Universität Basel
Abteilung Quantitative Methoden

Mathematik 1
Dr. Thomas Zehrt
Reelle Funktionen

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen in der Ökonomie

Ein wichtiges Problem der Ökonomie (und anderer Wissenschaften) ist es, bestehende Kausalitäten (Beziehungen zwischen Ursache(n) und Wirkung) zu erkennen und möglichst gut (quantitativ) zu beschreiben. Natürlich könnte man zunächst sagen, dass Alles mit Allem zusammen hängt und man muss versuchen, die wichtigsten Ursachen für eine Wirkung zu erkennen und sich bei der Modellbildung auf diese wenigen Parameter konzentrieren.

Hier spiegelt sich das Grundproblem der Modellbildung wieder: Die extrem komplexe Realität muss bei der Modellbildung stark vereinfacht werden. Wir sollten relevante Faktoren für das zu lösende Problem erkennen und (hoffentlich) Unwichtiges ignorieren. Die Modelle müssen also einfach genug sein, um darin zu rechnen und kompliziert genug, um noch genügend gut die Realität zu beschreiben. Also einerseits: Eine Landkarte der Schweiz, die genau so gross ist wie die Schweiz, ist ein gutes Modell, aber für den Wanderer nutzlos. Andererseits sagt man: Das beste Modell für einen Hund ist ein Hund. Am besten noch der selbe Hund.

Funktionen sind besonders gut geeignet, um Ursache-Wirkungs Beziehungen zu modellieren:

$$\begin{array}{ccc} y & = & f(x) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Wirkung} & & \text{Ursache} \end{array}$$

1.1 Nachfrage- und Angebotsfunktionen

Es bezeichne:

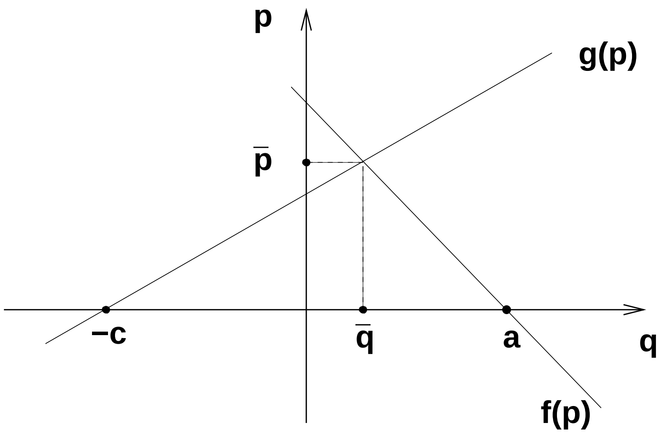
- $q_d = f(p)$ die nachgefragte Menge eines Gutes als Funktion des Preises p.
- $q_s = g(p)$ die angebotene Menge eines Gutes als Funktion des Preises p.

Die Funktion $f(p)$ sollte monoton fallend sein, da es anschaulich klar ist (?), dass die nachgefragte Menge eines Gutes kleiner wird, umso höher der Preis ist. Die Funktion $g(p)$ dagegen sollte monoton wachsend sein. Häufig wird hier ein linearer Modellansatz verwendet:

$$q_d = f(p) = a - bp \quad \text{und} \quad q_s = g(p) = -c + dp \qquad \text{mit } a, b, c, d > 0$$

Zurückgehend auf den Ökonomen Marshall wird traditionellerweise (und in mathematischer Hinsicht unüblicher Art) die unabhängige Variable p in vertikaler und die abhängige Variable q in horizontaler Richtung abgetragen.

Der Schittpunkt $(\bar{p}, \bar{q})$ der beiden Kurven ist hier von besonderem Interesse, denn er entspricht dem sogenannten Marktgleichgewicht: Wird die Menge $\bar{q}$ des Gutes zum Preis $\bar{p}$ angeboten, so ist die Nachfrage gleich dem Angebot des Gutes.



Beispiel 1.1

$$q_d = f(p) = 5 - 2p \quad und \quad q_s = g(p) = -3 + 2p$$

Schnittpunktskoordinaten: $(\bar{p}, \bar{q}) = (2, 1)$

$$\begin{array}{rlcl} & f(\bar{p}) & = & g(\bar{p}) \\ \Leftrightarrow & 5 - 2\bar{p} & = & -3 + 2\bar{p} \\ \Leftrightarrow & 8 & = & 4\bar{p} \\ \Leftrightarrow & \bar{p} & = & 2 \end{array}$$

und

$$\bar{q} \;=\; f(\bar{p}) \;=\; g(\bar{p}) \;=\; 1.$$

1.2 Die Engel-Funktion

Die nachgefragte Menge q eines Gutes wird als Funktion des persönlichen Einkommens E dargestellt:

$$q = q(E)$$

- Eine Engel-Funktion für ein ,,normales" Gut (z.B. Steak)
  - mehr Geld $\rightsquigarrow$ mehr Steaks
  - Obergrenze: $s = 200$ Steaks pro Monat
  - man muss mindestens 500.− pro Monat verdienen, um ein Steak kaufen zu können (Lebenserhaltungskosten)

  $$q(E) = s\left(1 - \frac{E_0}{E}\right) \qquad E \geq E_0 > 0.$$

  Der Parameter s heisst auch der Sättigungsgrad.

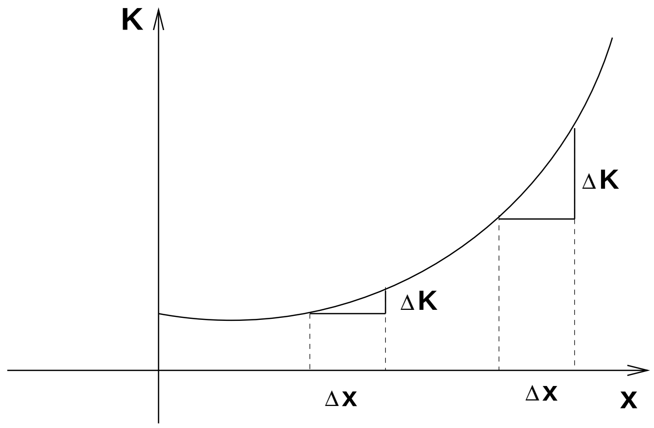
- Eine Engel-Funktion für ein ,,inferiores" Gut (z.B. Kartoffeln)
  - mehr Geld $\rightsquigarrow$ weniger Kartoffeln (man isst dann lieber Kaviar)
  - man muss mindestens $E_0 = 500.-$ pro Monat verdienen, um Kartoffeln kaufen zu können (Lebenserhaltungskosten)

  $$q(E) = \frac{a}{E} \qquad E \geq E_0 > 0.$$

1.3 Kostenfunktion

Hier seien $K(x)$ die Kosten, die zur Erzeugung des Outputs x anfallen. Anschaulich begründbar sind die folgenden Eigenschaften der Funktion $K(x)$:

1. $K(x)$ monoton steigend.
2. Die zusätzlichen Kosten ΔK, die zur Herstellung weiterer Δx Einheiten des Gutes anfallen, nehmen von einem gewissen Wert x_0 an zu: Je grösser $x(> x_0)$, desto grösser die Kostensteigerung.



Als Modell wird häufig ein Polynom 3. Grades verwendet:

$$K(x) \quad = \quad k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3.$$

Beispiel 1.2 *(Nichtrealistische Kostenfunktion eines Autoherstellers)*

$$K(x) \quad = \quad x^3 + 5'000$$

- *um* $x_0 = 20$ *Autos zu bauen, fallen Kosten von* $K(20) = 20^3 + 5'000 = 13'000$ *an.*
- *um* $x_0 = 40$ *Autos zu bauen, fallen Kosten von* $K(40) = 40^3 + 5'000 = 69'000$ *an.*

Es soll ein Auto mehr produziert werden ($\Delta x = 1 = 21 - 20 = 41 - 40$*). Wie teuer ist dieses Auto in beiden Fällen?*

- $20 \rightsquigarrow 21$

$$\Delta K \quad = \quad K(21) - K(20) \quad = \quad 21^3 - 20^3 \quad = \quad 1'261$$

- $40 \rightsquigarrow 41$

$$\Delta K \quad = \quad K(41) - K(40) \quad = \quad 41^3 - 40^3 \quad = \quad 4'921$$

2 Stetigkeit

2.1 Definitionen

Definition 2.1 *Im Folgenden sei f eine auf einem Intervall I definierte Funktion. Dann heisst f stetig in $x_0 \in I$, falls für* **jede** *Folge $\{x_n\}$, mit $x_n \neq x_0$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad = \quad f(x_0).$$

Die Funktion heisst stetig, wenn sie in jedem Punkt stetig ist.

Schreibweise:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \quad = \quad f(x_0).$$

Beispiel 2.1 *Wir wollen direkt zeigen, dass die Funktion $f(x) = x^2$ im Punkt $x_0 = 0$ stetig ist. Sei also $\{x_n\}$ eine Zahlenfolge mit den beiden Eigenschaften*

- $x_n \neq x_0 = 0$ *für alle n*
- $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Natürlich gibt es unendlich viele solcher Zahlenfolgen (z.B. $x_n = 1/n$, $x_n = 1/n^2$, $x_n = (1/2)^n$, …) und unsere Lebenszeit reicht bei weitem nicht aus, um jeden Einzelfall zu überprüfen. Glücklicherweise können wir die allgemeinen Rechenregeln für Grenzwerte von Zahlenfolgen nutzen. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} x_n^2 \;=\; \lim_{n\to\infty} \underbrace{x_n}_{\to 0} \cdot \overbrace{x_n}^{\to 0} \;=\; 0 \;=\; f(0) \;=\; 0^2$$

Fertig!!

In der Menge aller Zahlenfolgen $\{x_n\}$, die gegen x_0 konvergieren, gibt es zwei interessante Teilmengen: die Zahlenfolgen die sich von rechts annäheren (für alle Folgenglieder gilt $x_n > x_0$) und die Zahlenfolgen die sich von links annäheren (für alle Folgenglieder gilt $x_n < x_0$). Schränkt man sich zunächst auf diese beiden Teilmengen ein entsteht gegebenenfalls der rechts- bzw. linksseitige Grenzwert der Funktion im Punkt x_0.

- Falls für jede Folge $\{x_n\}$ mit $x_n > x_0$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt:

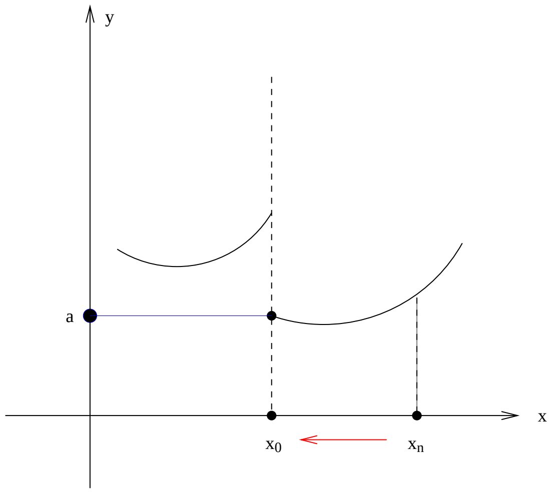
  $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad = \quad a \;=:\; \lim_{x\to x_0+} f(x),$$

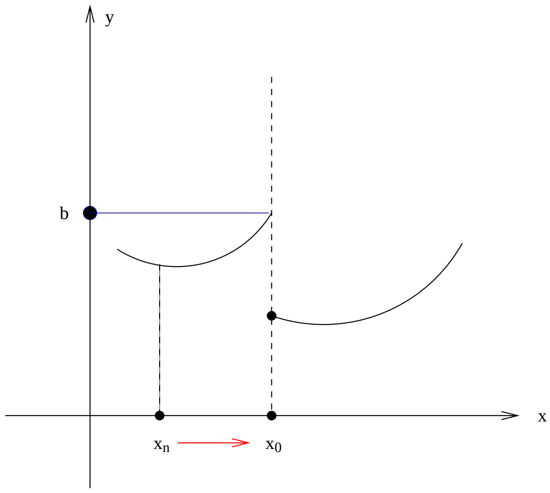
  so heisst dieser Grenzwert rechtsseitiger Grenzwert von f an der Stelle x_0.

- Falls für jede Folge $\{x_n\}$ mit $x_n < x_0$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt:

  $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad = \quad b \;=:\; \lim_{x\to x_0-} f(x),$$

  so heisst dieser Grenzwert linksseitiger Grenzwert von f an der Stelle x_0.





Mit diesen neuen Begriffen können wir eine andere Beschreibung der Stetigkeit, die natürlich zur obigen Definition äquivalent ist, formulieren.

Satz 1 *Die Funktion f ist an der Stelle x_0 stetig, falls*

1. *$f(x_0)$ definiert ist und*
2. $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$.

2.2 Rechenregeln und wichtige Grenzwerte

Für das Rechnen mit Grenzwerten gelten die folgenden hilfreichen Regeln.

Satz 2 *Unter der Voraussetzung, dass die in den Regeln auftretenden Grenzwerte existieren, gilt*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) &= \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) \\
\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) \\
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} \quad \textit{falls} \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0.
\end{aligned}$$

Beispiel 2.2 *Typische Grenzwertprobleme sind von der (zunächst) unbestimmten Form $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Für rationale Ausdrücke dieser Gestalt (d.h. im Zähler und im Nenner steht ein Polynom) gibt es einen allgemeingültigen Lösungsalgorithmus.*

Seien $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ und $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ zwei Polynome vom Grad n bzw. m. Natürlich ist der Ausdruck

$$\lim_{x \to \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

von der Form $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, also unbestimmt. Zur Grenzwertbestimmung gehen wir nun ganz genauso vor, wie bei dem analogen Problem für Zahlenfolgen:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} \frac{p(x)}{q(x)} &= \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)}{x^m \left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}\right)} \\
&= \frac{a_n}{b_m} \cdot \lim_{x \to \infty} x^{n-m} \\
&= \begin{cases} \mathit{sign}\left(\frac{a_n}{b_m}\right) \cdot \infty & \textit{für } n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & \textit{für } n = m \\ 0 & \textit{für } n < m \end{cases}
\end{aligned}$$

Dabei ist mit (der Funktion) $sign(x)$ einfach das Vorzeichen der rellen Zahl x gemeint, also z.B. $sign(-3) = -1$.

Beispiel 2.3 *Der Ausdruck*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$$

ist von der Form $0/0$ *also unbestimmt. Insbesondere ist die 3. Regel nicht anwendbar. Ganz allgemein sind für solche unbestimmten Ausdrücke alle Grenzwerte bzw. Divergenz möglich. Durch Experimentieren (setzen Sie ein kleines* x *in den Ausdruck ein und berechnen Sie das Resultat) errät man eventuell, dass der Grenzwert* $1/2$ *sein könnte. Es gibt auch kein allgemeingültiges ''Patentrezept" um solche Ausdrücke zu berechnen. Hier sollte man den Ausdruck geschickt (aber da muss man drauf kommen) erweitern und im Zähler die dritte Binomische Formel anwenden:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1+x^2-1}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Achtung!

Die Intuition täuscht (manchmal)! Schätzen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2'000'000'000}}{e^x}$!

Wichtige Grenzwerte

1.	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^a}$	$=$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-a}$	$=$	0	für $a > 0$
2.	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k}$	$=$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^{-k}$	$=$	0	für $k \in \mathbb{N}$
3.	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x}$	$=$	$\lim\limits_{x\to+\infty} a^{-x}$	$=$	0	für $a > 1$
4.	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{a^x}$	$=$	$\lim\limits_{x\to-\infty} a^{-x}$	$=$	$+\infty$	für $a > 1$
5.	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\log_a(x)}$	$=$		$=$	0	für $a > 1$
6.	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x}$	$=$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^a e^{-x}$	$=$	0	für $a > 0$
7.	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a}$	$=$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-a} \cdot \ln(x)$	$=$	0	für $a > 0$

2.3 Möglichkeiten von Unstetigkeiten

Sprungstellen An einer Sprungstelle x_0 der Funktion f stimmen der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert nicht überein.

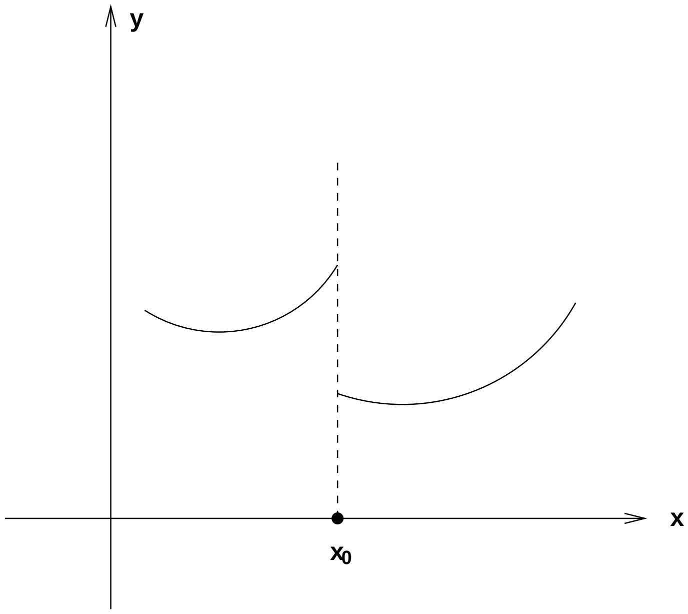


Abbildung 1: Sprungstelle

Beispiel 2.4

$$f(x) := \begin{cases} x+1 & \text{für } x \leq 2 \\ x^2 & \text{für } 2 < x \end{cases}$$

hat eine Sprungstelle in $x_0 = 2$, denn es gilt

$$\lim_{x \to 2-} f(x) \;=\; 3 \quad \textit{und} \quad \lim_{x \to 2+} f(x) \;=\; 4.$$

Polstellen Eine gebrochen rationale Funktion hat in Nullstellen der Nennerfunktion, die keine Nullstelle der Zählerfunktion sind, eine Polstelle.

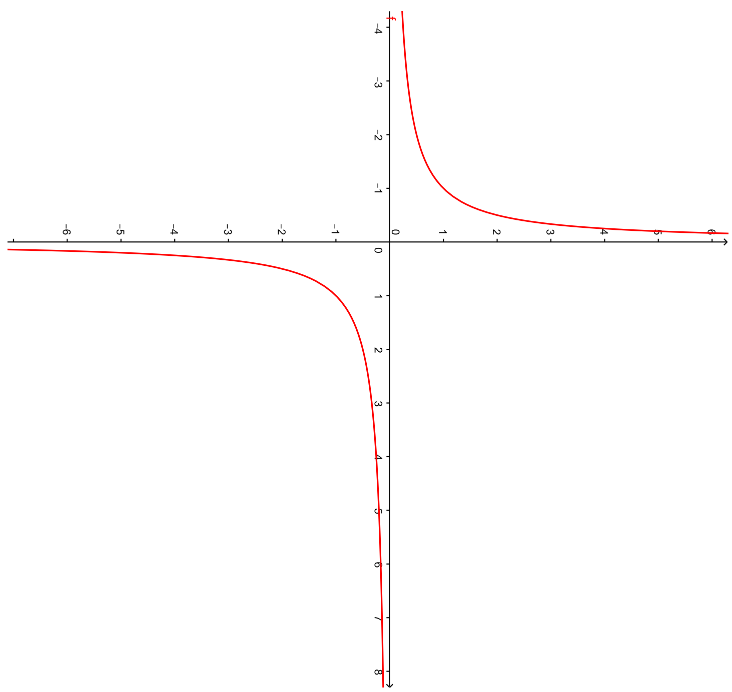
Beispiel: Ein typisches Beispiel für eine Funktion mit einer Polstelle in $x_0 = 0$ ist

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{x}.$$

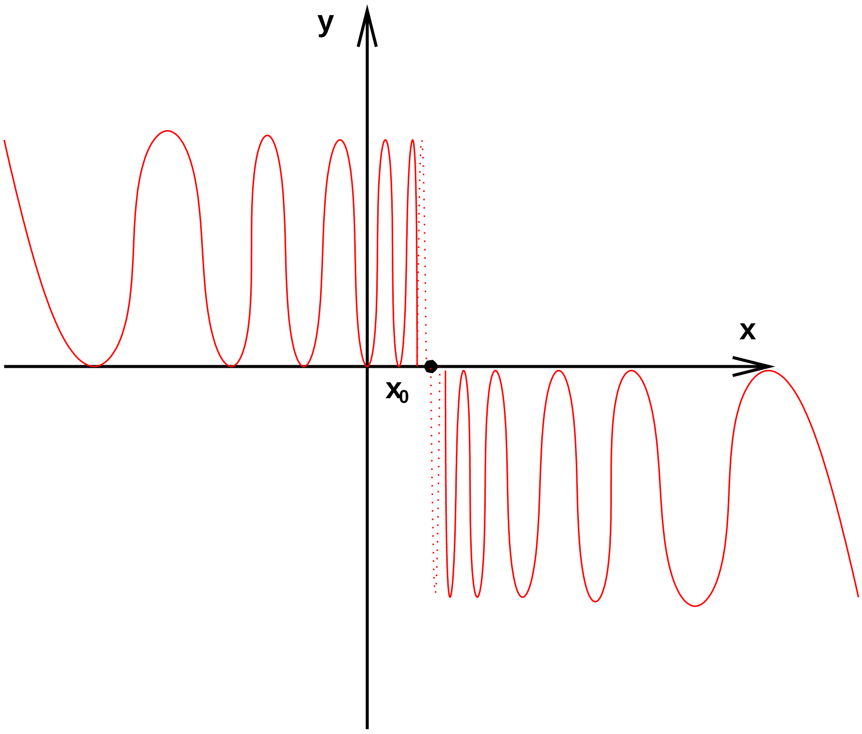
Es gilt

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} \quad = \quad \infty$$
$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} \quad = \quad -\infty$$

Skizzieren Sie die Funktion.



Wesentliche Unstetigkeit (Oszillation)



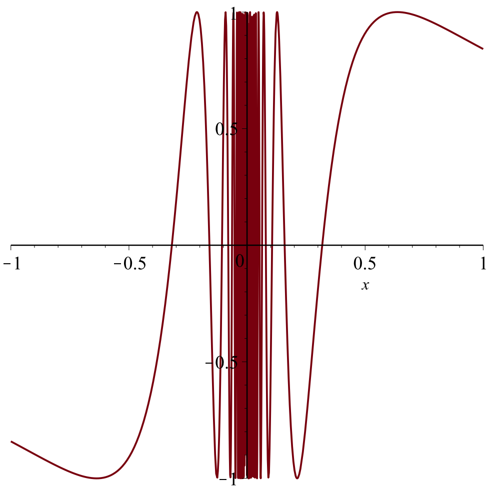
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \qquad \text{existiert nicht}$$

Beispiel 2.5

1. *Betrachten wir die Funktion*

$$f(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \textit{für } x \neq 0 \\ ?? & \textit{für } x = 0 \end{cases} .$$

Kann man $f(0)$ so wählen, dass f eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion wird?



2. *Betrachten wir die leicht abgeänderte Funktion*

$$f(x) := \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \textit{für } x \neq 0 \\ ?? & \textit{für } x = 0 \end{cases} .$$

Kann man $f(0)$ so wählen, dass f eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion wird?

2.4 Eigenschaften stetiger Funktionen

Die folgenden Sätze geben uns einfache Möglichkeiten, wie wir aus stetigen Funktionen neue stetige Funktionen konstruieren können.

Satz 3 *Seien zwei Funktionen f und g gegeben, die im Punkt x_0 stetig sind. Dann gilt*

1. *$f(x) \pm g(x)$ ist in x_0 stetig,*
2. *$f(x) \cdot g(x)$ ist in x_0 stetig,*
3. *$f(x)/g(x)$ ist in x_0 stetig, falls $g(x_0) \neq 0$.*

Satz 4 *Die zusammengesetzte Funktion $F(x) = f(g(x))$ ist stetig in x_0, falls f in $g(x_0)$ und g in x_0 stetig sind.*

Stetige Funktionen und Folgerungen:

- Polynome

  $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

  sind stetige Funktionen.

- Gebrochen rationale Funktionen

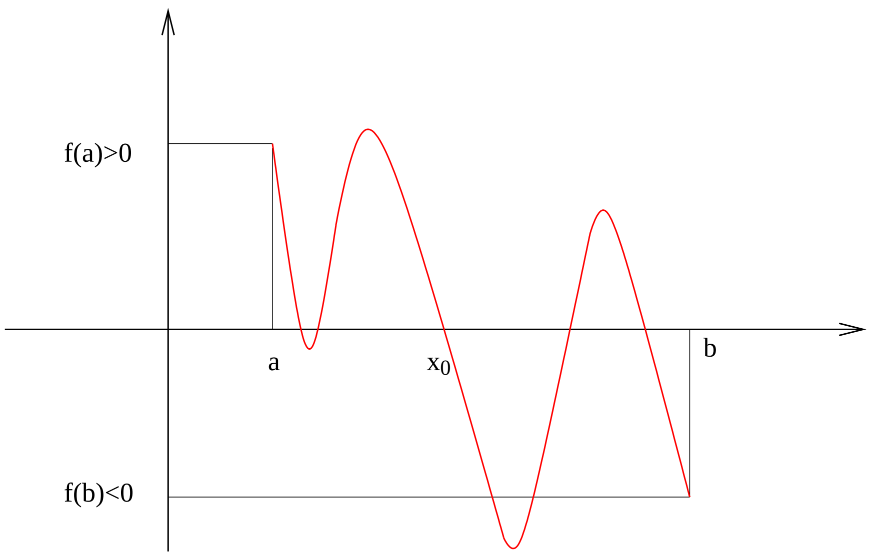
  $$r(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m}$$

  sind stetige Funktionen, mit Ausnahme der Nullstellen des Nenners.

- wichtige stetige Funktionen sind $|x|$, e^x, $\ln(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$ und x^a, $a > 0$.
- die Funktion $\tan(x)$ ist auf dem Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ stetig, auf ganz $\mathbb{R}$ aber nicht.

3 Der Nullstellensatz

Satz 5 (Nullstellensatz) *Die Funktion f sei auf dem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ stetig und es gelte $f(a) \cdot f(b) < 0$ (d.h. die Funktion hat an den Intervallgrenzen Funktionswerte mit unterschiedlichen Vorzeichen). Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = 0$.*



Beispiel 3.1 *1. Die auf $[0, 1]$ stetige Funktion*

$$f(p) = \frac{1200}{(1+p)^2} - 1000$$

hat dort mindestens eine Nullstelle, denn

$$\begin{aligned} f(0) &= 1200 - 1000 = 200 > 0 \\ f(1) &= 1200/4 - 1000 = -700 < 0 \end{aligned}$$

Diese Nullstelle ist sogar die einzige auf diesem Intervall, denn f ist dort streng monoton fallend. Seien $p_1 < p_2$ aus $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} & f(p_1) & > \quad & f(p_2) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1200}{(1+p_1)^2} - 1000 & > \quad & \frac{1200}{(1+p_2)^2} - 1000 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{(1+p_1)^2} & > \quad & \frac{1}{(1+p_2)^2} \\ \Leftrightarrow \quad & (1+p_2)^2 & > \quad & (1+p_1)^2 \end{aligned}$$

Warum ist die Funktion auf $[0, 1]$ streng monoton fallend? Können Sie den Beweis nachvollziehen?

2. *Die Funktion*

$$f(x) \;=\; 4e^{-x} + x^2 - 3$$

besitzt im Intervall $[0,1]$ *mindestens eine Nullstelle, denn* f *ist zunächst stetig auf* $[0,1]$ *(?) und es gilt*

$$f(0) = 1 > 0 \qquad f(1) = -0.528 < 0.$$

3. *Ein Projekt führt zu folgenden Auslagen und Erträgen:*

   - *einmalige Auslage sofort:* $A_0 = 70'000$
   - *einmaliger Ertrag nach 3 Jahren:* $E_3 = 32'000$
   - *einmaliger Ertrag nach 4 Jahren:* $E_4 = 64'000$

   Wie wir im Abschnitt ,,Finanzmathematik,, gesehen hatten, beträgt der Barwert dieses Projektes bei einem Bewertungszins r

$$B(r) \;=\; \frac{64'000}{(1+r)^4} + \frac{32'000}{(1+r)^3} - 70'000.$$

   Insbesondere gilt

$$B(0.05) = 10'296 > 0 \qquad B(0.10) = -2'245 < 0.$$

   Zudem ist die Funktion $B(r)$ *auf dem Intervall* $[0.05, 0.1]$ *stetig und gemäss des Nullstellensatzes existiert somit mindestens ein* $r_0 \in (0.05, 0.1)$ *mit* $B(r_0) = 0$*. Da die Funktion* $B(r)$ *auch streng monoton fallend ist, ist die Nullstelle auch eindeutig bestimmt. Der Zinssatz* r_0 *wird als* <u>*interne Ertragsrate*</u> *des Projektes bezeichnet.*

   Zur numerischen Bestimmung des Wertes von r_0 *stehen verschiedene Verfahren zur Verfügung (z.B. das Bisektionsverfahren oder das Newton-Verfahren). Man erhält* $r_0 = 0.0902$*.*

4 Differenzen- und Differentialquotient

Es ist wichtig, dass Sie verstehen, welche Bedeutung die Ableitung einer Funktion hat. Der Wert $f'(x)$ kann dabei als die Steilheit des Graphen von f im Punkt x angesehen werden. Wir werden im Folgenden den üblichen Weg der Definition der Ableitung über Differenzen- und Differentialquotient (das ist die Ableitung!) nochmals durchgehen.

Das (geheimnisvolle) Symbol Δ bezeichnet die Änderung einer mathematischen Grösse.

Beispiel 4.1

- *ändert sich die Variable x von 2 auf 1, so ist $\Delta x = 1 - 2 = -1$*
- *ändert sich die Variable y von 3 auf 1.5, so ist $\Delta y = 1.5 - 3 = -1.5$*
- *ändert sich die Funktion f von 1 auf 1.5, so ist $\Delta f = 1.5 - 1 = 0.5$*

Genauer: Ändert sich die Funktion f von 1 auf 1.5, so ist $\Delta f = 1.5 - 1 = 0.5$ (für $\Delta x = 2 - 1 = 1$)

$$\Delta f(x, \Delta x) \;=\; f(x + \Delta x) - f(x)$$

Definition 4.1 *Gegeben sei eine stetige Funktion $y = f(x)$. Unter der <u>durchschnittlichen Änderung</u> der Funktion f im Intervall $[x, x + \Delta x]$ vesteht man den Quotienten*

$$\frac{\Delta f(x, \Delta x)}{\Delta x} \;:=\; \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Der Ausdruck $\frac{\Delta f(x,\Delta x)}{\Delta x}$ wird auch als <u>Differenzenquotient</u> bezeichnet.

Lässt man nun den Punkt Q gegen P wandern, d.h. $\Delta x \to 0$ streben, so geht die Sekante in die Tangente im Punkt P über. Wir betrachten den Tangens des Neigungswinkels τ der Tangente.

Definition 4.2 *Der Grenzwert*

$$f'(x) \;:=\; \tan(\tau) \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

heisst der <u>Differentialquotient</u> oder <u>1. Ableitung</u> der Funktion f an der Stelle x, falls dieser Grenzwert existiert. Er stellt in gewisser Weise die ,,momentane Änderung,, von f an der Stelle x dar.

Schreibweise:

$$y' \;=\; f'(x) \;=\; \frac{df(x)}{dx} \;=\; \frac{dy}{dx} \;=\; Df(x)$$

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

1. Die Stetigkeit ist eine **notwendige Bedingung** für die Differenzierbarkeit.

   Anschaulich betrachtet ist es leicht einzusehen, dass man an eine Kurve in einem Punkt, in dem die Funktion nicht stetig ist, keine Tangente anlegen kann. Versuchen Sie zur Probe einen vernünftigen Weg zu finden, eine Tangente an eine Sprungstelle, Polstelle bzw. Oszillationsstelle anzulegen.

2. Die Stetigkeit ist aber keine **hinreichende Bedingung** für die Differenzierbarkeit.

Illustration:

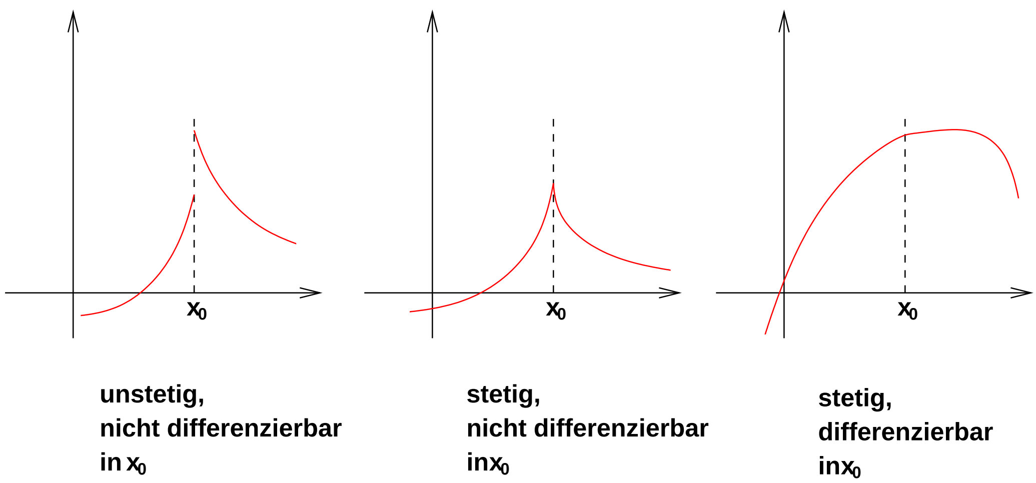


Abbildung 2: Stetigkeit und Differenzierbarkeit

5 Die Regeln von de l'Hospital

Wir wollen dieses Kapitel mit einer nützlichen Anwendung der Differentialrechnung beschliessen. Es ist häufig nötig, Grenzwerte von Quotienten zu bestimmen, wobei sowohl der Zähler als auch der Nenner bei Annäherung an den Punkt unseres Interesses, gegen 0 streben. Ein Beispiel ist der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad = \quad \frac{0}{0}$$

Satz 6 (Regel von de l'Hospital) *Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Weiterhin sei*

- $\lim\limits_{x\to b-} g(x) \;=\; \lim\limits_{x\to b-} f(x) \;=\; 0$ *oder*
  $\lim\limits_{x\to b-} g(x) \;=\; \lim\limits_{x\to b-} f(x) \;=\; \infty$ *für $x \to b-$ (linksseitiger Grenzwert)*
- $\lim\limits_{x\to b-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \;=\; L$ *mit $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.*

Dann gilt

$$\boxed{\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}\ .}$$

Entsprechendes gilt für die Grenzprozesse $x \to a+$, $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

Beispiel 5.1

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad = \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} \;=\; \frac{1}{1} \;=\; 1$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{2^x - 4} \quad = \quad \lim_{x\to 2} \frac{2x}{\ln(2)\, 2^x} \quad = \quad \frac{2 \cdot 2}{\ln(2)\, 2^2} \quad = \quad \frac{1}{\ln(2)}.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} \quad = \quad \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} \;=\; \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} \quad = \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} \;=\; 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln(x^2+1)} \quad = \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2+1} 2x} \;=\; \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{2x} \;=\; \infty$$

Beweisskizze:

Sei $\lim\limits_{x\to b-} g(x) = \lim\limits_{x\to b-} f(x) = 0$ und nehmen wir an, dass alle im folgenden auftretenden Grenzwerte existieren und dass alle Grenzwertbildungen vertauschbar sind. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to b-} \frac{\lim\limits_{dx\to 0} \dfrac{f(x+dx)-f(x)}{dx}}{\lim\limits_{dx\to 0} \dfrac{g(x+dx)-g(x)}{dx}} \\
&= \lim_{x\to b-} \left(\lim_{dx\to 0} \frac{f(x+dx)-f(x)}{g(x+dx)-g(x)} \right) \\
&= \lim_{dx\to 0} \left(\lim_{x\to b-} \frac{f(x+dx)-f(x)}{g(x+dx)-g(x)} \right) \\
&= \lim_{dx\to 0} \left(\lim_{x\to b-} \frac{f(x+dx)-0}{g(x+dx)-0} \right) \\
&= \lim_{x\to b-} \left(\lim_{dx\to 0} \frac{f(x+dx)}{g(x+dx)} \right) \\
&= \lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}
\end{aligned}$$

$\square$

6 *Geogebra*

Geogebra ist eine kostenlose dynamische Mathematiksoftware für Schüler und Studenten. Geogebra unterstützt innovatives Lernen im Fach Mathematik und kann von der Homepage

www.geogebra.org

herunter geladen und (meist problemlos) auf dem privaten Rechner installiert werden. Tun Sie das bitte! Mittlerweile gibt es auch Versionen für Tablets und Smartphones.

Wir wollen gleich mit dem Programmieren beginnen und eine Animation erstellen, die uns **den** zentralen Begriff dieses Kurses hoffentlich besser verstehen lässt:

Die **Ableitung** (einer Funktion).

Programm:

1. Öffnen Sie Geogebra bzw. ein neues Fenster im Menü ,,Datei“.
2. Geben Sie in der Zeile ,,Eingabe“ folgendes ein:

   $$f(x) = 0.1x^3 - x + 1$$

   und drücken Sie Enter.
3. Wählen Sie das Werkzeug ,,Neuer Punkt“ und klicken Sie dann auf den Funktionsgraphen.

   Der neu entstandenen Punkt A ist damit an den Graphen von f angehängt. Ändern Sie dann den Namen des Punktes auf T. (Windows: Rechte Maustaste + Umbenennen, Mac: Strg+Klicken)
4. Wählen Sie das Werkzeug ,,Tangenten“ und klicken Sie dann auf den Punkt T und den Graphen von f. Ändern Sie dann den Namen der Tangente auf t (Windows: Rechte Maustaste + Umbenennen, Mac: Strg+Klicken)
5. Geben Sie in der Zeile ,,Eingabe“ folgendes ein:

   k = Steigung[t]

   Drücken Sie Enter.
6. Wählen Sie das Werkzeug ,,Bewege“, klicken Sie auf den Punkt T und ziehen den Punkt mit der Maus hin und her.
7. Geben Sie in der Zeile ,,Eingabe“ folgendes ein:

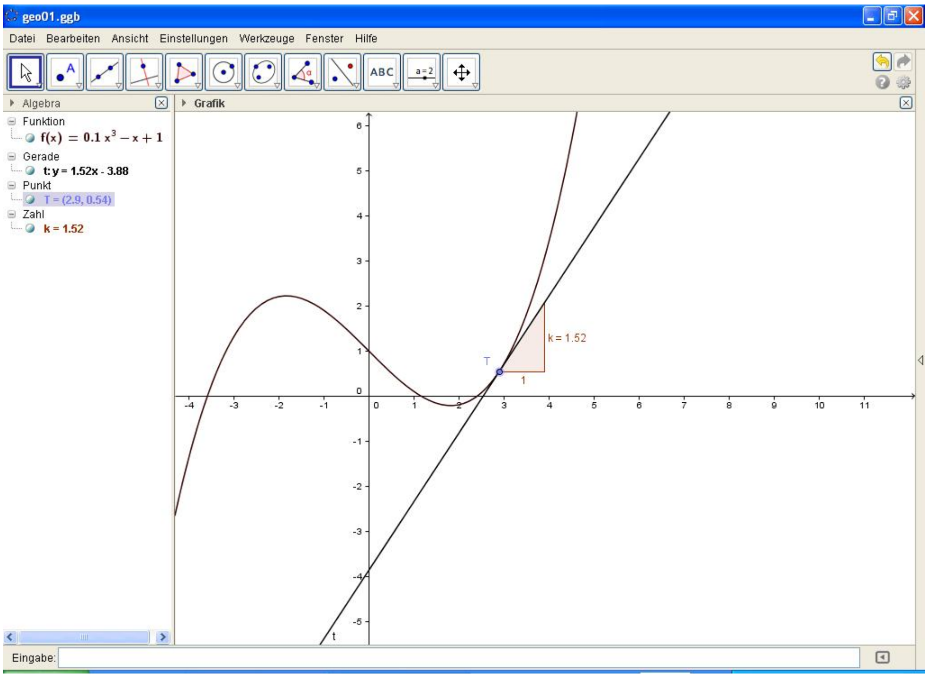
   $$B = (x(T), s)$$

   und drücken Sie Enter.

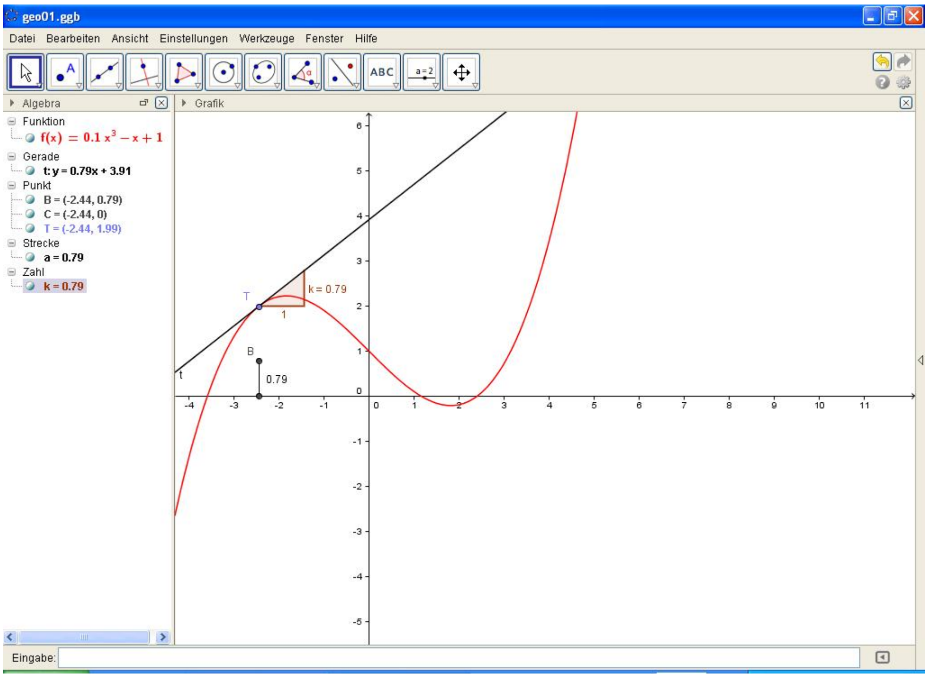
   Bemerkung: $x(T)$ gibt die x-Koordinate des Punktes T an.

8. Rechtsklick auf Punkt B und ,,Spur ein“ wählen.

9. Wählen Sie das Werkzeug ,,Bewege“ und ziehen Sie mit der Maus den Punkt T hin und her. Der Punkt B hinterlässt eine Spur.

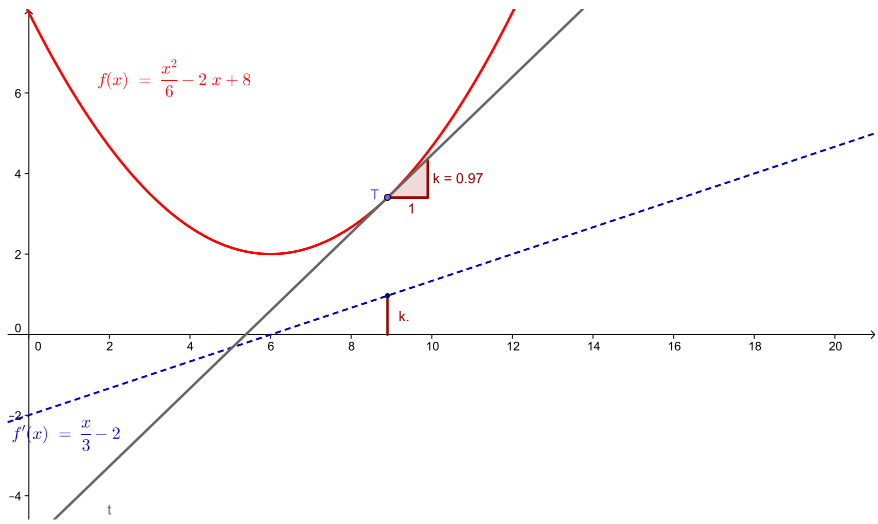


Natürlich können Sie auch alle Farben und Beschriftungen in der Animation ändern. Zusätzlich könnten Sie auch noch eine Strecke zwischen dem Punkt B und der x-Achse einfügen.

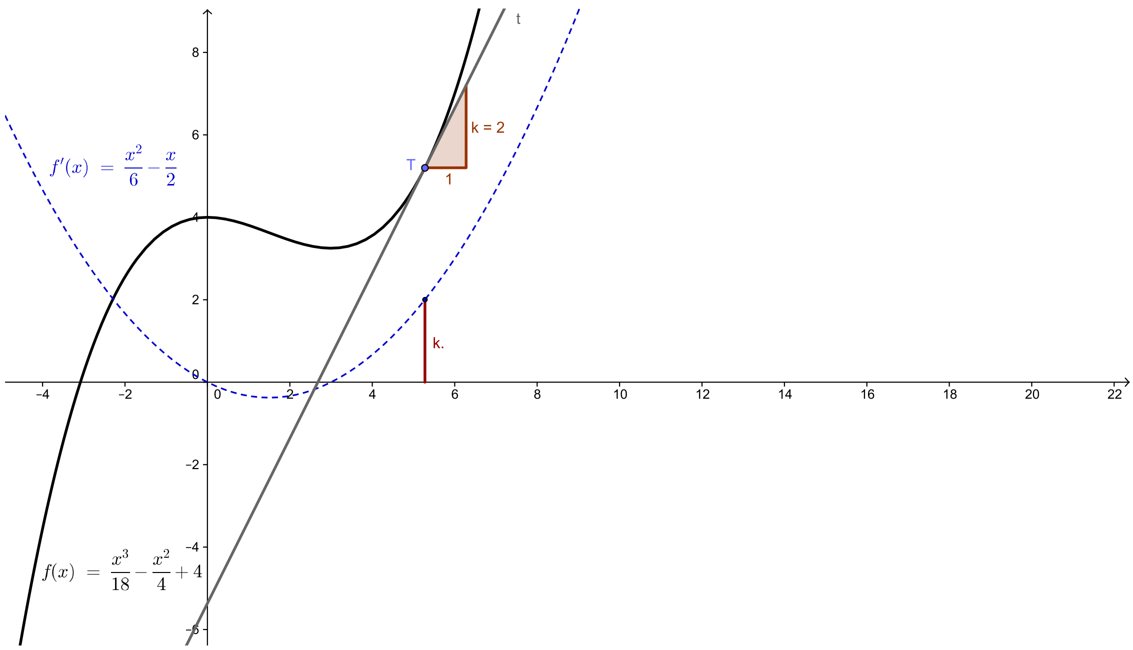


Selbstverständlich können Sie auch alle produzierten Bilder exportieren und in gebräuchliche Dateiformate (z.B. pdf) umwandeln.

Hier die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{6}x^2 - 2x + 8$ mit ihrer Ableitung:



Hier die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{18}x^3 - \dfrac{1}{4}x^2 + 4$ mit ihrer Ableitung:



7 Testfragen zur Vorlesung

Hinweis: Bevor Sie die Übungsaufgaben lösen, sollten Sie den Stoff der Vorlesung verstanden haben. Insbesondere sollten Sie die folgenden einfachen Fragen beantworten können. Diese Fragen werden im Allgemeinen nicht in den Übungen besprochen, können aber prüfungsrelevant sein.

1. Geben Sie die Definitionen für die Begriffe Funktion, Definitionsmenge, Wertebereich, injektiv, Graph einer Funktion, Monotonie, strenge Monotonie, Beschränktheit, gerade Funktion und ungerade Funktion.

2. Unter welcher Bedingung (welchen Bedingungen) ist eine Funktion umkehrbar?

3. Welche Eigenschaft hat der Graph einer umkehrbaren Funktion?

4. Nennen Sie für die aufgeführten Funktionen jeweils den (maximalen) Definitionsbereich, den Wertebereich und die Monotonieeigenschaften. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen. Es sollte dabei **nicht** nötig sein, Wertepaare mit dem Taschenrechner zu bestimmen. Der Skizze sollte man folgendes entnehmen können: alle Nullstellen im Intervall $[-2, 2]$, den Schnittpunkt mit der y-Achse und das Verhalten für $x \to \pm\infty$. Die Krümmung des Graphen sollte nicht zu sehr von der Realität abweichen.

   (a) $f(x) = 2^x$
   (b) $f(x) = \log_2(x)$
   (c) $f(x) = \sin(x)$
   (d) $f(x) = \cos(x)$
   (e) $f(x) = \tan(x)$

5. Wann heisst eine auf dem Intervall I definierte Funktion f stetig in $x_0 \in I$?

6. Welche Typen von Unstetigkeitsstellen kennen Sie? Geben Sie für jeden Typ eine Beispielfunktion an.

7. Begründen Sie die Relation $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

8. Was besagt der Nullstellensatz?

9. Für die folgenden Funktionen ist der Definitionsbereich D zu bestimmen:

   $$(a)\;\; f(x) = \sqrt{\ln(x-3)} \qquad\qquad (b)\;\; g(x) = \frac{\sqrt{x-6}}{\sqrt{10-x}}$$

10. Ermitteln Sie für die Funktionen

    $$(a)\;\; f(x) = \ln(1+x), \quad x \in (-1, \infty) \qquad\qquad (b)\;\; g(x) = e^{x^2+1}, \quad x \in [0, \infty)$$

    den Wertebereich und bestimmen Sie die zugehörigen Umkehrfunktionen.

8 Übungsaufgaben

8.1 Niveau 1

1. Die Nachfragefunktion nach einem Gut sei $q_d(p) = 15 - 3p$, die Angebotsfunktion für das selbe Gut sei $q_s(p) = -2 + 2p$.

   (a) Bei welchem Preis herrscht Marktgleichgewicht?

   (b) Drücken Sie den Preis als Funktion der nachgefragten (angebotenen) Menge aus.

2. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

   (a) $f_1(x) = \dfrac{3x+1}{x-4}$ für $x \neq 4$

   (b) $f_2(x) = xe^{\sqrt{x}}$

   (c) $f_3(x) = \ln\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$

   (d) $f_4(x) = 7^{3x}$

3. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Beachten Sie: Falls f im Punkt x_0 stetig ist gilt (natürlich) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2(x^2-x)}{(x-1)(x+1)}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2(x^2-x)}{(x-1)(x+1)}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2(x^2-x)}{(x-1)(x+1)}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^5+2}{x^3-1}$

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x^2e^x = \lim_{x\to +\infty} (-x)^2e^{-x}$

8.2 Niveau 2

1. Zeigen Sie, dass für alle $x > 0$ die Gleichung $x^x = e^{x\ln x}$ gilt. Bestimmen Sie dann die Ableitung der Funktion x^x.

2. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von l'Hospital.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \\ B &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1-3x}{x^2} \\ C &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{xt}-1-xt}{x^2} \quad \text{für ein } t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3. Können Sie die Gleichung $e^{-x} - x^2 = 0$ nach x auflösen? Wieviele Lösungen hat die Gleichung? (Skizzieren Sie die Funktionen e^{-x} und x^2). Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = e^{-x} - x^2$ auf $[0, 1]$ genau eine Nullstelle besitzt.

8.3 Niveau 3

1. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4} & x \neq 2, x \neq -2 \\ c & x = 2 \\ d & x = -2 \end{cases} .$$

   (a) Berechnen Sie zunächst die vier Grenzwerte (kürzen nicht vergessen):

$$\lim_{x \to \pm 2 \pm} \frac{x^2-2x}{x^2-4}$$

   (b) Gibt es eine reelle Zahl c, so dass f in $x = 2$ stetig ist?

   (c) Gibt es eine reelle Zahl d, so dass f in $x = -2$ stetig ist?

2. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte $\lim\limits_{x \to 0+} e^{-1/x}$ und $\lim\limits_{x \to 0-} e^{-1/x}$.

3. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} a \cdot e^{mx} & \text{für } x > 0 \\ mx + b & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

   mit $m \neq 0$. Die Parameter a, b und m sind so zu wählen, dass f an der Stelle 0 stetig ist und dort eine 1. Ableitung besitzt.

   Zusatz: Nutzen Sie Geogebra, um den Graphen von f zu skizzieren (Schieberegler für a, b und m erstellen).

Lösungen der Übungsaufgaben

Niveau 1

1. *a)* $\bar{p} = 3.4,\ \bar{q} = 4.8,$ *b)* $p = 5 - \frac{1}{3}q_d,\ p = 1 + \frac{1}{2}q_s$

2. *a)* $f_1'(x) = \dfrac{-13}{(x-4)^2},$ *b)* $f_2'(x) = \left(1 + \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right) e^{\sqrt{x}}$ Bemerkung: $\dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$

   c) $f_3'(x) = \dfrac{-2x}{1+x^2},$ *d)* $f_4'(x) = 3 \cdot \ln(7) \cdot 7^{3x}$

3. *a)* 8/3 (kürzen),

   b) 0.5,

   c) $\pm\infty$ (Rechts- und linksseitiger Grenzwert sind verschieden.),

   d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^5+2}{x^3-1} \;=\; \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^5(1+2/x^5)}{x^3(1-1/x^3)} \;=\; \infty$

   e) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^x \;=\; \lim\limits_{x\to\infty} (-x)^2 e^{-x} \;=\; 0$

Niveau 2

1. $(x^x)' \;=\; (1+\ln(x))x^x$ denn $x^x = (e^{\ln(x)})^x = e^{x\ln(x)}$

2. $A = 1$ $B = 9/2$ $C = \frac{1}{2}t^2$

3. Nullstellensatz und strenge Monotonie beweisen und ausnutzen

Niveau 3

1. $c = 0.5$; f ist für alle $d \in \mathbb{R}$ unstetig in $x = -2$

2. 0 und ∞

3. $a = b = 1$, m beliebig