Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

Mathematik 1
Dr. Thomas Zehrt

Extraübung

1. Die folgenden Familien von Funktionen sind (bis auf einen fehlenden Normierungsfaktor) so genannte Wahrscheinlichkeitsdichten.

   - t**-Familie** $(n \in \mathbb{N})$ $\quad t_n(x) = \left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$
   - χ^2**-Familie** $(n \in \mathbb{N})$
   $$c_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ x^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-x/2} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$
   - F**-Familie** $(m, n \in \mathbb{N})$
   $$F_{m,n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \dfrac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

   Die Flächeninhalte unter den zugehörigen normalisierten Funktionsgraphen sind als Wahrscheinlichkeiten deutbar. Das werden wir in der Vorlesung ,,Mathematik 2" genauer untersuchen und sollte uns an die Gaussglockenkurven erinnern.

   (a) (**Niveau 0**)
   Schreiben Sie die Funktionen t_1 und t_4, c_2 und c_3 sowie $F_{4,5}$ und $F_{5,4}$ (in möglichst einfacher Form) auf. Skizzieren Sie alle Funktionen mit GeoGebra.

   (b) (**Niveau 1 bzw. 2**)
   Führen Sie eine Kurvendiskussion (Definitionsbereich, Nullstellen, Symmetrien, Verhalten für $x \to \pm\infty$, lokale Extremalstellen, Skizze) für die Funktion t_1 und t_4, c_2 und c_3 sowie $F_{4,5}$ und $F_{5,4}$ durch.

   (c) (**Niveau $\geq$ 3**)
   Versuchen Sie, falls möglich, für alle diese Funktionen das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ zu berechnen.

2. Jedem Studenten der Ökonomie an jeder Universität der Welt wird mindestens einmal eine Aufgabe gestellt, die eine Cobb-Douglas Funktion enthält, also z.B. $f(K, A) = 10 \cdot K^{3/4} \cdot A^{1/4}$, $f(K, A) = 5 \cdot K^{2/3} \cdot A^{1/3}$ oder ....

   Also scheint es doch sinnvoll zu sein, die offensichtlichen Fragen gleich für **alle** Cobb-Douglas Funktionen bzw. für die allgemeine Cobb-Douglas Funktion zu beantworten.

   Wir betrachten die Cobb-Douglas- Funktion $Q = f(K, A) = c \cdot K^{\alpha} \cdot A^{1-\alpha}$ mit $c > 0$ und $0 < \alpha < 1$.

   Bestimmen Sie

   (a) alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung,

   (b) die Gleichung der Tangentialebene an f im Punkt $(K_0, A_0, f(K_0, A_0))$,

   (c) $\Delta f(K_0, A_0, dK, dA)$,

   (d) $df(K_0, A_0, dK, dA)$,

   (e) die möglichen lokalen Extremalstellen von f unter der Nebenbedingung $\phi(K, A) = pK + qA - I = 0$,

   (f) den Anstieg der Niveaulinie $c \cdot K^{\alpha} \cdot A^{1-\alpha} = k$ im Punkt $(K_0, A_0) = (?, 1)$

      i. einerseits durch implizite Differentiation und

      ii. andererseits durch Auflösen der Gleichung der Niveaulinie nach K

3. **Zusatzaufgabe** Um diese Aufgabe lösen zu können, müssen Sie das Verfahren der partiellen Integration beherrschen und anwenden.

   Die von L. Euler (1707-1783, geb. in Basel) eingführte <u>Gamma-Funktion</u> Γ ist für alle $x \in (0, \infty)$ definiert durch:

$$\Gamma(x) \quad = \quad \int_0^{\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt.$$

   (a) Berechnen Sie $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$, $\Gamma(3)$ und $\Gamma(4)$.

   (b) Zeigen Sie, dass die Gamma-Funktion für alle $x > 0$ die folgende Funktionalgleichung erfüllt:

$$\Gamma(x+1) \quad = \quad x\Gamma(x).$$

Lösungen

1. Alle Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und haben nur die offensichtlichen Nullstellen, d.h. die Stellen wo die Funktionen per Definition gleich 0 sind. Sämtliche Funktionen nehmen nur Werte grösser oder gleich 0 an. Die Funktionen aus der t-Familie sind alle gerade, also symmetrisch zur y-Achse. Für alle Funktionen gilt $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Bei den lokalen Extremalstellen beschränken wir uns aus hoffentlich naheliegenden Gründen auf lokale (und globale) Maximalstellen. Die Funktionen der t-Familie haben ihre lokale Maximalstelle im Punkt $x = 0$. Die Funktion c_1 hat keine lokale Maximalstelle, die Funktion c_2 nimmt ihr lokales (und globales) Maximum im Punkt $x = 0$ an und die lokale (und globale) Extremalstelle von c_n für $n \geq 2$ ist der Punkt $x = n - 2$. Die Funktionen $F_{1,n}$ haben keine lokale Maximalstelle, die Funktionen $F(2, n)$ realisieren ihr lokales Maximum im Punkt $x = 0$ (keine stationäre Stelle, Sprungstelle) und die Funktionen $F_{m,n}$ mit $m, n \geq 2$ haben einen stationären Punkt, der auch lokale Maximalstelle ist, in $x = \frac{n(m-2)}{m(n+2)}$.

2. (a) $f_K = c \cdot \alpha \cdot (A/K)^{1-\alpha}$
   $f_K = c \cdot (1-\alpha) \cdot (K/A)^{\alpha}$
   $f_{KK} = c \cdot \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot K^{\alpha-2} \cdot A^{1-\alpha}$
   $f_{AA} = c \cdot (-\alpha) \cdot (1-\alpha) \cdot K^{\alpha} \cdot A^{-\alpha-1}$
   $f_{AK} = c \cdot (1-\alpha) \cdot \alpha \cdot K^{\alpha-1} \cdot A^{-\alpha}$

   (b) $T(K, A) = Q_0 + c \cdot \alpha \cdot (K - K_0) + c \cdot (1-\alpha) \cdot (A - A_0)$

   (c) $\Delta f(K_0, A_0, dK, dA) = c \cdot (K_0 + dK)^{\alpha} \cdot (A_0 + dA)^{1-\alpha} - c \cdot K_0^{\alpha} \cdot A_0^{1-\alpha}$

   (d) $df(K_0, A_0, dK, dA) = c \cdot \alpha \cdot (A_0/K_0)^{1-\alpha} \cdot dK + c \cdot (1-\alpha) \cdot (K_0/A_0)^{\alpha} \cdot dA$

   (e) $K^* = I\alpha/p$ und $A^* = I(1-\alpha)/q$

   (f) i. der Punkt hat die Koordinaten $((k/c)^{1/\alpha}, 1)$ und

   $$\begin{aligned} \frac{dK}{dA} &= -\frac{(1-\alpha)}{\alpha} \cdot \frac{K}{A} \\ \left.\frac{dK}{dA}\right|_{(K,A)=((k/c)^{1/\alpha},1)} &= -\frac{(1-\alpha)}{\alpha} \cdot \left(\frac{k}{c}\right)^{1/\alpha} \end{aligned}$$

   ii. Auflösen ergibt $K(A) = (k/c)^{1/\alpha} \cdot A^{(\alpha-1)/\alpha}$ also

   $$\begin{aligned} K'(A) &= \frac{(\alpha-1)}{\alpha} \cdot \left(\frac{k}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot A^{(\alpha-1)/\alpha-1} \\ K'(1) &= \frac{(\alpha-1)}{\alpha} \cdot \left(\frac{k}{c}\right)^{1/\alpha} \end{aligned}$$

3. $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2$ und $\Gamma(4) = 6$ und

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x\, e^{-t}\, dt = \underbrace{\left[-t^x e^{-t}\right]_0^{\infty}}_{=0} + x \int_0^{\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt = x\Gamma(x).$$