Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Universität Basel
Abteilung Quantitative Methoden

Mathematik 1

Dr. Thomas Zehrt

Folgen, Reihen und Finanzmathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlenfolgen

1.1 Grundlegende Begriffe

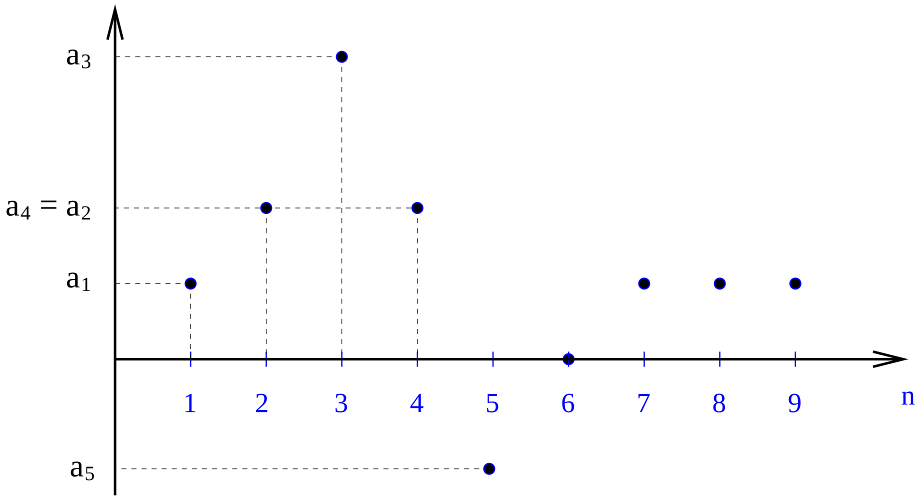
Definition 1.1 *Wird jeder natürlichen Zahl $n (\in \mathbb{N})$ genau eine reelle Zahl $a_n (\in \mathbb{R})$ zugeordnet, so bilden die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine <u>Zahlenfolge</u> oder einfach <u>Folge</u>.*

Schreibweise: $\{a_n\}$ *für* $a_1, a_2, a_3, \ldots$

<u>Graph</u> von $\{a_n\}$*:* $\{(n, a_n) \;:\; n \in \mathbb{N}\}$

Beispiel 1.1 *Der Graph der Zahlenfolge* $1, 2, 4, 2, -1, 0, 1, 1, 1, \ldots$ *ist die folgende Punktwolke:*

$\{(1,1), (2,2), (3,4), (4,2), (5,-1), (6,0), (7,1), \ldots\}$



Darstellung von Zahlenfolgen

- <u>direkt</u>: man gibt eine allgemeine Formel für das n-te Glied an.

  Beispiele:

Bildungsgesetz		Folgenglieder
$a_n = n^2$	$\rightsquigarrow$	1, 4, 9, 16, 25, 36, …
$b_n = 1/n$	$\rightsquigarrow$	
$c_n = n!$	$\rightsquigarrow$	
$K_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$	$\rightsquigarrow$	

- rekursiv: man gibt eine Vorschrift an, wie man das n-te Glied aus seinen Vorgängern berechnen kann. Damit dieser Prozess der Konstruktion der Folge starten kann, müssen wir einige Glieder der Folge festlegen. Rekursiv definierte Zahlenfolgen werden häufig auch als Differenzengleichungen bezeichnet.

  Beispiele:

Bildungsgesetz	Anfangswerte		Folgenglieder
$a_n = 2 \cdot a_{n-1}$	$a_1 = 2$	$\rightsquigarrow$	2, 4, 8, 16, 32, 64, ...
$b_n = 2 \cdot b_{n-1}$	$b_1 = 1$	$\rightsquigarrow$	
$c_n = c_{n-1}^2 + c_{n-2}$	$c_0 = 1$ und $c_1 = 2$	$\rightsquigarrow$	
$a_n = \sin(a_{n-1}) + \cos(a_{n-2})$	$a_0 = 1$ und $a_1 = 2$	$\rightsquigarrow$	
$a_{n-3} = a_{n-4}^2 + a_{n-5}$	$a_0 = 1$ und $a_1 = 2$	$\rightsquigarrow$	

Beispiel 1.2

Sei a_n der Wert von $1'000.-$ CHF nach n Jahren bei einer Verzinsung von 4%

In jedem Jahr wächst der Wert der Geldanlage um den Faktor 1.04. *Wir erhalten zunächst die rekursive Folge*

$$a_n = 1.04 \cdot a_{n-1}, \quad a_1 = 1'040.$$

Formal können wir noch ein 0*-tes Glied* $a_0 = 1'000$ *einführen, das das Anfangsguthaben bezeichnet. Hier kann man nun leicht eine direkte Darstellung der Folge angeben:*

$$\begin{aligned} a_n &= 1.04 \cdot a_{n-1} \\ &= 1.04 \cdot (1.04 \cdot a_{n-2}) \\ &= \cdots \\ &= (1.04)^n \cdot a_0. \end{aligned}$$

Die ersten vier Glieder der Folge sind:

1.2 Eigenschaften von Zahlenfolgen

Beschränktheit

Definition 1.2 *Eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ heisst*

- *nach unten beschränkt, wenn es eine Konstante m gibt, so dass gilt*

$$a_n \geq m$$

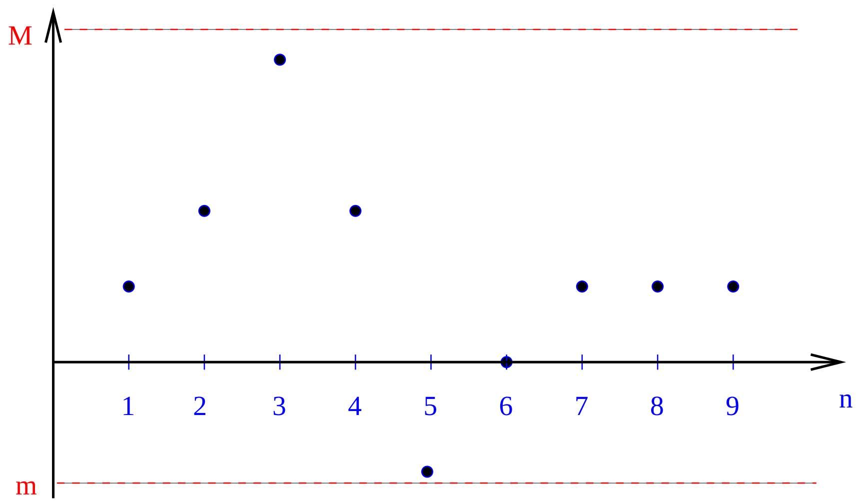
für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$.

- *nach oben beschränkt, wenn es eine Konstante M gibt, so dass gilt*

$$a_n \leq M$$

für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$

- *beschränkt, wenn sie nach unten und nach oben beschränkt ist.*



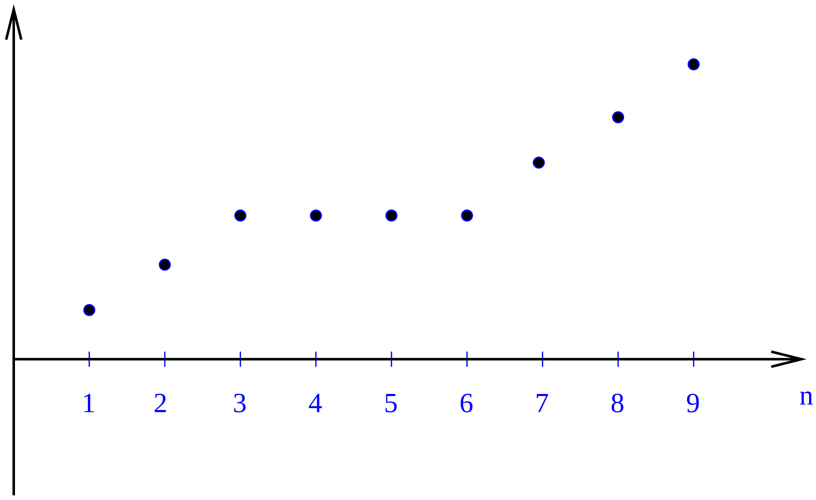
Monotonie

Definition 1.3 *Eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ heisst*

- *monoton wachsend bzw. streng (strikt) monoton wachsend, falls gilt*

$$a_{n+1} \;\geq\; a_n \qquad \text{bzw.} \qquad a_{n+1} \;>\; a_n$$

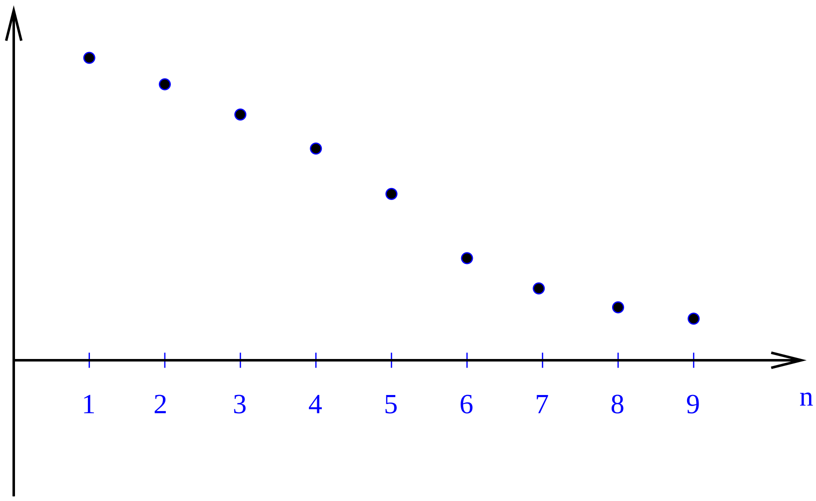
für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$



- *monoton fallend bzw. streng (strikt) monoton fallend, falls gilt*

$$a_{n+1} \;\leq\; a_n \qquad \text{bzw.} \qquad a_{n+1} \;<\; a_n$$

für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$



Konvergenz und Divergenz, Grenzwerte und Nullfolgen

Definition 1.4 *Seien a und ϵ reelle Zahlen mit $\epsilon > 0$. Die $\underline{\epsilon\text{-Umgebung}}$ $U_\epsilon(a)$ von a war definiert als:*

$$\boxed{U_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \underbrace{|x-a|}_{Abstand} \ < \epsilon\} \quad = \quad \underbrace{(a-\epsilon, a+\epsilon)}_{offenes\ Intervall} \quad ,}$$

d.h. $U_\epsilon(a)$ ist das offene Intervall mit den Grenzen $a-\epsilon$ und $a+\epsilon$, oder anders ausgedrückt, die Menge aller reellen Zahlen x, die von a einen Abstand kleiner als ϵ haben.

Definition 1.5 *Eine reelle Zahl a heisst Grenzwert der Zahlenfolge $\{a_n\}$, falls für* **jede** *reelle Zahl $\epsilon > 0$ eine reelle Zahl $N(\epsilon)$ existiert, so dass*

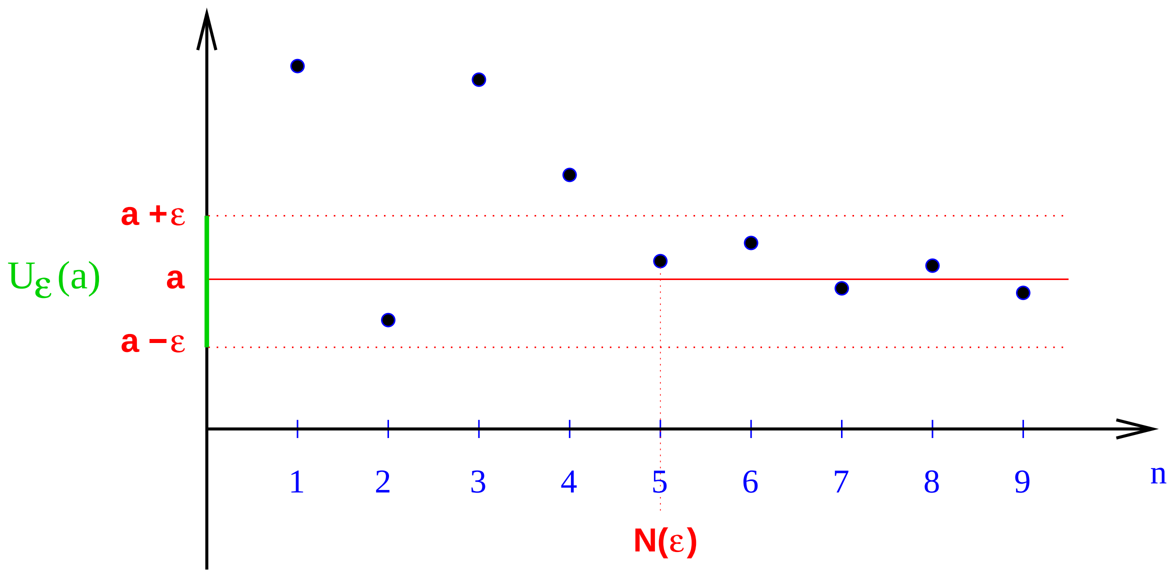
$$|a_n - a| \ < \ \epsilon \qquad bzw. \qquad a-\epsilon \ < \ a_n \ < \ a+\epsilon$$

für alle $n > N(\epsilon)$ gilt. Anders formuliert: Für **jede** *Zahl $\epsilon > 0$ gibt es eine Zahl $N(\epsilon)$, so dass alle Glieder a_n mit $n > N(\epsilon)$ in der ϵ-Umgebung von a liegen.*

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Wir sagen dann, dass die Folge $\{a_n\}$ konvergent ist. Existiert eine solche Zahl a nicht, so nennen wir die Zahlenfolge divergent. Zahlenfolgen mit dem Grenzwert $a = 0$ heissen Nullfolgen.

Beispiel 1.3



Für **ein** *beliebig gewähltes ϵ liegen* **alle** *Folgenglieder $a_6, a_7, a_8, a_9, \cdots$ im „ϵ-Schlauch“ um a. Das sollte für* **jedes** *ϵ ab einem bestimmten a_n so sein!*

Beispiel 1.4

1. *Wir wollen zeigen, dass die Zahlenfolge* $\{1/n\}$ *den Grenzwert* $a = 0$ *hat. Zunächst gilt*

$$|a_n - a| \;=\; |1/n - 0| \;=\; 1/n.$$

   Sei nun ein beliebiges $\epsilon > 0$ *vorgegeben. Wir müssen eine Vorschrift finden, die uns zu jedem* $\epsilon > 0$ *eine reelle Zahl* $N(\epsilon)$ *liefert, so dass alle* a_n *mit* $n > N(\epsilon)$ *in der* ϵ*-Umgebung von* 0 *liegen. Wir versuchen, die Ungleichung* $1/n < \epsilon$ *nach* n *aufzulösen und diese Ungleichung gilt genau dann, wenn*

$$n > \frac{1}{\epsilon} =: N(\epsilon)$$

   gilt.

   - $\epsilon = 1 \rightsquigarrow N(\epsilon) = 1$ *und es gilt* $1/n < \epsilon = 1$ *für alle* $n > N(\epsilon) = 1$ *oder: ab dem* 2*-ten Folgenglied liegen alle Folgenglieder in der* 1*-Umgebung von* 0.
   - $\epsilon = 1/2 \rightsquigarrow N(\epsilon) = 2$ *und es gilt* $1/n < \epsilon = 1/2$ *für alle* $n > N(\epsilon) = 2$ *oder: ab dem* 3*-ten Folgenglied liegen alle Folgenglieder in der* $1/2$*-Umgebung von* 0.

2. *Sei* q *eine reelle Zahl mit der Eigenschaft* $|q| < 1$. *Die Zahlenfolge* $\{q^n\}$ *ist eine Nullfolge.*

   Beispiele:

   - $q = \frac{1}{2} \rightsquigarrow \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\}$
   - $q = \frac{1}{3} \rightsquigarrow \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots\right\}$
   - $q = -\frac{1}{2} \rightsquigarrow \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots\right\}$

3. *Die Zahlenfolge* $\{n\}$ *ist divergent.*

Oft ist es nicht leicht, die Konvergenz oder Divergenz von Zahlenfolgen direkt nachzuweisen. Hilfreich können die folgenden Sätze sein.

Satz 1 *Seien* $\{a_n\}$ *und* $\{b_n\}$ *zwei Zahlenfolgen mit* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) \;=\; a \pm b \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) \;=\; a \cdot b \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \;=\; \frac{a}{b} \quad \textit{falls } b_n \neq 0 \textit{ und } b \neq 0. \tag{3}$$

Beispiel 1.5

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n}{2n^2-n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot(1+3/n)}{n^2\cdot(2-1/n+1/n^2)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+3/n}{2-1/n+1/n^2} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+3/n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(2-1/n+1/n^2)} \qquad \textit{Regel (3)} \\
&= \frac{1+\lim\limits_{n\to\infty} 3/n}{2-\lim\limits_{n\to\infty} 1/n+\lim\limits_{n\to\infty} 1/n^2} \qquad \textit{Regel (1)} \\
&= \frac{1+0}{2-0+0} \qquad \{1/n\},\{1/n^2\}\ \textit{sind Nullfolgen} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Satz 2 *Jede beschränkte monotone Zahlenfolge ist konvergent.*

Beispiel 1.6 *Man sieht leicht, dass die Zahlenfolge* $\{\frac{n}{n+1}\}$ *beschränkt und monoton wachsend ist, denn einerseits gilt*

$$m := 0 \leq \quad \frac{n}{n+1} \quad \leq 1 =: M$$

und andererseits

$$a_n = \frac{n}{n+1} \quad < \quad \frac{n+1}{n+2} = a_{n+1}$$

für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ *Es muss hier noch gezeigt werden, dass die folgenden drei Ungleichungen für alle natürlichen Zahlen* n *wahr sind:*

1. $0 \leq \dfrac{n}{n+1}$,
2. $\dfrac{n}{n+1} \leq 1$ *und*
3. $\dfrac{n}{n+1} < \dfrac{n+1}{n+2}$.

Aufgabe 1.1 *Führen Sie diese allgemeinen Beweise!*

Satz 3 *Jede konvergente Zahlenfolge ist beschränkt, oder anders ausgedrückt, jede nicht beschränkte Zahlenfolge ist nicht konvergent (divergent).*

Aufgabe 1.2 *Ist jede beschränkte Zahlenfolge auch konvergent?*

Satz 4 *Das Produkt aus einer beschränkten Folge und einer Nullfolge ist eine Nullfolge.*

Beispiel 1.7 *Die Zahlenfolge* $a_n = \sin(n)$ *ist beschränkt, also gilt für das Produkt dieser Folge mit der Nullfolge* $\{1/n\}$*:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin(n) \quad = \quad 0.$$

Die folgenden Grenzwerte sollte man kennen:

$$\boxed{\begin{array}{lcll} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} & = & 0 & \\[2ex] \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^a} & = & 0 & \text{für } a > 0 \\[2ex] \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} & = & 0 & \\[2ex] \lim\limits_{n\to\infty} q^n & = & 0 & \text{für } |q| < 1 \end{array}}$$

1.3 Geometrische Folgen und Zinseszinsrechnung

Definition 1.6 *Seien a und q reelle Zahlen. Eine Zahlenfolge der Gestalt*

$$a, aq, aq^2, aq^3, \ldots, aq^n, \ldots$$

heisst geometrische Folge. Die rekursive Bildungsvorschrift einer geometrischen Folge ist $a_n = q \cdot a_{n-1}, a_0 = a$.

1.3.1 Zinseszinsformel und Barwert

Beispiel 1.8 *Angenommen, wir legen 100 Franken auf einem Konto an, das jährlich zu 5 % verzinst wird. Unser Anfangskapital ist $K_0 = 100$. Am Ende des ersten Jahres kommen dann 5 Franken hinzu und unser Kapital ist auf $K_1 = K_0 \cdot 1.05 = 105$ Franken angewachsen. Am Ende des zweiten Jahres wächst unser Kapital wieder um 5 % (von 105!), d.h. um 5.25 Franken. Es gilt deshalb $K_2 = K_1 \cdot 1.05 = K_0 \cdot 1.05 \cdot 1.05 = 110.25$ Franken.*

Für das Guthaben nach insgesamt n Jahren gilt somit $K_n = 100 \cdot 1.05^n$.

Satz 5 (Zinseszinsformel) *Ein Anfangsguthaben K_0, das zu einem Zinssatz p angelegt wird, wächst nach n Jahren zu einem Endkapital*

$$K_n = K_0 \cdot (1+p)^n.$$

Begründung/Beweis:

Das Kapital am Ende eines Jahres bildet eine geometrische Folge mit den Parametern

- $a = K_0 = 100$
- $q = 1 + p = 1.05$

Allgemein:

$$K_0,\ K_0(1+p),\ K_0(1+p)^2,\ K_0(1+p)^3, \ldots$$

□

Beispiel 1.9 (Der Josephsrappen, *Richard Price, 1723-1791***)** *Was hätte der Zinseszinseffekt aus vor 2000 Jahren angelegten 0.01 CHF gemacht?*

- $p = 0.01 = 1\%$

$$K_{2000} = 0.01 \cdot 1.01^{2000} \approx 4'392'682,- \ CHF$$

- $p = 0.02 = 2\%$

$$K_{2000} = 0.01 \cdot 1.02^{2000} \approx 1'586'147'328'000'000,- \ CHF$$

Der Barwert

Definition 1.7 *Der* <u>*Barwert*</u> *oder auch* <u>*Gegenwartswert*</u> *ist der gegenwärtige Wert einer in der Zukunft anfallenden Zahlung.*

Beispiel 1.10 *A möchte sich in 4 Jahren ein neues Auto kaufen, das dann* 30000 *Franken kosten wird. Er möchte bereits heute wissen, wieviel Geld er anlegen muss, wenn er mit einer Verzinsung von* 6% *rechnen kann.*

Gesucht ist der Betrag S_0*, den man heute zum Zinssatz von* 6% *anlegen muss, um in 4 Jahren ein Guthaben von* $S_4 = 30000$ *Franken zu erhalten. Unter Nutzung der Zinseszinsformel muss somit gelten*

$$S_0 \cdot (1 + \underbrace{0.06}_{p})^4 = \underbrace{30000}_{S_4}$$

oder

$$S_0 = \frac{30000}{(1+0.06)^4} = 23762.81.$$

Satz 6 *Wird eine Zahlung oder Schuld* S_n *in* n *Jahren fällig, so beträgt der Barwert* S_0 *dieser Schuld bei einem Zinssatz* p

$$S_0 = S_n \cdot (1+p)^{-n}.$$

1.3.2 k-malige Verzinsung

Einige Banken berechnen die Zuwachszinsen nicht nur einmal, sondern k-mal im Jahr. Der Zins wird dann k-mal jährlich (üblich sind 2 mal, 4 mal oder 12 mal) zum Kapital geschlagen und der Zinssatz pro Periode ist p/k.

Beispiel 1.11 *Das Anfangsguthaben sei wieder* $K_0 = 100$ *Franken und der Zinssatz von* 5% *(d.h.* $p = 0.05$*) werde halbjährlich (*$k = 2$*) berechnet. Das Kapital wird dann nach dem ersten Halbjahr zu einer Rate von* 2.5% *berechnet; das macht* $100 \cdot 1.025 = 102.5$ *Franken. Dieses neue Guthaben wird dann nach Ende des zweiten Halbjahres nochmals mit* 2.5% *verzinst; das macht dann als Endkapital nach einem Jahr*

$$\begin{aligned} K_1 &= 102.5 \cdot 1.025 \\ &= 100 \cdot 1.025 \cdot 1.025 \\ &= 105.0625. \end{aligned}$$

Satz 7 (k-malige Verzinsung) *Ein Anfangskapital* K_0*, das zu einem Zinssatz* p *angelegt und pro Jahr* k*-mal verzinst wird, wächst nach einem Jahr zu einem Kapital von*

$$K_1 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{k}\right)^k$$

und nach n *Jahren zu einem Endkapital von*

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{k}\right)^{k \cdot n}.$$

Begründung/Beweis: Das Kapital am Ende eines Jahres (bei k-maliger Verzinsung) bildet eine geometrische Folge mit den Parametern

- $a = K_0$
- $q = \left(1 + \frac{p}{k}\right)^k$

Allgemein:

$$
\begin{aligned}
&K_0, \\
&K_0 \left(1 + \frac{p}{k}\right)^k, \\
&K_0 \left(1 + \frac{p}{k}\right)^{2\cdot k}, \\
&K_0 \left(1 + \frac{p}{k}\right)^{3\cdot k}, \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

□

1.4 Die Eulersche Zahl und kontinuierliche Verzinsung

Die Eulersche Zahl Wir betrachten die folgende (allgemeine) unendliche Reihe

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \quad = \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}.$$

Dabei bezeichnet $j! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot j$ (mit $0! := 1$) die so genannte Fakultät. Diese Reihe ist konvergent. Der Grenzwert wird mit e bezeichnet und heisst Eulersche Zahl

$$e \quad := \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \approx 2.71828..$$

Die Zahl e tritt auch als Grenzwert anderer Folgen auf. Es gelten die beiden wichtigen Gleichungen:

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \; = \; e \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{p}{k}\right)^k \; = \; e^p}$$

Beispiel 1.12

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{4}{3k}\right)^k \; = \; \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{-4/3}{k}\right)^k \; = \; e^{-4/3} \; = \; \frac{1}{e^{4/3}} \; = \; \frac{1}{\sqrt[3]{e^4}}$$

Beispiel 1.13

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{k-2}{k+2}\right)^k \; = \; \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k(1-2/k)}{k(1+2/k)}\right)^k \; = \; \lim_{k\to\infty} \left(\frac{(1-2/k)^k}{(1+2/k)^k}\right) \; = \; \frac{e^{-2}}{e^2} \; = \; e^{-4} \; = \; \frac{1}{e^4}$$

Kontinuierliche Verzinsung Was passiert nun, wenn wir die Verzinsungszeiträume noch kleiner werden lassen? Wir wollen den Grenzfall, die kontinuierliche Verzinsung, d.h. $k \to \infty$ betrachten. Unter Ausnutzung bekannter Grenzwerte erhalten wir dann das folgende Resultat.

Satz 8 (Kontinuierliche Verzinsung)

$$K_1 \; = \; K_0 \cdot \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{p}{k}\right)^k \; = \; K_0 \cdot e^p$$

$$K_n \; = \; K_0 \cdot \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{p}{k}\right)^{k \cdot n} \; = \; K_0 \cdot e^{pn}$$

Beispiel 1.14 *Angenommen, Sie haben verschiedene Konten mit gleichem Zins von* 5% *und unterschiedlichen Verzinsungszeiträumen zur Auswahl. Auf welchem Konto sollten Sie die* 100 *Franken anlegen, um nach einem Jahr ein möglichst grosses Guthaben zu erhalten?*

	k	p/k	K_1
jährlich	1	0.05	105.00 *Franken*
halbjährlich			
vierteljährlich			105.09 *Franken*
monatlich			
wöchentlich			
täglich	365	0.0001370	

Hinweis:

Für alle reellen Zahlen p gilt auch die folgende Reihendarstellung der Funktion e^p:

$$\boxed{e^p \;=\; \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{p}{k}\right)^k \;=\; \sum_{j=0}^{\infty}\frac{p^j}{j!} \;=\; 1+p+\frac{p^2}{2}+\frac{p^3}{6}+\dots}$$

2 Geometrische Reihen

2.1 Definition und Beispiele

Seien a und q reelle Zahlen und $a, aq, aq^2, aq^3, \ldots, aq^n, \ldots$ die zugehörige geometrische Folge.

Definition 2.1 *Der Ausdruck*

$$s \quad = \quad a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n + \ldots \; = \; \sum_{k=0}^{\infty} a \cdot q^k$$

heisst unendliche geometrische Reihe mit den Parametern a und q. Für jede natürliche Zahl n heisst die reelle Zahl

$$s_n \quad = \quad a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} \; = \; \sum_{k=0}^{n-1} a \cdot q^k$$

die n-te Partialsumme der unendlichen geometrischen Reihe. Durch

$$\{s_n\} \quad = \quad \{\underbrace{a}_{s_1}, \underbrace{a + aq}_{s_2}, \underbrace{a + aq + aq^2}_{s_3}, \underbrace{a + aq + aq^2 + aq^3}_{s_4}, \ldots\}$$

ist damit eine neue Zahlenfolge definiert. Wir wollen nun die unendliche geometrische Reihe mit den Parametern a und q als konvergent bezeichnen, wenn die zugehörige Folge $\{s_n\}$ ihrer Partialsummen konvergiert.

Beispiel 2.1

1. *Die Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ ist eine geometrische Folge ($a = 1$ und $q = 1/2$) und*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

ist die unendliche geometrische Reihe mit den Parametern 1 und $1/2$. Wir können die Folge der Partialsummen ablesen:

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5 \\ s_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 1.75 \\ s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} = 1.875 \\ &\ldots \end{aligned}$$

2. *Die Folge* $1, -2, 4, -8, 16, \ldots$ *ist eine geometrische Folge* ($a = 1$ *und* $q = -2$) *und*

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \ldots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-2)^k$$

ist die unendliche geometrische Reihe mit den Parametern 1 *und* -2. *Wir können die Folge der Partialsummen ablesen:*

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 \\
s_2 &= 1 - 2 = -1 \\
s_3 &= 1 - 2 + 4 = 3 \\
s_4 &= 1 - 2 + 4 - 8 = -5 \\
s_5 &= 1 - 2 + 4 - 8 + 16 = 11 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

3. *Die Folge* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ *ist eine geometrische Folge* ($a = 1$ *und* $q = 1/2$) *und*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

ist die unendliche geometrische Reihe mit den Parametern 1 *und* $1/2$. *Wir können die Folge der Partialsummen ablesen:*

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 \\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5 \\
s_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 1.75 \\
s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} = 1.875 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

4. *Die Folge* $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ *ist eine geometrische Folge* ($a = 1$ *und* $q = -1/2$) *und*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

ist die unendliche geometrische Reihe mit den Parametern 1 *und* $-1/2$. *Wir können die Folge der Partialsummen ablesen:*

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 \\
s_2 &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5 \\
s_3 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75 \\
s_4 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = 0.625 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

2.2 Summenformeln für geometrische Reihen

Satz 9 *Für die n-te Partialsumme s_n der unendlichen geometrischen Reihe mit den Parametern a und $q \neq 1$ gilt:*

$$\boxed{s_n \;=\; a\,\frac{1-q^n}{1-q}.}$$

Beweis: Zunächst gelten die beiden Identitäten

$$\begin{aligned} s_n &= a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1} \\ qs_n &= \phantom{a+{}} aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1} + aq^n, \end{aligned}$$

und somit folgt

$$\begin{aligned} s_n - qs_n &= s_n \cdot (1-q) \\ &= a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1} \\ &\qquad -aq - aq^2 - aq^3 - \ldots - aq^{n-2} - aq^{n-1} - aq^n \\ &= a - aq^n \\ &= a \cdot (1-q^n) \end{aligned}$$

oder

$$s_n \;=\; a\,\frac{1-q^n}{1-q}.$$

□

Nun wollen wir uns den unendlichen geometrischen Reihen zuwenden und die Frage stellen, für welche q die Folge $\{s_n\}$ gegen einen Grenzwert s konvergiert. Zunächst gilt falls $q \neq 1$:

$$s \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a \cdot q^k \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a \cdot q^k \;=\; \lim_{n\to\infty} a\,\frac{1-q^n}{1-q} \;=\; \frac{a}{1-q} \lim_{n\to\infty} (1-q^n)$$

Fallunterscheidung:

- $q > 1$: Hier ist die Folge $\{q^n\}$ unbeschränkt und positiv, also ist auch $\{s_n\}$ unbeschränkt, also divergent.
- $q = 1$: Hier gilt $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} a = n \cdot a$, also ist $\{s_n\}$ divergent.
- $|q| < 1$: Die Zahlenfolge $\{q^n\}$ ist eine Nullfolge und es gilt

$$s \;=\; \frac{a}{1-q}.$$

- $q \leq -1$: Hier ist die Folge $\{q^n\}$ alternierend negativ und positiv, dem Betrag nach ≥ 1 (d.h. es ist keine Nullfolge) und $\{s_n\}$ ist divergent.

Wir haben damit das Folgende bewiesen:

Satz 10 *Die unendliche geometrische Reihe*

$$s \;=\; a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n + \ldots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a \cdot q^k$$

mit den Parametern a *und* q *konvergiert genau dann, wenn* $|q| < 1$*. Ihr Wert beträgt dann*

$$\boxed{s \;=\; \frac{a}{1-q}.}$$

Beispiel 2.2

$$\sum_{k=0}^{5} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \;=\; \frac{1-(-\frac{1}{2})^6}{1-(-\frac{1}{2})} \;=\; \frac{1-\frac{1}{64}}{\frac{3}{2}} \;=\; \frac{21}{32}$$

Beispiel 2.3

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \;=\; \frac{1}{\frac{3}{2}} \;=\; \frac{2}{3}$$

Beispiel 2.4 *Beachten Sie, dass die obige Summenformel für geometrische Reihen nur für* $|q| < 1$ *gilt. Beachtet man das nicht, kommen offensichtlich* **unsinnige Resultate** *zu Stande wie z.B.*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \;=\; 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots \;=\; \frac{1}{1-2} \;=\; -1$$

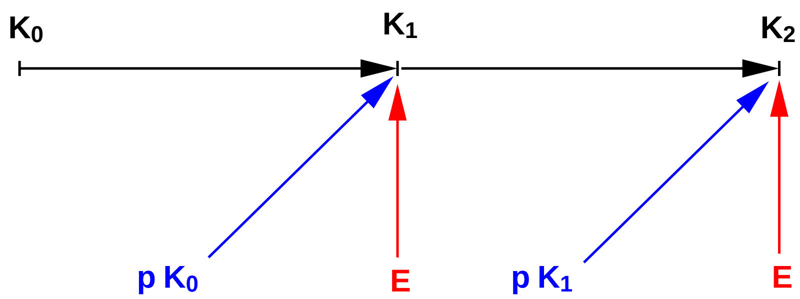
3 Die Rentenformel

Es sei ein Anfangskapital K_0 gegeben. In jeder Periode erfolgt eine gleichbleibende Einzahlung E mit $E > 0$

- am Ende der Periode (nachschüssig)
- am Anfang der Periode (vorschüssig)

Das jeweils vorhandene Kapital wird zu einem Zinssatz p mit Zinseszinsen vergütet. Das am Ende der n-ten Periode zur Verfügung stehende Kapital K_n soll ermittelt werden. Schematisch können die beiden Situationen wie folgt dargestellt werden. Dabei ergeben sich sofort rekursive Darstellungen der Zahlenfolgen, die die Kapitalentwicklung beschreiben.

Nachschüssige Rente



$$
\begin{aligned}
K_1 &= K_0 + p \cdot K_0 + E = (1+p)K_0 + E \\
K_2 &= K_1 + p \cdot K_1 + E = (1+p)K_1 + E \\
\ldots & \quad \ldots
\end{aligned}
$$

Rekursion

$$\boxed{K_n = (1+p)K_{n-1} + E}$$

Satz 11 (Nachschüssige Rentenformel) *Es gilt*

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot (1+p)^n + E\,\frac{(1+p)^n - 1}{p}.}$$

Beweis: Zunächst gilt die allgemeine rekursive Gleichung

$$\begin{aligned} K_i &= K_{i-1} + pK_{i-1} + E \\ &= K_{i-1} \cdot (1+p) + E \end{aligned}$$

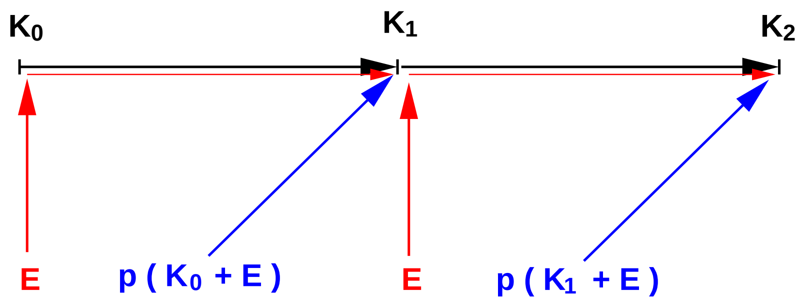
und somit folgt unter Nutzung der Summenformel für die geometrische Reihe

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 \cdot (1+p) + E \\ \\ K_2 &= K_1 \cdot (1+p) + E \\ &= (1+p) \cdot \underbrace{(K_0 \cdot (1+p) + E)}_{K_1} + E \\ &= K_0 \cdot (1+p)^2 + E \cdot (1+p) + E \\ \ldots & \quad \ldots \\ \\ K_n &= K_0 \cdot (1+p)^n + E \cdot (1+p)^{n-1} + \ldots + E \cdot (1+p) + E \\ \\ &= K_0 \cdot (1+p)^n + E \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (1+p)^k \\ &= K_0 \cdot (1+p)^n + E \cdot \frac{1-(1+p)^n}{1-(1+p)} \\ &= K_0 \cdot (1+p)^n + E \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{p}. \end{aligned}$$

□

Erfolgt am Ende einer jeden Periode ein gleichbleibender Rückzug E, gilt die gleiche Formel. E ist dann ein negativer Wert.

Ergänzung: Vorschüssige Rente



Rekursion

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 + E + p(K_0 + E) &&= (1+p)(K_0 + E) \\ K_2 &= K_1 + E + p(K_1 + E) &&= (1+p)(K_1 + E) \\ \ldots & \quad \ldots \end{aligned}$$

$$\boxed{K_n = (1+p)(K_{n-1} + E)}$$

4 Testfragen zur Vorlesung

Hinweis: Bevor Sie die Übungsaufgaben lösen, sollten Sie den Stoff der Vorlesung verstanden haben. Insbesondere sollten Sie die folgenden einfachen Fragen beantworten können. Diese Fragen werden im Allgemeinen nicht in den Übungen besprochen, können aber prüfungsrelevant sein.

1. Definieren Sie die Begriffe Zahlenfolge, geometrische Folge, nach oben beschränkte Folge, nach unten beschränkte Folge, beschränkte Folge, monoton wachsende Folge, streng monoton wachsende Folge, monoton fallende Folge, streng monoton fallende Folge, konvergente Folge, Nullfolge und divergente Folge. Überlegen Sie sich zu jeder Eigenschaft (und eventuell auch für sinnvolle Kombinationen mehrerer Eigenschaften) einfache Beispielfolgen.

2. Geben Sie zwei Beispiele von direkt definierten Zahlenfolgen und zwei Beispiel von rekursiv definierten Zahlenfolgen an.

3. Sei q eine reelle Zahl. Welches Konvergenzverhalten kann die Folge $\{q^n\}$ (in Abhängigkeit von q) haben?

4. Definieren Sie die Begriffe unendliche geometrische Reihe und n-te Partialsumme einer unendlichen geometrischen Reihe.

5 Übungsaufgaben

5.1 Niveau 1

1. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^4+6n}{2n^2-n+1} \qquad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n}{2n^3+2n+1} \qquad c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n}{2n^2+2n+1}$$

2. Berechnen Sie

$$a)\ \sum_{k=0}^{5}\left(\frac{3}{4}\right)^k \qquad b)\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k$$

3. Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\left(1+3\cdot\frac{4}{n}\right)^n$.

4. Ein Kapital von 50′000 Franken werde mit einem Jahreszinssatz von 5% verzinst. Gesucht ist der Kontostand nach 10 Jahren bei jährlicher Verzinsung.

5.2 Niveau 2

1. Bestimmen Sie (falls nötig durch Ausprobieren) die folgenden Grenzwerte.

$$a)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2}{n+3}\right)$$

$$b)\quad 1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}+\dots$$

$$c)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

$$d)\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{12}{7n}\right)^{2\cdot n}$$

$$e)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n$$

2. Ein Kapital von 50′000 Franken werde mit einem Jahreszinssatz von 5% verzinst. Gesucht ist der Kontostand nach 10 Jahren bei

   (a) monatlicher bzw.
   (b) kontinuierlicher

   Verzinsung.

3. Eine Person zahlt 10 Jahre lang 1000 Franken am Ende eines jeden Jahres auf ein Konto ein. Wieviel Geld befinden sich nach 10 Jahren auf diesem Konto, wenn der (jährliche) Zinssatz 5% beträgt?

4. In welcher Zeit verdoppelt sich ein Guthaben, das auf einem Konto mit einmaliger jährlicher Verzinsung $p = 0.05$ angelegt ist?

5.3 Niveau 3

1. Eine Person zahlt 10 Jahre lang 1000 Franken am Ende eines jeden Jahres auf ein Konto ein. Wie lange kann diese Person anschliessend eine ebensolche Rente beziehen, wenn der Zinssatz 5% beträgt?

2. In welcher Zeit verdoppelt, verdreifacht bzw. ver-k-facht sich ein Guthaben, das auf einem Konto mit einmaliger jährlicher Verzinsung zum Zinssatz p angelegt ist?

3. Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+2n}\right)$.

4. Wir betrachten die allgemeine nachschüssige Rentenformel

$$K_n \quad = \quad K_0 \cdot (1+p)^n + E\,\frac{(1+p)^n-1}{p}.$$

   Diese Gleichung enthält die fünf Variablen K_n, K_0, E, n und p und sie ist nach K_n aufgelöst.

   (a) Lösen Sie die Gleichung nach K_0 auf.

   (b) Lösen Sie die Gleichung nach E auf.

   (c) Lösen Sie die Gleichung nach n auf.

   (d) Lösen Sie die Gleichung falls möglich nach p auf.

   Versuchen Sie Ihre Ergebnisse in möglichst einfacher Form darzustellen.

Lösungen der Übungsaufgaben

Niveau 1

1. $a)$ ∞, $b)$ 0 und $c)$ 5/2
2. $a)$ 3.288, $b)$ 4
3. e^{12}
4. $81'444.73$ Franken

Niveau 2

1. $a)$ 2, $b)$ 3/5, $c)$ e (Eulersche Zahl), $d)$ $e^{24/7}$ und $e)$ e^5
2. $a)$ $82'350.48$ Franken und $b)$ $82'436.06$ Franken
3. $12'577.89$ Franken
4. 15 Jahre (oder 14.2, d.h. nach 14 Jahren hat es sich noch nicht ganz verdoppelt und nach 15 Jahren ist es mehr als das Doppelte)

Niveau 3

1. 20 Jahre

   Hinweis: Auch für die Zeit der Rentenzahlung muss (und kann) die Rentenformel, mit einem negativen E, verwendet werden.

2. $$n = \frac{\ln(k)}{\ln(1+p)} \quad \text{Aufrunden!}$$

3. 1/2

   Hinweis: Erweitern mit $\sqrt{n^2+3n+1} + \sqrt{n^2+2n}$ und binomische Formel.

4. $$\begin{aligned} K_0 &= \frac{pK_n + E - E(1+p)^n}{p(1+p)^n} \\ E &= p\,\frac{K_n - K_0(1+p)^n}{(1+p)^n - 1} \\ n &= \frac{\ln\left(\dfrac{pK_n + E}{pK_0 + E}\right)}{\ln(1+p)} \end{aligned}$$