

**Mathematik 1**

**Dr. Thomas Zehrt**

Ökonomische Anwendungen der  
Differentialrechnung

**Inhaltsverzeichnis**

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Marginale Funktionen</b>                               | <b>2</b>  |
| 1.1 Einführung . . . . .                                    | 2         |
| 1.2 Marginale Funktionen in der Mikroökonomie . . . . .     | 2         |
| 1.3 Marginale Funktionen in der Makroökonomie . . . . .     | 4         |
| 1.4 Marginale Funktionen und Optimierungsprobleme . . . . . | 5         |
| <b>2 Das (totale) Differential</b>                          | <b>6</b>  |
| <b>3 Elastizitäten</b>                                      | <b>10</b> |
| <b>4 Wachstumsraten</b>                                     | <b>13</b> |
| <b>5 Das Newton-Verfahren</b>                               | <b>14</b> |
| <b>6 Testfragen zur Vorlesung</b>                           | <b>16</b> |
| <b>7 Übungsaufgaben</b>                                     | <b>17</b> |
| 7.1 Niveau 1 . . . . .                                      | 17        |
| 7.2 Niveau 2 . . . . .                                      | 17        |
| 7.3 Niveau 3 . . . . .                                      | 17        |

# 1 Marginale Funktionen

## 1.1 Einführung

Gegeben sei eine ökonomische Funktion  $y = f(x)$ .

Wir wissen bereits, dass der Quotient

$$\frac{\Delta f(x, \Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

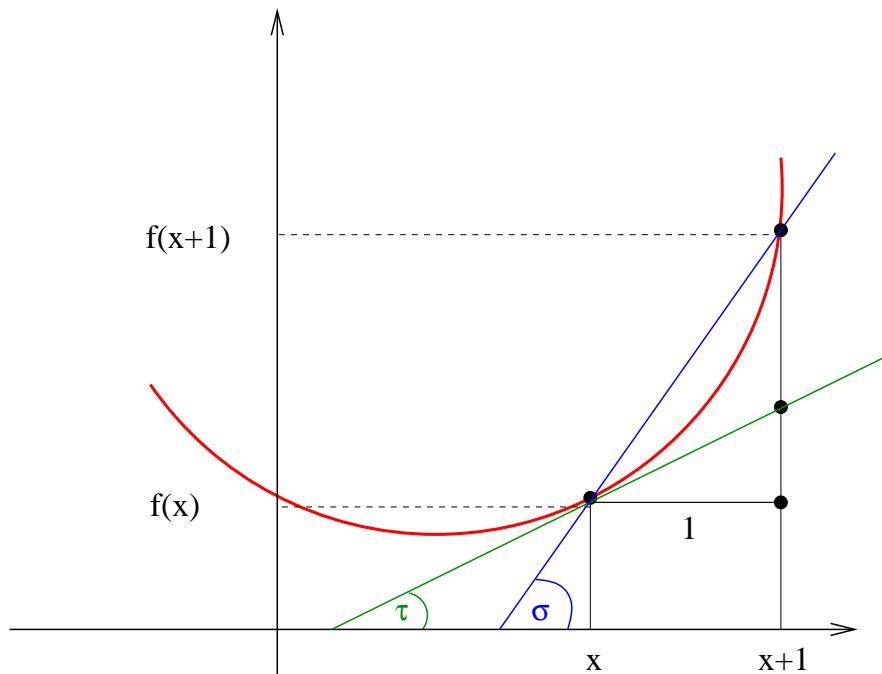
die durchschnittliche Änderung von  $f$  darstellt, wenn man  $x$  um  $\Delta x$  ändert. Der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

kann als momentane Änderung von  $f$  angesehen werden. Die Ableitung  $f'(x)$  wird (in ökonomischen Zusammenhängen) auch marginale Funktion genannt.

**Bemerkung 1.1** Setzen wir  $\Delta x = 1$ , so können wir die Ableitung von  $f$  (ungefähr) als die Änderung von  $f$  ansehen, falls  $x$  auf  $x + 1$  erhöht wird:

$$\underbrace{f'(x)}_{\tan(\tau)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \approx \frac{f(x + 1) - f(x)}{1} = \underbrace{f(x + 1) - f(x)}_{\tan(\sigma)}$$



## 1.2 Marginale Funktionen in der Mikroökonomie

Es sei  $K = K(x)$  eine Kostenfunktion (d.h.  $K(x)$  sind die Kosten zur Erzeugung von  $x$  Einheiten eines Gutes). Die Ableitung  $K'(x)$  nennen wir auch Grenzkostenfunktion.

### Interpretation:

$K'(x)$  kann (in erster Näherung) als die zusätzlichen Kosten interpretiert werden, die benötigt werden, um den Output von  $x$  auf  $x + 1$  Einheiten zu erhöhen.

Wir betrachten das rechtwinklige Dreieck mit den Eckpunkten  $P, Q$  und  $R$ . Dann gilt

$$K'(x) = \tan(\tau) = \frac{|QR| \text{ (Gegenkathete)}}{|PR| \text{ (Ankathete)}} = \frac{|QR|}{1} = |QR|$$

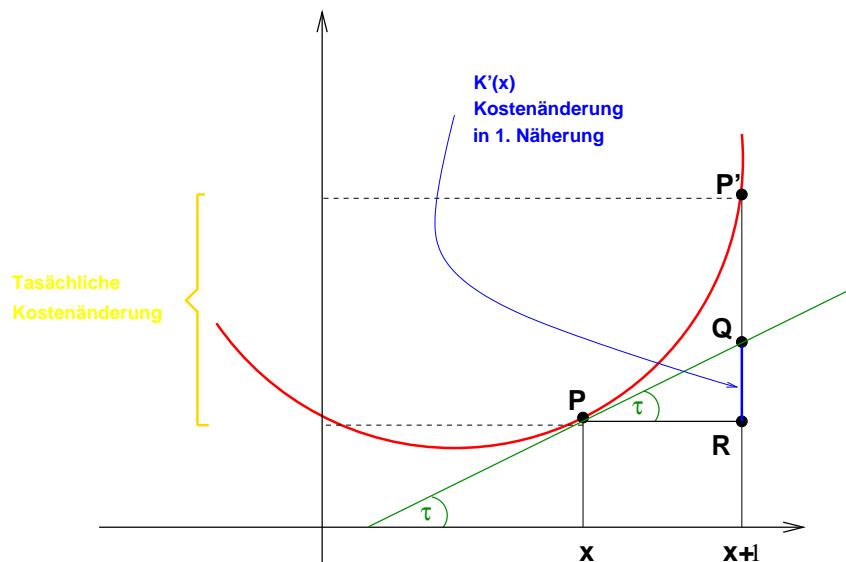


Abbildung 1: Grenzkostenfunktion

oder auch

$$\begin{aligned} K'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{K(x + \Delta x) - K(x)}{\Delta x} \\ &\underset{\Delta x=1}{\approx} \frac{K(x + 1) - K(x)}{1} = K(x + 1) - K(x) \end{aligned}$$

Dabei sind  $K(x + 1) - K(x)$  die zusätzlichen Kosten die anfallen, wenn der Output von  $x$  auf  $x + 1$  Stück erhöht wird.

**Beispiel 1.1** Vergleichen Sie die Werte  $K'(x)$  und  $K(x+1) - K(x)$  für die Kostenfunktion  $K(x) = x^3 + 5000$  an den gegebenen Stellen.

| $x$ | Steigerung          | $K(x+1) - K(x)$ | $K'(x)$ |
|-----|---------------------|-----------------|---------|
| 0   | $0 \rightarrow 1$   | 1               | 0       |
| 10  | $10 \rightarrow 11$ | 331             | 300     |
| 20  | $20 \rightarrow 21$ |                 | 1200    |
| 30  | $30 \rightarrow 31$ |                 | 2700    |

Es gilt z.B.

$$K'(x) = 3x^2 \quad \text{und} \quad K'(10) = 3 \cdot 10^2 = 300$$

und

$$\begin{aligned} K(10+1) - K(10) &= K(11) - K(10) \\ &= 11^3 + 5000 - 10^3 - 5000 \\ &= 331. \end{aligned}$$

Ergänzen Sie die fehlenden Werte in der Tabelle.

### 1.3 Marginale Funktionen in der Makroökonomie

$C = C(Y)$  bezeichnet den Konsum als Funktion des Volkseinkommens  $Y$

$S = S(Y) = Y - C(Y)$  bezeichnet das Sparen

$c(Y) = \frac{dC(Y)}{dY}$  wird marginale Konsumquote (oder Grenzneigung zum Konsum) genannt

$s(Y) = \frac{dS(Y)}{dY} = 1 - c(Y)$  wird marginale Sparquote (oder Grenzneigung zum Sparen) genannt

Welche Eigenschaften sollte eine Konsumfunktion  $C(Y)$  haben? Zumindest sollte sie streng monoton wachsend sein, denn ein grösseres Volkseinkommen  $Y$  sollte auch den Konsum steigern.

## 1.4 Marginale Funktionen und Optimierungsprobleme

Wir wollen nun die Grenzkosten  $K'(x)$  verwenden, um den Output  $x^*$  zu bestimmen, der

1. zu minimalen Durchschnittskosten oder
2. zu maximalem Profit

führt.

1. Minimale Durchschnittskosten

Die Durchschnittskosten lassen sich durch  $\frac{K(x)}{x}$  ausdrücken. Wie wir noch aus der Schule wissen (!?), ist eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Minimums in  $x^*$  das Verschwinden der ersten Ableitung. Also muss gelten:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} \left( \frac{K(x)}{x} \right) \Big|_{x=x^*} = \frac{K'(x^*) \cdot x^* - K(x^*) \cdot 1}{x^{*2}} \\ &= \frac{K'(x^*)}{x^*} - \frac{K(x^*)}{x^{*2}}; \end{aligned}$$

oder

$$K'(x^*) = \frac{K(x^*)}{x^*}.$$

Also sind die Durchschnittskosten minimal, wenn die Grenzkosten gleich den Durchschnittskosten sind.

2. Maximaler Profit

Wir betrachten den Preis  $p$  einer Einheit des Gutes als konstant. Dann ist der Profit  $P(x)$  für  $x$  Einheiten des Gutes gegeben durch

$$\begin{aligned} P(x) &= \text{Erlös} - \text{Totale Kosten} \\ &= p \cdot x - K(x). \end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Maximums in  $x^*$  ist wieder das Verschwinden der ersten Ableitung in  $x^*$ .

$$0 = \frac{d}{dx} P(x) \Big|_{x=x^*} = p - K'(x^*).$$

oder

$$K'(x^*) = p.$$

Der Profit ist maximal, wenn die Grenzkosten gleich dem Preis einer Einheit des Gutes sind.

## 2 Das (totale) Differential

Es sei  $f$  eine differenzierbare Funktion, d.h. für jedes  $x$  des Definitionsbereiches existiert der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x, \Delta x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Diese Situation kann aber auch anders beschrieben werden. Es gilt

$$\underbrace{\frac{\Delta f(x, \Delta x)}{\Delta x}}_{\text{Sekantenanstieg}} = \underbrace{f'(x)}_{\text{Tangentenanstieg}} + R(x, \Delta x) \quad \text{oder}$$

$$\Delta f(x, \Delta x) = f'(x) \cdot \Delta x + R(x, \Delta x) \cdot \Delta x$$

wobei der Rest  $R(x, \Delta x)$  die Eigenschaft hat:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} R(x, \Delta x) = 0.$$

**Definition 2.1** Der Ausdruck  $f'(x) \cdot \Delta x$  heisst das Differential von  $f$  an der Stelle  $x$  für den Zuwachs  $\Delta x$ . Gewöhnlich setzt man auch  $dx = \overline{\Delta x}$  und schreibt

$$df = df(x, dx) = f'(x) \cdot dx.$$

Das Differential einer Funktion ist also zunächst einmal selbst eine Funktion, die auf die Eingabe von  $x$  und  $dx$  wartet.

Weiterhin gilt für die Tangente  $t$  an  $f$  im Punkt  $x$  (wir schreiben den neuen Punkt als  $x + dx$ ):

$$t(x + dx) = f(x) + f'(x) dx.$$

Somit:

$$t(x + dx) - t(x) = f(x) + f'(x) dx - f(x) = f'(x) dx = df(x, dx).$$

Das Differential  $df(x, dx)$  kann also als Änderung der Tangente angesehen werden, falls sich  $x$  um  $dx$  ändert.

**Beispiel 2.1** Die Funktion  $f(x) = x^2$  ist differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f(x, \Delta x)}{\Delta x} &= \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= 2x + \Delta x \end{aligned}$$

$$\Delta f(x, \Delta x) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = \underbrace{2x dx}_{df(x, dx)} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{R(x, dx)}$$

### Geometrische Interpretation:

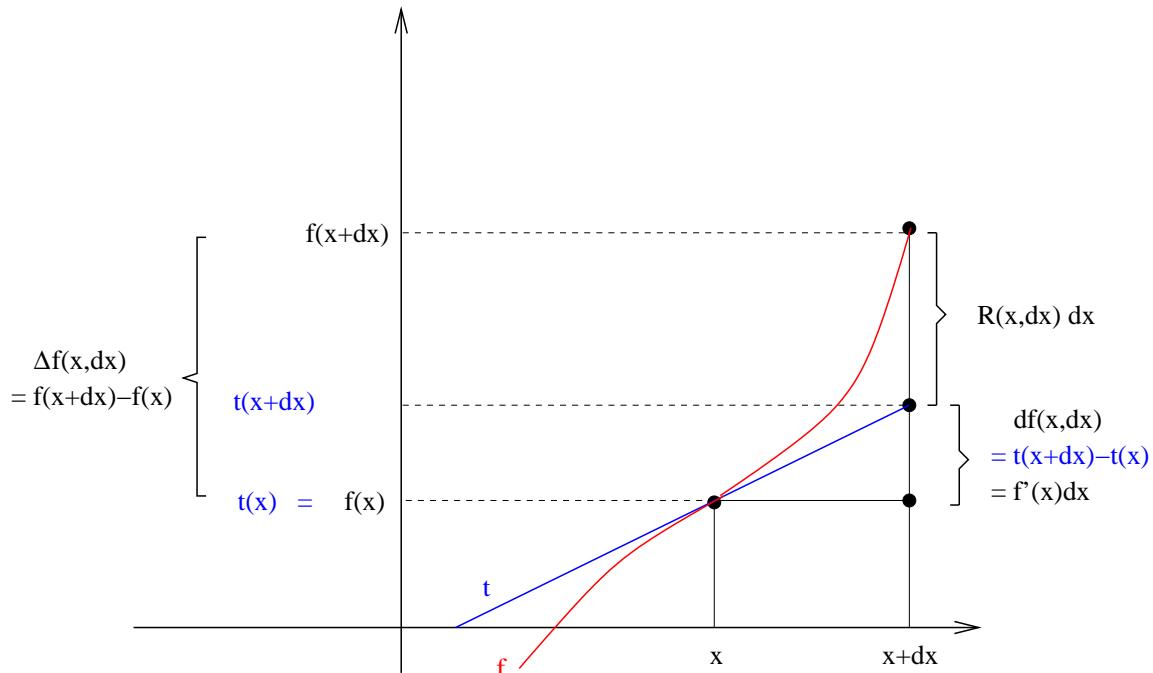


Abbildung 2: Das Differential

$$\Delta x = dx$$

Die beiden Ausdrücke sind gleich. Sie messen die Änderung der unabhängigen Variablen  $x$ .

$$\Delta f = \Delta f(x, dx)$$

misst die tatsächliche Änderung der Funktion wenn man  $x$  um  $dx$  ändert.

$$df = df(x, dx)$$

misst die Änderung der linearen Approximation (Tangente in  $x$ ), wenn man  $x$  um  $dx$  ändert.

$$\Delta f(x, dx) = df(x, dx) + R(x, dx)dx \quad \text{mit} \quad \lim_{dx \rightarrow 0} R(x, dx) = 0$$

$$\Delta f(x, \Delta x) \approx df(x, \Delta x) = f'(x)dx \quad \text{für \textbf{kleine} Änderungen } dx$$

$$t(x + dx) = f(x) + f'(x)dx \quad \text{Tangente an } f \text{ im Punkt } x$$

**Beispiel 2.2** Wir betrachten die Kostenfunktion  $K(x) = 50 + 20x + \frac{2'500}{x+20}$ . Die zu produzierende Menge  $x$  wächst von 30 auf 31.

Wir wollen  $dK(30, 1)$  mit  $\Delta K(30, 1)$  vergleichen. Es gilt  $x = 30$  und  $\Delta x = 1$  sowie

$$K'(x) = 20 - \frac{2500}{(x+20)^2} \quad \text{und} \quad K'(30) = 19$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\Delta K(30, 1) &= K(31) - K(30) = 19.02 \\ dK(30, 1) &= K'(30) \cdot 1 = 19.\end{aligned}$$

Ein Vorteil des Differentials offenbart sich, wenn wir mehrere Änderungen von  $f$  bei gleichem Ausgangspunkt  $x = 30$  und verschiedenen Werten  $\Delta x$  bestimmen sollten. Bei exakter Rechnung müssten wir jeweils einen neuen Funktionswert von  $f$  bestimmen. Das ist recht aufwändig. Nutzen wir dagegen das Differential müssen wir den Wert  $K'(30) = 19$  nur mit der neuen Änderung  $\Delta x$  multiplizieren. Das ist einfacher. Oder?

| $\Delta x$ | $\Delta K(30, \Delta x) = K(30 + \Delta x) - K(30)$  | $dK(30, \Delta x)$ |
|------------|--|--------------------|
| 1          | $50 + 20 \cdot 31 + \frac{2'500}{31+20} - \left( 50 + 20 \cdot 30 + \frac{2'500}{30+20} \right)$ | $19 \cdot 1$       |
| 2          | $50 + 20 \cdot 32 + \frac{2'500}{32+20} - \left( 50 + 20 \cdot 30 + \frac{2'500}{30+20} \right)$ | $19 \cdot 2$       |
| 10         | $50 + 20 \cdot 40 + \frac{2'500}{40+20} - \left( 50 + 20 \cdot 30 + \frac{2'500}{30+20} \right)$ | $19 \cdot 10$      |

**\*Ausblick\*** Neben der Möglichkeit, mit Hilfe des Differentials Funktionsänderungen zu approximieren, bietet das Differential auch viele theoretische Anwendungsmöglichkeiten. In einer geschlossenen Volkswirtschaft ohne Staatstätigkeit (keine Staatsausgaben, keine Nettoexporte) gilt die Gleichung:

$$Y = C + I.$$

Dabei ist

$Y = Y(I)$  das Volkseinkommen d.h. der Wert aller in einem Land hergestellten Waren und Dienstleistungen.

$C = C(Y)$  der Konsum, d.h. die Ausgaben der Haushalte für Waren und Dienstleistungen mit Ausnahme des Erwerbs von Grundstücken und Gebäuden (und deren Neubau).

$I$  die Investitionen, d.h. die Ausgaben für Kapitalausstattung, Lagerbestände und Bauten.

Wie wirkt sich eine zusätzliche Investition auf das Volkseinkommen aus?

Es gilt

$$dY(I) = Y'(I)dI$$

$$Y'(I) = \frac{d}{dI}(C(Y(I)) + I) = \frac{dC}{dY} \frac{dY}{dI} + 1 = \frac{dC}{dY} Y'(I) + 1$$

also

$$Y'(I) = \frac{1}{1 - \frac{dC}{dY}} = \frac{1}{\frac{dS}{dY}},$$

wobei  $S = Y - C = I$  die Spartätigkeit bezeichnet. Mit den in der Literatur häufig verwendeten Bezeichnungen

$$c(Y) = \frac{dC}{dY} \quad s(Y) = \frac{dS}{dY}$$

erhält man somit

$$dY(I) = \frac{1}{1 - c(Y)} dI = \frac{1}{s(Y)} dI.$$

Der Ausdruck

$$\mu = \frac{1}{1 - c(Y)} dI = \frac{1}{s(Y)} dI$$

wird dabei als Multiplikator bezeichnet.

### 3 Elastizitäten

Grenzkosten, Grenzneigung zum Konsum usw. hängen vom Massstab ab, in dem die Größen Kosten, Konsum usw. gemessen werden. Besonders in wirtschaftlichen Vergleichen ist es aber wünschenswert, eine Größe zu definieren, die Änderungen der Funktionswerte massstabsunabhängig darstellt.

Wir betrachten den Quotienten

$$\begin{aligned} \frac{\text{rel. Änderung der Funktionswerte}}{\text{rel. Änderung der unabh. Variablen}} &= \frac{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} \\ &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f(x)}. \end{aligned}$$

**Definition 3.1** Falls  $f$  differenzierbar ist, so existiert

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

und wir definieren die Elastizität der Funktion  $f$  oder die Rate der relativen Änderung von  $f$  bezogen auf die relative Änderung von  $x$ :

$$\epsilon_{f,x} = \epsilon_{f,x}(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f(x)} = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

**Beispiel 3.1**

$$f(x) = ax \Rightarrow \epsilon_{f,x} = x \frac{a}{ax} = 1$$

**Beispiel 3.2**

$$f(x) = e^{\lambda x} \Rightarrow \epsilon_{f,x} = x \frac{\lambda e^{\lambda x}}{e^{\lambda x}} = \lambda x.$$

**Interpretation der Elastizität:**

$$\underbrace{\frac{\Delta f(x, \Delta x)}{f(x)}}_{\text{relative } f\text{-Änderung}} \approx \epsilon_{f,x} \cdot \underbrace{\frac{\Delta x}{x}}_{\text{relative } x\text{-Änderung}}.$$

**Beispiel 3.3** Wir betrachten die Funktion  $f(x) = x^3 + 5000$  für  $x = 20$  und  $\Delta x = 1$ . Wir ändern also  $x$  von 20 auf 21 absolut um 1 und relativ um

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{20} = 0.05 = 5\%$$

Wie ändert sich in diesem Fall  $f$  absolut und relativ? Eine exakte Rechnung ergibt:

$$\text{absolute Änderung } \Delta f(20, 1) = f(21) - f(20) = 1'261$$

$$\text{relative Änderung } \frac{\Delta f(20, 1)}{f(20)} = \frac{1'261}{13'000} = 0.097 = 9.7\%$$

Was liefert die Elastizität?

$$\epsilon_{f,x}(x) = x \frac{f'(x)}{f(x)} = x \frac{3x^2}{x^3 + 5000} \quad \text{und} \quad \epsilon_{f,x}(20) = 1.846$$

Setzen wir das in die Relation der Elastizität ein, erhalten wir eine Näherung für die relative Änderung der Funktion  $f$ :

$$\frac{\Delta f(20, 1)}{f(20)} \approx \epsilon_{f,x}(20) \cdot \frac{1}{20} = 1.846 \cdot 0.05 = 0.092 = 9.2\%$$

**Definition 3.2** Eine relative Änderung der unabhängigen Variablen  $x$  bewirkt also ungefähr eine  $\epsilon_{f,x}$ -fache relative Änderung der Funktion. Ist nun

1.  $|\epsilon_{f,x}| > 1$ , so heisst  $f$  elastisch (eine relative Änderung von  $x$  wirken sich **überproportional** auf  $f$  aus);
2.  $|\epsilon_{f,x}| < 1$ , so heisst  $f$  unelastisch (eine relative Änderung von  $x$  wirken sich **unterproportional** auf  $f$  aus)

**Beispiel 3.4** Wir betrachten die Nachfragefunktion

$$q = q(p) = 9 - 3p.$$

Die unabhängige Variable ist hier also  $p$ . Weiterhin sollten sowohl  $p$  (Preise) als auch  $q$  (Nachfrage) ausschliesslich positive Werte annehmen, d.h.  $p > 0$  und  $q = 9 - 3p > 0$ . Somit sind in diesem Modell nur Preise  $p$  mit  $0 < p < 3$  sinnvoll.

Dann gilt für die Elastizität

$$\epsilon_{q,p} := p \cdot \frac{-3}{9 - 3p} = \frac{-3p}{9 - 3p} = \frac{-p}{3 - p}.$$

Für welche Werte  $p$  ist die Funktion  $q$  nun elastisch? Dazu müssen wir die Ungleichung  $|\epsilon_{q,p}| > 1$  nach  $p$  auflösen. Die Betragszeichen dürfen dabei **nicht** einfach weggelassen werden! Sie müssen beachten, dass innerhalb des Bereichs  $0 < p < 3$  der Zähler  $-p$  sicher negativ und der Nenner  $3 - p$  sicher positiv ist.

$$|\epsilon_{q,p}| = \left| \frac{-p}{3 - p} \right| = \frac{p}{3 - p} > 1$$

gilt genau dann, wenn  $p > 1.5$ . Also ist die Funktion  $q$  im Bereich  $1.5 < p < 3$  elastisch.

## 4 Wachstumsraten

Es sei  $y = f(t)$  eine differenzierbare Funktion der Zeit. Wir betrachten die durchschnittliche relative Änderung der Funktion im Laufe der Zeit:

$$\frac{\left(\frac{\Delta f(t, \Delta t)}{f(t)}\right)}{\Delta t} = \frac{\left(\frac{\Delta f(t, \Delta t)}{\Delta t}\right)}{f(t)} \approx \frac{f'(t)}{f(t)}$$

**Definition 4.1** Die Wachstumsrate ist definiert durch

$$r_f(t) := \frac{f'(t)}{f(t)}.$$

**Beispiel 4.1** Exponentialfunktionen weisen konstante Wachstumsraten auf. Sei also

$$y(t) = 12 \cdot e^{2t} \Rightarrow r_f(t) = \frac{12 \cdot 2 \cdot e^{2t}}{12 \cdot e^{2t}} = 2$$

**Beispiel 4.2** Wir betrachten eine so genannte logistische Funktion.

$$y(t) = \frac{4}{1 + 2 \cdot e^{-3t}} \Rightarrow r_f(t) = \frac{6e^{-3t}}{1 + 2e^{-3t}}$$

**Interpretation der Wachstumsrate:**

$$\underbrace{\frac{\Delta f(t, \Delta t)}{f(t)}}_{\text{relative } f\text{-Änderung}} \approx r_f(t) \cdot \underbrace{\Delta t}_{\text{echte } t\text{-Änderung}}.$$

Es gilt  $r_f(t) = [\ln f(t)]'$ , was hilfreich ist, um bestimmte Wachstumsraten zu berechnen.

## 5 Das Newton-Verfahren

Die in den Übungen gestellten Aufgaben erwecken den Eindruck, als könne man jede Aufgabe exakt und analytisch lösen, wenn man sich nur genug anstrengt und die richtige Idee hat. Dieser Eindruck ist falsch! Bei den allermeisten ökonomisch-mathematischen Problemen wird man (aus verschiedenen Gründen) keine exakte Lösung bestimmen können.

Wir wollen uns dazu das schon bekannte Problem der Evaluation eines Projektes ansehen. Seien also  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  die Erträge eines Projektes in aufeinander folgenden Jahren (neg. Zahlen sind Verluste bzw. Investitionen und positive Zahlen sind Gewinne bzw. Rückzahlungen). Der Barwert dieser Erträge ist dann eine Funktion der Zinsrate  $p \in [0, 1]$ :

$$B(p) = a_0 + \frac{a_1}{1+p} + \frac{a_2}{(1+p)^2} + \dots + \frac{a_n}{(1+p)^n}$$

Gesucht ist hier häufig die so genannte interne Ertragsrate, die als der Zinssatz  $p_0$  definiert ist, bei dem der Barwert aller Erträge gleich 0 ist.

Zum Lösen der Gleichung

$$a_0 + \frac{a_1}{1+p} + \frac{a_2}{(1+p)^2} + \dots + \frac{a_n}{(1+p)^n} = 0$$

sollte man zuerst  $x = 1 + p$  substituieren und die Gleichung dann mit  $x^n = (1 + p)^n$  multiplizieren. Wir erhalten dann die folgende polynomiale Gleichung:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

Für  $n = 1$  (lineare Gleichung) könnte die Lösung schnell und exakt bestimmt werden.

Für  $n = 2$  (quadratische Gleichung) könnten wir die abc-Formel nutzen:

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}.$$

Beim Ziehen der Wurzel werden wir die dort höchstwahrscheinlich auftretende irrationale Zahl runden müssen, aber wir können auch hier noch von einer (fast) exakten Lösung sprechen.

Für  $n = 3$  könnte man sich noch mit der so genannten *Cardanischen Formel* behelfen, die eigentlich von N. Tartaglia (1500-1557) entdeckt, aber von C. Cardano (1501-1576) in seinem Buch *Ars Magna* (in einer verallgemeinerten Form) veröffentlicht wurde (und deshalb ihm zugeschrieben wurde). Eine stets existierende reelle Lösung der reduzierten kubischen Gleichung  $y^3 + py + q = 0$  kann damit wie folgt bestimmt werden:

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

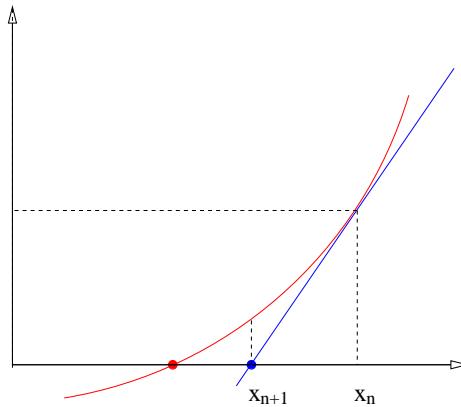
Für  $n \geq 5$  gibt es (beweisbar) **keine** allgemeinen Lösungsformeln (durch endliche Wurzelausdrücke)!! Hier muss man auf numerische Verfahren zurück greifen. Wir wollen hier das so genannte Newton-Verfahren kurz besprechen.

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine (genügend oft) stetig differenzierbare Funktion. Wir wollen ein schnelles Verfahren konstruieren, um eine Nullstelle von  $f$  zu finden. Dazu sei  $x_n \in [a, b]$  ein Näherungswert nahe bei der gesuchten Nullstelle  $x_{\text{null}}$ . Dann ist die Tangente an  $f$  im Punkt  $(x_n, f(x_n))$  gegeben durch

$$T(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

Wir bestimmen nun die Nullstelle  $x_{n+1}$  der Tangentenlinie, die eine (hoffentlich) bessere Näherung an  $x_{\text{null}}$  ist. Es muss also gelten:

$$0 = T(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \quad \text{oder} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$



Für einen zunächst beliebigen Startwert  $x_0$  betrachten wir also die rekursiv definierte Folge

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Unsere *Hoffnung* ist auch hier, dass die so erzeugte Folge gegen eine Nullstelle  $x_{\text{null}}$  von  $f$  konvergiert. Der folgende Satz bestätigt unsere Hoffnung in den meisten Fällen, in denen  $x_{\text{null}}$  eine einfache Nullstelle ist ( $f'(x_{\text{null}}) \neq 0$ ).

**Satz 1** Das Newton-Verfahren konvergiert für Startwert  $x_0$  nahe der Nullstelle, falls  $x_{\text{null}}$  einfache Nullstelle von  $f$  ist.

**Beispiel 5.1** Mit dem Startwert  $x_0 = 2$  gilt für die Funktion  $f(x) = x^3 - 2x - 5$ :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{2^3 - 2 \cdot 2 - 5}{3 \cdot 2^2 - 2} = 2.1$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.1 - \frac{2.1^3 - 2 \cdot 2.1 - 5}{3 \cdot 2.1^2 - 2} =$$

## 6 Testfragen zur Vorlesung

Hinweis: Bevor Sie die Übungsaufgaben lösen, sollten Sie den Stoff der Vorlesung verstanden haben. Insbesondere sollten Sie die folgenden einfachen Fragen beantworten können. Diese Fragen werden im Allgemeinen nicht in den Übungen besprochen, können aber prüfungsrelevant sein.

1. Beschreiben (benennen) Sie alle Terme in den folgenden Relation

$$\Delta f(x, \Delta x) \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

$$\frac{\Delta f(x, \Delta x)}{f(x)} \approx r_f(x) \cdot \Delta x$$

$$\frac{\Delta f(x, \Delta x)}{f(x)} \approx \epsilon_{f,x}(x) \cdot \frac{\Delta x}{x}$$

und beschreiben Sie (kurz) in Worten die Aussage dieser Relationen.

2. Erläutern Sie (kurz) in Worten die Bedeutung der folgenden Ausdrücke:  $\Delta x$ ,  $dx$ ,  $\Delta f(x)$ ,  $df(x)$ ,  $\frac{\Delta x}{x}$ ,  $\frac{\Delta f(x)}{f(x)}$ ,  $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$  und  $\frac{df(x)}{dx}$ .
3. Beschreiben Sie (kurz) in Worten und/ oder mit einer Skizze den Unterschied zwischen den beiden Ausdrücken  $\Delta f(x)$  und  $df(x)$ .
4. Sei  $c \neq 0$  eine reelle Zahl. Zeigen Sie, dass die Funktion  $f(x) = x^c$  eine konstante Elastizität hat.
5. Seien  $a > 0, a \neq 1$  und  $b \neq 0$  zwei reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass die Funktion  $f(x) = a^{bx}$  eine konstante Wachstumsrate hat.
6. Beschreiben Sie das Newton-Verfahren.

## 7 Übungsaufgaben

### 7.1 Niveau 1

- Sei  $f(p) = 100 - 2p$  für  $0 \leq p < 50$ . Berechnen Sie die Preiselastizität der Nachfrage für die Nachfragefunktion. In welchem Bereich ist die Nachfragefunktion elastisch resp. unelastisch? Skizzieren Sie die Funktion  $f$  (ohne Taschenrechner).
- Gegeben ist die Kostenfunktion (vergl. Beispiel im Skript)

$$K(x) = -70 + 20x + \frac{1'600}{x+20}, \quad x \geq 0$$

- Berechnen Sie das Differential  $dK$  für die Kostenzunahme bei einer Produktionserhöhung von  $x_0$  auf  $x_0 + \Delta x$  für
  - $x_0 = 30$  und  $\Delta x = 1$
  - $x_0 = 30$  und  $\Delta x = 10$
- Vergleichen Sie den Näherungswert  $dK$  mit der exakten Kostenzunahme  $\Delta K$ .
- Bestimmen Sie die Wachstumsraten für die folgenden Funktionen:
  - $f(t) = 4^t$
  - $f(t) = t^3$ .
- Berechnen Sie eine Nullstelle des Polynoms  $f(x) = x^3 - 2x - 5$ , indem Sie ausgehend vom Startwert  $x_0 = 2$  zwei Iterationsschritte des Newton-Verfahrens durchführen.

### 7.2 Niveau 2

- Sei  $f(p) = 100 - 2p$  für  $0 \leq p < 50$ . Um wieviel % verändert sich die Nachfrage (approximativ), wenn der Preis von  $p = 40$  um 1%, 2%, 4%, 5%, 10% bzw. 13% erhöht wird? Hinweis: Benutzen Sie die Elastizität!
- Für welche  $\alpha > 0$  ist die folgende Nachfragefunktion  $q(p) = \frac{1}{p^\alpha}$ ,  $p > 0$  elastische?
- Gegeben sei die Funktion  $E(x) = x \left( \frac{1}{x^{3/2}} + 4 \right)$ . Bestimmen Sie  $dE(x, dx)$ ,  $dE(1, dx)$  und  $dE(1, 1/5)$ .

### 7.3 Niveau 3

- Man beweise: Für die Wachstumsrate  $r(t)$  einer Funktion  $f(t)$  gilt:

$$r(t) = \frac{d}{dt} (\ln(f(t))).$$

Bestätigen Sie mit Hilfe dieser Formel die Ergebnisse aus der vorhergehenden Aufgabe und berechnen Sie die Wachstumsrate von

$$f(t) = \frac{t^2}{(t+1)^3}, \quad t > 0.$$

2. Bestimmen Sie die Differentiale der folgenden Funktionen:

- (a)  $E(x) = x \cdot p(x) \quad x > 0$
- (b)  $N(I) = I - I \cdot s(I) \quad I \geq 0$
- (c)  $k(x) = \frac{K(x)}{x} \quad x > 0$
- (d)  $G(x) = x \cdot p(x) - K(x) \quad x > 0$

## Lösungen der Übungsaufgaben

### Niveau 1

1. Nachfragefunktion elastisch für  $p > 25$
2. a) i) 19.36      a) ii) 193.6      b) i) 19.372549      b) ii) 194.6666667
3. a)  $r(t) = \ln(4)$       b)  $r(t) = \frac{3}{t}$
4.  $x_2 = 2.095$

### Niveau 2

1.  $-4\%, -8\%, \dots$
2.  $\alpha > 1$
3.  $dE(x, dx) = (-\frac{1}{2}x^{-3/2} + 4) dx$ ,  $dE(1, dx) = 3.5 dx$  und  $dE(1, 1/5) = 0.7$ .

### Niveau 3

1.  $r(t) = \frac{2-t}{t(t+1)}$
2. Wir schreiben der Einfachheit halber z.B.  $E$  anstelle von  $E(x)$  bzw.  $dE$  anstelle von  $dE(x, dx)$ , wenn es klar ist, von welcher Variablen die Funktion abhängt.
  - a)  $dE = (x \cdot p)' dx = (1 \cdot p + x \cdot p') dx = p \cdot dx + x \cdot p' dx = p \cdot dx + x \cdot dp$
  - b)  $dN = [1 - I \cdot s'(I) - s(I)]dI = dI - Ids - sdI$
  - c)  $dk = \frac{1}{x}[K'(x) - k(x)]dx = \frac{1}{x}[dK - k(x)dx]$
  - d)  $dG = [x \cdot p'(x) + p(x) - K'(x)]dx = xdp + pdx - dK$

## Zusatzaufgaben mit Lösung

Wenn Sie den Stoff noch weiter vertiefen wollen, können Sie die folgenden Zusatzaufgaben bearbeiten. Insbesondere die zweite Aufgabe hat eine ausführliche Musterlösung.

- Schätzen Sie für die folgenden Funktionen unter Nutzung des Differentials  $df(x_0, \Delta x)$ ,  $dg(x_0, \Delta x)$  bzw.  $dh(x_0, \Delta x)$  die (näherungsweise) Funktionswertveränderung gegenüber dem Wert im Punkt  $x_0 = 1.5$  bei einem Zuwachs um  $\Delta x = 1$ ,  $\Delta x = 0.1$  bzw.  $\Delta x = 0.01$  und vergleichen Sie mit den exakten Änderungen  $\Delta f(x_0, \Delta x)$ ,  $\Delta g(x_0, \Delta x)$  bzw.  $\Delta h(x_0, \Delta x)$ .
- (a)  $f(x) = \frac{2}{15 + e^{-x}}$
- (b)  $g(x) = 3x + \frac{1}{10} \sin(x)$
- (c)  $h(x) = \frac{1}{100} e^{2x-1}$
- An welcher Stelle  $x > 0$  beträgt die Elastizität der Funktion  $f(x) = 2x - \frac{3}{2} + \frac{1}{x}$  Eins? Bestimmen Sie die Elastizitätsbereiche der Funktion.

## Lösungen

- Wir verwenden für die Näherung der Funktionswertänderungen mittels Differential die wohlbekannte Beziehung:

$$df(x_0, \Delta x) \approx \Delta f(x_0, \Delta x).$$

Für die drei Funktionen gilt an der Stelle  $x_0 = 1.5$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2e^{-x}}{(15 + e^{-x})^2} & f(x_0) &= 0.13138 & f'(x_0) &= 0.00192 \\ g'(x) &= 3 + \frac{1}{10} \cos(x) & g(x_0) &= 4.59975 & g'(x_0) &= 3.00707 \\ h'(x) &= \frac{1}{50} e^{2x-1} & h(x_0) &= 0.07389 & h'(x_0) &= 0.14778 \end{aligned}$$

Für die Näherungen gilt:

| $\Delta x$ | $\Delta f(x_0, \Delta x)$ | $df(x_0, \Delta x)$ | $\Delta g(x_0, \Delta x)$ | $dg(x_0, \Delta x)$ | $\Delta h(x_0, \Delta x)$ | $dh(x_0, \Delta x)$ |
|------------|---------------------------|---------------------|---------------------------|---------------------|---------------------------|---------------------|
| 1          | 0.00123                   | 0.00192             | 2.96010                   | 3.00707             | 0.47209                   | 0.14778             |
| 0.1        | 0.00018                   | 0.00019             | 0.30021                   | 0.30071             | 0.01636                   | 0.01478             |
| 0.01       | 0.00002                   | 0.00002             | 0.03006                   | 0.03007             | 0.00149                   | 0.00148             |

Es gibt stets eine recht gute Übereinstimmung für  $\Delta x = 0.01$  und eine recht schlechte für  $\Delta x = 1$ .

2. • Elastizität der Funktion

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - \frac{3}{2} + \frac{1}{x} \\ f'(x) &= 2 - \frac{1}{x^2} \\ \epsilon_{f,x} &= \frac{f'(x)x}{f(x)} = \frac{\left(2 - \frac{1}{x^2}\right)x}{2x - \frac{3}{2} + \frac{1}{x}} = \frac{2x^2 - 1}{2x^2 - \frac{3}{2}x + 1} \end{aligned}$$

Dabei wurde im letzten Schritt der Bruch mit  $x$  erweitert, um in Zähler und Nenner der Einfachheit halber Polynome zu erzeugen.

• Wo ist die Elastizität gleich 1?

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2x^2 - 1}{2x^2 - \frac{3}{2}x + 1} \\ \iff 2x^2 - 1 &= 2x^2 - \frac{3}{2}x + 1 \\ \iff \frac{3}{2}x &= 2 \\ \iff x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

• Wo ist die Funktion  $f$  elastisch?

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x^2 - 1}{2x^2 - \frac{3}{2}x + 1} \right| &> 1 \\ \iff |2x^2 - 1| &> \left| 2x^2 - \frac{3}{2}x + 1 \right| \end{aligned}$$

Nun muss man diese Ungleichung mit Beträgen lösen (Vorkurs). Dazu werden zunächst die kritischen Punkte beider Ausdrücke (Nullstellen, hier wechselt das Vorzeichen) in den Beträgen bestimmt.

- Der Ausdruck  $2x^2 - 1$  ist in den Punkten  $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$  gleich Null und da wir die Funktion  $f$  nur für  $x > 0$  untersuchen, interessiert uns nur die positive Nullstelle. Wir sehen auch sofort

$$2x^2 - 1 \quad \begin{cases} \leq 0 & \text{für } 0 < x \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \\ > 0 & \text{für } \sqrt{\frac{1}{2}} < x \end{cases}$$

- Der Ausdruck  $2x^2 - \frac{3}{2}x + 1$  hat keine Nullstellen (Mitternachtformel oder quadratische Ergänzung). Weiterhin kann man leicht zeigen, dass sogar  $2x^2 - \frac{3}{2}x + 1 > 0$  für alle  $x > 0$  gilt.

Mit diesen Überlegungen können wir nun die Betragsstriche in der obigen Ungleichung beseitigen. Natürlich ist dabei eine Fallunterscheidung nötig.

(a) Bereich 1:  $0 < x \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.709$

In diesem Bereich ist der linke Ausdruck nicht positiv und der rechte positiv. Es gilt somit (nur in diesem Bereich!!):

$$\begin{aligned} |2x^2 - 1| &> \left|2x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right| \\ \iff -(2x^2 - 1) &> 2x^2 - \frac{3}{2}x + 1 \\ \iff 0 &> 4x^2 - \frac{3}{2}x = \left(4x - \frac{3}{2}\right)x \\ \iff 0 &> 4x - \frac{3}{2} \\ \iff \frac{3}{8} = 0.375 &> x \end{aligned}$$

Dabei haben wir in der dritten Zeile benutzt, dass ein Produkt genau dann kleiner als Null ist, wenn beide Faktoren verschiedene Vorzeichen haben. Außerdem kann  $x$  nur nicht-negative Werte annehmen.

Wir haben also gezeigt, dass im Bereich  $0 < x \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.709$  alle  $x$  mit  $\frac{3}{8} = 0.375 > x$  die Ungleichung lösen. Unsere Ausgangsfunktion ist also auf dem Intervall  $x \in \left(0, \frac{3}{8}\right)$  elastisch.

(b) Bereich 2:  $\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.709 < x$

In diesem Bereich ist der linke Ausdruck positiv und der rechte positiv. Es gilt somit (nur in diesem Bereich!!):

$$\begin{aligned}
|2x^2 - 1| &> \left|2x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right| \\
\iff 2x^2 - 1 &> 2x^2 - \frac{3}{2}x + 1 \\
\iff 0 &> 2 - \frac{3}{2}x \\
\iff x &> \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass im Bereich  $\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.709 < x$  alle  $x$  mit  $\frac{4}{3} \approx 1.333 < x$  die Ungleichung lösen. Unsere Ausgangsfunktion ist also auf dem Intervall  $x \in \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$  elastisch.

Insgesamt ist die Funktion somit auf  $\left(0, \frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$  elastisch.

- Wo ist die Funktion  $f$  unelastisch?

Natürlich könnten wir den obigen direkten Weg wieder durchlaufen, um die gesuchten Bereiche zu finden. Aber da wir oben gezeigt haben, wo  $|\epsilon_{f,x}| > 1$  gilt, muss im Komplement der gefundenen Menge  $\left(0, \frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, \infty\right) = \left[\frac{3}{8}, \frac{4}{3}\right]$  das logische Gegenteil, also  $|\epsilon_{f,x}| \leq 1$  gelten. Bedenken wir noch, dass  $\epsilon_{f,\frac{3}{8}} = -1$  und  $\epsilon_{f,\frac{4}{3}} = 1$  ist, muss unsere Funktion auf dem offenen Intervall  $\left(\frac{3}{8}, \frac{4}{3}\right)$  unelastisch sein.

- „Graphische Lösung,,

Wir könnten die Aufgabe auch graphisch lösen. In der Skizze sehen Sie den Graphen der Funktion  $f$  (rot) und den Graphen der Funktion  $\epsilon_{f,x}$  (blau). Wenn wir wissen wollen, wo unsere Funktion  $f$  unelastisch ist, müssen wir nur die Werte  $x$  finden, an denen die Funktion  $\epsilon_{f,x}$  Werte zwischen  $-1$  und  $1$  annimmt. Dieser Bereich ist auf der  $x$ -Achse speziell gekennzeichnet.

