 in λ)

$$\chi(\lambda) \;=\; \lambda^2 + a\lambda + b \;=\; 0$$

deren (im Allgemeinen komplexe) Lösungen durch die wohl bekannte Gleichung

$$\lambda_{1,2} \;=\; -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$$

bestimmt sind.

Wie immer gibt es drei Fälle zu unterscheiden:

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$

   Wir haben sofort zwei reelle linear unabhängige Lösungen
   $$y_1(x) \;=\; e^{\lambda_1 x} \qquad \text{und} \qquad y_2(x) \;=\; e^{\lambda_2 x}$$
   und die allgemeine Lösung ist
   $$y_h(x) \;=\; c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

2. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{a}{2}$

   Der Ansatz liefert zunächst nur eine Basislösung $y_1(x) = e^{\lambda x}$ oder allgemein $y(x) = ce^{\lambda x}$. Durch die Methode der Variation der Konstanten c, d.h. wir setzten $y(x) = c(x)e^{\lambda x}$, können wir aber auch hier eine vollständige Lösungsbasis finden:
   $$\begin{aligned} y(x) &= c(x)e^{\lambda x} \\ y'(x) &= c'(x)e^{\lambda x} + c(x)\lambda e^{\lambda x} \\ &= (c'(x) + c(x)\lambda)e^{\lambda x} \\ y''(x) &= c''(x)e^{\lambda x} + c'(x)\lambda e^{\lambda x} + \lambda(c'(x)e^{\lambda x} + c(x)\lambda e^{\lambda x}) \\ &= (c''(x) + 2c(x)\lambda + c(x)\lambda^2)e^{\lambda x} \end{aligned}$$
   Setzen wir das in die DGL ein und kürzen $e^{\lambda x}$ erhalten wir die folgende DGL für die gesuchte Funktion $c(x)$:
   $$c''(x) + \underbrace{(2\lambda + a)}_{=0} c'(x) + \underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + b)}_{=0} c(x) \;=\; c''(x) \;=\; 0,$$
   deren Lösung natürlich einfach durch Integration zu finden ist:
   $$c(x) \;=\; c_1 x + c_2.$$
   Die allgemeine Lösung ist somit
   $$y_h(x) \;=\; c_1 x e^{\lambda x} + c_2 e^{\lambda x}.$$

3. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ und $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

   Wir erhalten zunächst zwei linear unabhängige komplexe Basislösungen
   $$\begin{aligned} y_1^{\mathbb{C}}(x) &= e^{\lambda_1 x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) \\ y_2^{\mathbb{C}}(x) &= e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)), \end{aligned}$$
   deren Real- und Imaginärteil linear unabhängige reelle Basislösungen sind:
   $$\begin{aligned} y_1^{\mathbb{R}}(x) &= e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\ y_2^{\mathbb{R}}(x) &= e^{\alpha x}\sin(\beta x). \end{aligned}$$
   Die allgemeine Lösung ist somit
   $$y_h(x) \;=\; c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Beispiel 4.2

- *Die DGL* $y''(x) - 3y(x) = 0$ *hat die allgemeine Lösung*

$$y(x) \;=\; c_1 e^{-\sqrt{3}x} + c_2 e^{\sqrt{3}x}.$$

- *Die DGL* $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0$ *hat die allgemeine Lösung*

$$y(x) \;=\; (c_1 + c_2 x)e^{2x} \;.$$

- *Die DGL* $y''(x) - 6y'(x) + 13y(x) = 0$ *hat die allgemeine Lösung*

$$y(x) \;=\; e^{3x}(c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)) \;.$$

4.4 Eine partikuläre Lösung von $y''(x) + a\, y'(x) + b\, y(x) \; = \; f(x)$

Es bleibt somit noch das Problem zu lösen, wie man eine einzige Lösung der inhomogenen DGL finden kann. Wir wollen hier nur auf einen Weg, den **Ansatz vom Typ der rechten Seite**, eingehen.

Auf der linken Seite der DGL steht eine einfache reelle Linearkombination der Funktionen $y''(x)$, $y'(x)$ und $y(x)$. Wenn also f (rechte Seite) z.B. ein Polynom ist, das wir als Linearkombination $y''(x)+a\, y'(x)+b\, y(x)$ darstellen wollten, so sollte $y(x)$ (und dann natürlich zwangsläufig auch $y'(x)$ und $y''(x)$) auch ein Polynom sein. Genauso könnten wir argumentieren, falls die rechte Seite eine Kombination von Winkelfunktionen bzw. von Winkel- und Exponentialfunktionen ist. Wichtig dabei ist, dass die Funktionsfamilie beim Ableiten ,,stabil" bleibt.

Wir glauben also daran, dass es mindestens eine Lösung der DGL gibt, die vom selben Typ wie die rechte Seite f ist, machen dann den entsprechenden Ansatz, setzen diesen in die DGL ein und versuchen die freien Parameter im Ansatz passend zu bestimmen.

Starten wir mit dem einfachsten (nicht-homogenen) Fall: $f(x) = k$ (konstant).

Oft wird in diesem Fall auch eine konstante Lösung existieren. Aber nicht immer. Im Allgemeinen sollte man k hier als Polynom vom Grad 0 interpretieren und folgern, dass es ein Polynom (mit eventuell höherem Grad) als partikuläre Lösung gibt. Tatsächlich gilt der folgende Satz, den man leicht durch eine Probe bestätigen kann.

Satz 7 *Eine partikuläre Lösung von*

$$y''(x) + a\, y'(x) + b\, y(x) \; = \; k$$

ist

$$y_p(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{b} & \text{falls } b \neq 0 \\[2ex] \dfrac{k}{a}\, x & \text{falls } b = 0 \text{ und } a \neq 0 \\[2ex] \dfrac{k}{2}\, x^2 & \text{falls } b = 0 \text{ und } a = 0 \end{cases} .$$

Beispiel 4.3

- *Die DGL* $y''(x) - 3y(x) = 5$ *hat die allgemeine Lösung*

$$y(x) \; = \; c_1 e^{-\sqrt{3}x} + c_2 e^{\sqrt{3}x} - \frac{5}{3}.$$

- *Die DGL* $y''(x) - 3y'(x) = 5$ *hat die allgemeine Lösung*

$$y(x) \; = \; c_1 + c_2 e^{3x} - \frac{5}{3} x.$$

- *Die DGL* $y''(x) = 5$ *hat die allgemeine Lösung*

$$y(x) \; = \; c_1 + c_2 x + \frac{5}{2} x^2 \; .$$

5 Übungen

Zur Lösung jeder Aufgabe gehört der vollständige und nachvollziehbare Rechenweg. Jede nicht triviale Behauptung sollte (kurz) begründet werden.

1. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem durch Trennung der Variablen. $\boxed{5}$

$$xy(1+x^2)y' = 1+y^2 \qquad y(1)=1.$$

Hinweis:

$$\int \frac{t}{1+t^2}\,dt \;=\; \frac{1}{2}\,\ln(t^2+1) \qquad \text{und} \qquad \int \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt \;=\; -\frac{1}{2}\,\ln(t^2+1)+\ln(t)$$

2. Finden Sie die allgemeine Lösung der folgenden linearen Differentialgleichung. $\boxed{10}$

$$y' + 2y = \; x^3 - 1$$

3. Ein Modell zur Beschreibung von Wachstumsprozessen (von Tumoren) ist die so genannte Gompertz-Gleichung

$$R'(t) \;=\; -a\cdot R(t)\cdot \ln\left(\frac{R(t)}{k}\right).$$

Dabei sind a und k positive Konstanten und $R(t)$ ist der Tumorradius als Funktion der Zeit t.

   (a) Finden Sie alle konstanten Lösungen dieser Differentialgleichung. $\boxed{2}$

   (b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung und skizzieren Sie einige Lösungskurven. $\boxed{8}$

4. Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y' = -1 + 2x + \frac{y^2}{(2+x^2)^2} \quad \text{und} \quad y(0)=2.$$

   (a) Bestimmen Sie mit dem Euler-Verfahren eine Näherungslösung auf dem Intervall $[0,2]$ für die Schrittweite $h=0.5$. $\boxed{8}$

   (b) Versuchen Sie, mit Maple die exakte Lösung des Anfangswertproblems zu finden. $\boxed{7}$