Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

Mathematik 1
Dr. Thomas Zehrt

Kurvendiskussionen

Inhaltsverzeichnis

1 Höhere Ableitungen

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $y = f(x)$. Falls die Ableitung $f'(x)$ von $f(x)$ selbst wieder eine differenzierbare Funktion ist, können wir auch diese Funktion erneut ableiten und erhalten die zweite Ableitung von $f(x)$ usw. Eine Funktion $y = f(x)$, die man auf diese Weise n-mal ableiten kann, heisst <u>n-mal differenzierbar</u>.

Ableitung	Funktion		Beispiel
0. Ableitung	$y = f(x)$		$x^2 - 5x + 23$
1. Ableitung	$f' = \frac{df}{dx}$	Ableitung von f	$2x - 5$
2. Ableitung	$f'' = \frac{d^2 f}{dx^2}$	Ableitung von f'	2
...	...	...	
n-te Ableitung	$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$	Ableitung von $f^{(n-1)}$	0

Schreibweisen für die n-te Ableitung:

$$f^{(n)}(x) \;=\; f^{''\cdots'}(x) \;=\; \frac{d^n}{dx^n} f(x) \;=\; \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

Eines der wichtigsten Ziele des Kapitels ist es, aus den Ableitungen einer Funktion Rückschlüsse auf deren Verlauf zu ziehen.

2 Mittelwertsatz und Monotonie

Satz 1 (Mittelwertsatz) *Sei f eine Funktion, die auf einem Intervall $I = [a, b]$ differenzierbar ist. Dann gibt es einen Punkt $\bar{x}$ zwischen a und b, so dass*

$$f(b) - f(a) = f'(\bar{x}) \cdot (b - a) \qquad \text{oder} \qquad f'(\bar{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

oder: Zu jeder Sekante findet man eine parallele Tangente an die Kurve.

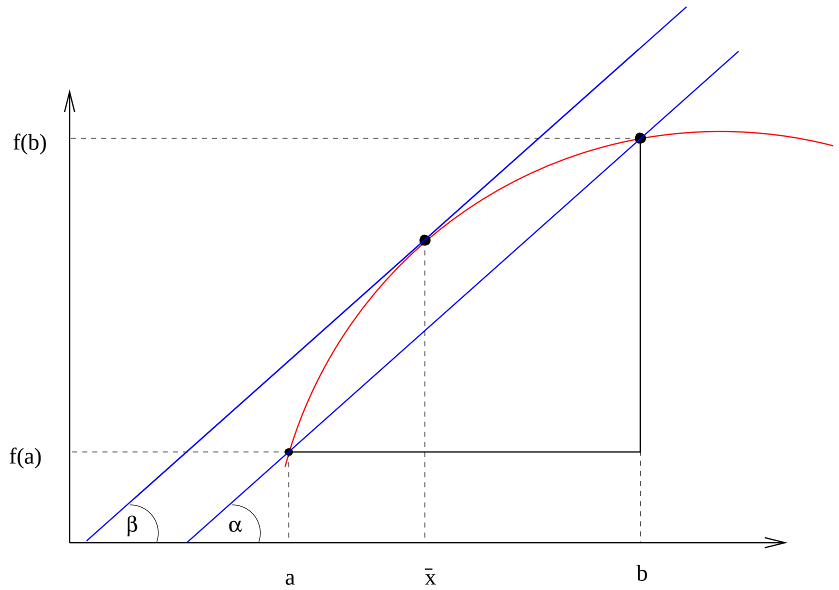


Abbildung 1: Tangente und Sekante

$$\tan(\alpha) \;=\; \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \;=\; \tan(\beta) \;=\; f'(\bar{x})$$

Beispiel 2.1 *Prüfen Sie den Mittelwertsatz für $f(x) = x^3 - x$ auf dem Intervall $[0, 2]$.*
Zunächst gilt

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^3 - 2 = 6 \\ f(0) &= 0^3 - 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\textit{Sekantenanstieg} \;=\; \frac{6 - 0}{2 - 0} \;=\; 3$$

Nun müssen wir nur noch einen Punkt x im Intervall $[0, 2]$ finden, so dass $f'(x) = 3$ gilt.

$$f'(x) \;=\; 3x^2 - 1 \;=\; 3 \quad \longleftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{4/3}$$

Somit ist der Punkt $\bar{x} = \sqrt{4/3}$ der gesuchte Punkt im Intervall $[0, 2]$.

Daraus erhalten wir unmittelbar die folgenden Resultate:

f monoton steigend	$\iff$	$f'(x) \geq 0$	$\forall x$ (für alle x)
f monoton fallend	$\iff$	$f'(x) \leq 0$	$\forall x$
$f(x) = konstant$	$\iff$	$f'(x) = 0$	$\forall x$
$f(x) = h(x) + konstant$	$\iff$	$f'(x) = h'(x)$	$\forall x$

Beweisidee:

Sei f monoton steigend

$\rightarrow$ für alle x_1, x_2 mit $x_1 < x_2$ gilt somit $f(x_1) < f(x_2)$

$\rightarrow$ für alle x_1, x_2 mit $x_1 < x_2$ gilt $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$

$\rightarrow$ für alle x_1, x_2 gibt es einen Punkt $\bar{x}$ zwischen x_1 und x_2 so dass

$$f'(\bar{x}) \;=\; \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \;\geq\; 0$$

$\rightarrow$ für alle x gilt $f'(x) \geq 0$.

Die ersten beiden Resultate liefern nützliche Kriterien für Monotoniebeweise. Die beiden letzten Resultate sind für die Integralrechnung von zentraler Bedeutung.

Beispiel 2.2 *Die Angebotsfunktion*

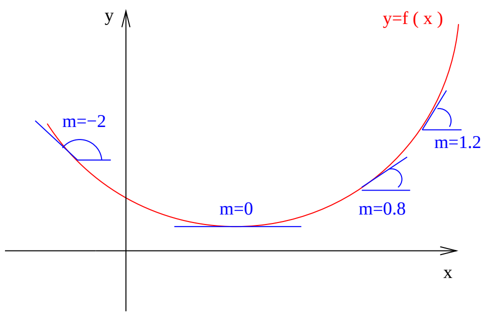
$$A(p) \;=\; 2 + p - 2\sqrt{p+1} \;=\; 2 + p - 2(p+1)^{1/2}$$

ist monoton steigend, denn es gilt für alle Preise $p \geq 0$

$$A'(p) \;=\; 1 - \frac{1}{\sqrt{p+1}} \;\geq\; 0.$$

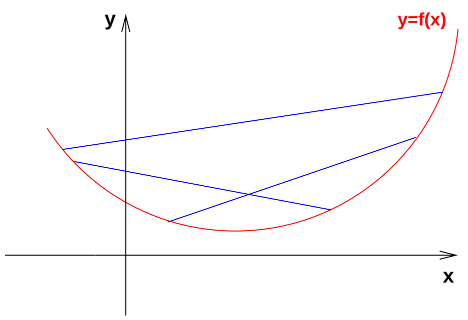
3 Konvexe und konkave Funktionen

$f''(x) \geq 0$ für alle x
$\iff f'(x)$ monoton steigend
$\iff f(x)$ konvexe Funktion (Linkskurve)

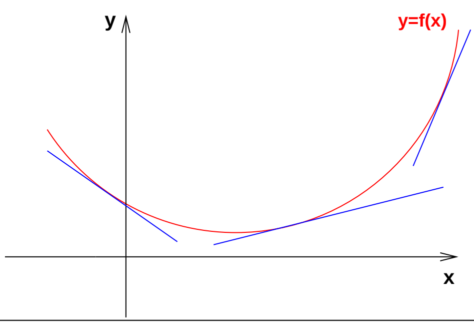


$m = f'(x)$ monoton steigend

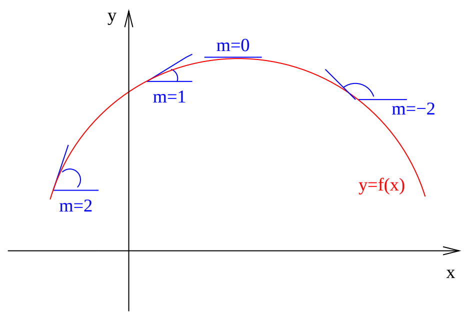
Graph liegt unter der Sehne.



Graph liegt über der Tangente.

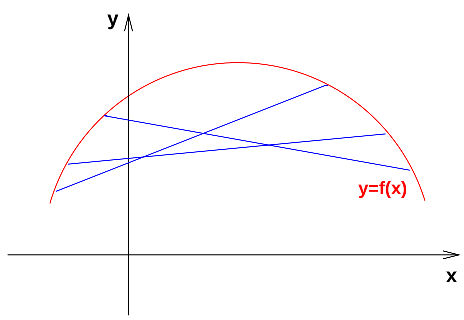


$f''(x) \leq 0$ für alle x
$\iff f'(x)$ monoton fallend
$\iff f(x)$ konkave Funktion (Rechtskurve)

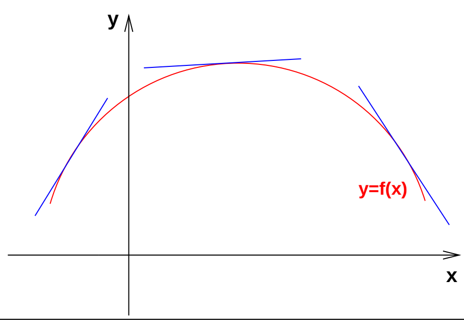


$m = f'(x)$ monoton fallend

Graph liegt über der Sehne.



Graph liegt unter der Tangente.



Beispiel 3.1 *Entscheiden Sie, wo die Funktion* $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ *konvex ist und bestimmen Sie alle Punkte, an denen die zweite Ableitung verschwindet (Wendepunkte).*

Lösungsskizze:

Ableitungen

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x^2+1} \\ f'(x) &= \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \\ f''(x) &= -\frac{6x}{(x^2+1)^2} + \frac{8x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

$f''(x) = 0$ *lösen*

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{6x}{(x^2+1)^2} + \frac{8x^3}{(x^2+1)^3} \\ \leftrightarrow 0 &= -6x(x^2+1) + 8x^3 \\ \leftrightarrow 0 &= 2x^3 - 6x \\ \leftrightarrow 0 &= 2x(x^2-3) \end{aligned}$$

und Lösungen sind $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$ *und* $x_3 = -\sqrt{3}$. *Das sind die drei Wendepunkte der Funktion. Eigentlich müsste man noch überprüfen, ob die dritte Ableitung von* f *an diesen drei Stellen nicht verschwindet. Wir wollen hier darauf verzichten. An diesen drei Stellen ändert sich das Krümmungsverhalten von* f *von konvex auf konkav bzw. von konkav auf konvex, d.h. hier ändert sich das Vorzeichen von* f''.

Die reelle Achse zerfällt somit in vier Intervalle. Das Vorzeichen von f'' *kann an einem beliebigen Punkt des jeweiligen Intervalls bestimmt werden.*

$$\begin{array}{rl} (-\infty, -\sqrt{3}) & f'' < 0 \rightarrow\ f \text{ konkav} \\ & f''(-\sqrt{3}) = 0 \\ (-\sqrt{3}, 0) & f'' > 0 \rightarrow\ f \text{ konvex} \\ & f''(0) = 0 \\ (0, \sqrt{3}) & f'' < 0 \rightarrow\ f \text{ konkav} \\ & f''(\sqrt{3}) = 0 \\ (\sqrt{3}, \infty) & f'' > 0 \rightarrow\ f \text{ konvex} \end{array}$$

4 Lokale und globale Extremalstellen

Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Zur Ermittlung lokaler Extremalstellen stehen uns folgende Kriterien zur Verfügung:

1. **Notwendiges Kriterium**

   Ist der Punkt $x^* \in (a,b)$ eine lokale Extremalstelle so gilt $f'(x^*) = 0$, oder kurz

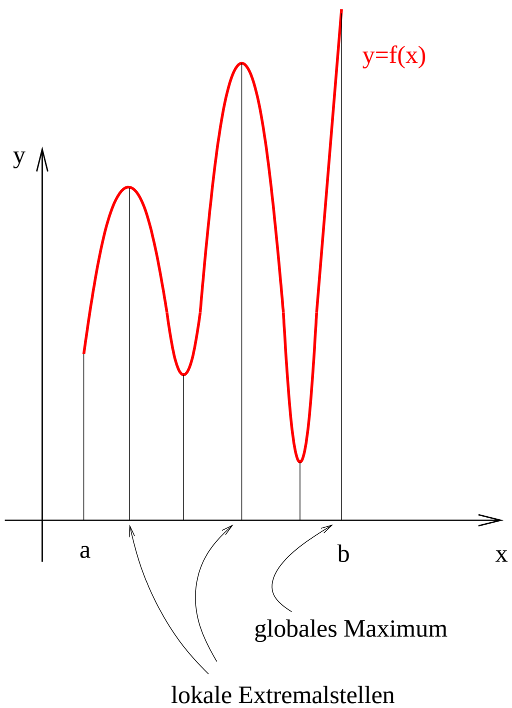
$$\boxed{x^* \in (a,b) \text{ lokale Extremalstelle} \quad \Longrightarrow \quad f'(x^*) = 0}$$

2. **Hinreichendes Kriterium**

   Gilt für den Punkt $x^* \in (a,b)$ einerseits $f'(x^*) = 0$ und andererseits $f''(x^*) < 0$ (bzw. $f''(x^*) > 0$), so ist x^* ein lokales Maximum (bzw. Minimum). Kurz:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f'(x^*) = 0 \\ f''(x^*) < 0 \;\; (> 0) \end{array}\right\} \Longrightarrow x^* \text{ein lokales Maximum (bzw. Minimum)}}$$

Zur Ermittlung **globaler Extremalstellen** einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ müssen die Funktionswerte an den lokalen Extremalstellen (Extrema) mit den Randwerten $f(a)$ und $f(b)$ verglichen werden. Diese Stellen können die Extrema der Funktion auf diesem Intervall sein, obwohl die Ableitung der Funktion in diesen Randpunkten nicht verschwindet. Im folgenden Abschnitt werden wir sehen, dass sich dieses aufwendige Vorgehen bei ökonomischen Problemen häufig vermeiden lässt.



Beispiel 4.1

Bestimmen Sie die (globalen) Extremalstellen der Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 3$ auf dem Intervall $I = [0, 2]$.

Lösungsskizze

- *Lokale Extremstellen*

$$f'(x) \;=\; 2x - 2 \;=\; 0 \;\leftrightarrow\; x = 1$$

  $x_1 = 1$ *ist der einzige Kandidat für eine lokale Extremalstelle und damit auch ein Kandidat für eine globale Extemalstelle. Da $f''(1) = 2$ ist, handelt es sich um ein lokales Minimum. Diese Untersuchung ist aber eigentlich hier nicht nötig.*

- *Die beiden Randpunkte des Intervalls $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$ sind* **immer** *Kandidaten für globale Extremalstellen.*

- *Wir berechnen nun die Funktionswerte an allen Kandidatenstellen. Der (oder ein) grösste(r) Wert gehört zum globalen Maximum, der (oder ein) kleinste(r) Wert gehört zum globalen Minimum.*

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 && x = 1 \textit{ ist globales Minimum} \\ f(0) &= 3 && x = 0 \textit{ ist globales Maximum} \\ f(2) &= 3 && x = 2 \textit{ ist auch globales Maximum} \end{aligned}$$

Globale Extrema bei konvexen und konkaven Funktionen

Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und konvex (konkav) und $x^* \in (a, b)$. Dann gilt das notwendige und hinreichende Kriterium:

$$\boxed{f'(x^*) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^* \text{ globale Minimalstelle (Maximalstelle)}}$$

Beispiel 4.2 *Ermitteln Sie für die Gewinnfunktion eines Monopolisten*

$$G(x) \;=\; x \cdot p(x) - K(x)$$

wobei

$$p(x) \;=\; 21 - \frac{1}{2}x \qquad \textit{und} \qquad K(x) \;=\; 10x - 64\ln(x+1),$$

dasjenige Produktionsniveau x^*, welches zum globalen Maximum führt.

Lösungsskizze:

- *Funktion G bilden:*

$$\begin{aligned} G(x) \;=\; x \cdot p(x) - K(x) \;&=\; x \cdot \left(21 - \frac{1}{2}x\right) - 10x + 64\ln(x+1) \\ &=\; 64\ln(x+1) - \frac{1}{2}x^2 + 11x \end{aligned}$$

- *G ableiten*

$$G'(x) \;=\; \frac{64}{x+1} - x + 11$$

- *$G'(x) = 0$ lösen*

$$\frac{64}{x+1} - x + 11 \;=\; 0 \qquad \leftrightarrow \qquad x = 15 \;\textit{oder}\; x = -5$$

  Nur die Lösung $x = 15$ ist relevant (x ist eine Stückzahl). Wir wissen allerdings noch nicht, ob der Punkt eine lokale Maximalstelle bzw. eine lokale Minimalstelle oder ein Sattelpunkt ist. Globale Aussagen sind (noch) nicht möglich. Wenn wir allerdings zeigen könnten, dass die Funktion G (überall) konkav ist hätten wir auch bewiesen,dass $x = 15$ eine lokale und globale (für alle positiven Werte x) Maximumstelle ist.

-

$$G''(x) \;=\; -\frac{64}{(x+1)^2} - 1 \;=\; -\left(\frac{64}{(x+1)^2} + 1\right)$$

  ist für alle $x \neq -1$ negativ. Somit ist G dort auch überall konkav und $x^* = 15$ ist unser gesuchtes globales Gewinnmaximum.

5 Wendestellen

Ein Punkt $(x_0, f(x_0))$, in dem die Tangente den Graphen "schneidet", heisst Wendepunkt. Die Koordinate x_0 heisst Wendestelle. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass x_0 eine Wendestelle ist, ist

$$\boxed{x_0 \text{ Wendestelle} \quad \Longleftrightarrow \quad f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0}$$

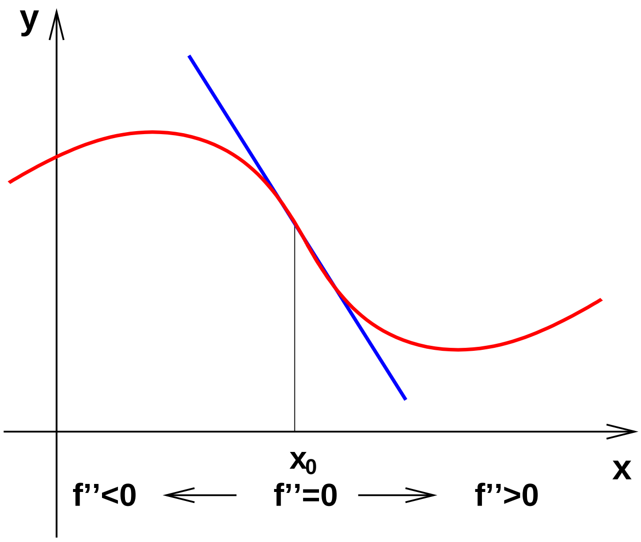


Abbildung 2: Wendepunkt

Beispiel 5.1 *Wir wollen alle Wendepunkte der Funktion $f(x) = x^3e^{-x}$ bestimmen.*

Lösungsskizze:

- *Ableitungen von f*

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3e^{-x} \\
f'(x) &= 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x} &&= x^2e^{-x}(3-x) \\
f''(x) &= 6xe^{-x} - 6x^2e^{-x} + x^3e^{-x} &&= xe^{-x}(6-6x+x^2) \\
f'''(x) &= 6e^{-x} - 18xe^{-x} + 9x^2e^{-x} - x^3e^{-x} &&= e^{-x}(6-18x+9x^2-x^3)
\end{aligned}$$

- *$f''(x) = 0$ lösen*

$$0 = xe^{-x}(6-6x+x^2) \qquad \leftrightarrow \qquad x_1 = 0,\ x_2 = 3+\sqrt{3} \text{ und } x_3 = 3-\sqrt{3}$$

- *Test der dritten Ableitung: $f'''(x_1) \neq 0$, $f'''(x_2) \neq 0$ und $f'''(x_3) \neq 0$.*

6 Taylor-Polynome

6.1 Darstellung von Polynomen

Normalerweise schreiben wir ein Polynom p in der Form

$$p(x) \;=\; a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \;=\; a_0 + a_1(x-0) + a_2(x-0)^2 + \ldots + a_n(x-0)^n$$

auf. Wir könnten hier auch sagen, dass wir das Polynom p um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ darstellen. Manchmal ist es allerdings von Vorteil, wenn wir Polynome bezüglich anderer Entwicklungspunkte x_0 darstellen.

Beispiel 6.1

Entwicklungspunkt $x_0 = 1$		*Entwicklungspunkt* $x_0 = -1$		$x_0 = 0$
$2(x-1)^2 + 3(x-1) + 4$	$=$	$2(x+1)^2 - 5(x+1) + 6$	$=$	$2x^2 - x + 3$

Alle drei Darstellungen beschreiben das selbe Polynom. Überprüfen Sie das.

Der Vorteil der Darstellung eines Polynoms p bezüglich eines Entwicklungspunktes x_0 offenbart sich, wenn wir an den Werten der Ableitung von p im Punkt x_0 interessiert sind, also an den Werten $p(x_0), p'(x_0), p''(x_0), \ldots$

Vergleichen wir kurz den Rechenaufwand bei der Bestimmung des Wertes $p'(x_0)$ für die beiden Darstellungen

$$p(x) \;=\; a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \;=\; b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \ldots + b_n(x-x_0)^n.$$

Entwicklungspunkt 0:

$$\begin{aligned} p'(x) &= a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} \\ p'(x_0) &= a_1 + 2a_2 x_0 + \ldots + n a_n x_0^{n-1} \;=\; \ldots \end{aligned}$$

Entwicklungspunkt x_0:

$$\begin{aligned} p'(x) &= b_1 + 2b_2(x-x_0) + \ldots + n b_n (x-x_0)^{n-1} \\ p'(x_0) &= b_1 + 2b_2 \underbrace{(x_0-x_0)}_{=0} + \ldots + n b_n \underbrace{(x_0-x_0)^{n-1}}_{=0} \;=\; b_1. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $b_0, b_1, b_2, \ldots$ sind bis auf einen Faktor schon die Funktionswerte $p(x_0), p'(x_0), p''(x_0), \ldots$!

6.2 Problemstellung und Einführungsbeispiel

Sei $f(x)$ eine mindestens n-mal differenzierbare Funktion und x_0 ein Punkt. Oft ist es günstig, diese eventuell sehr komplizierte Funktion in der Nähe des Punktes $(x_0, f(x_0))$ durch eine sehr einfache Funktion zu ersetzen. Solch einfache Funktionen können Polynome sein und man versucht eines zu finden, was die Funktion f zumindest in der Nähe des Punktes $(x_0, f(x_0))$ gut approximiert.

Direkte Konstruktion von Taylorpolynomen

Beispiel 6.2 *Wir suchen ein Polynome 2-ten Grades, das die Funktion*

$$K(x) = 50 + 6x + 20e^{-0.1(x-10)}$$

an der Stelle $x_0 = 10$ *möglichst gut approximieren.*
Ein Polynom $P_2(x)$ *vom Grad 2 hat die allgemeine Gestalt*

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad \textit{oder} \quad P_2(x) = b_0 + b_1(x-10) + b_2(x-10)^2$$

je nach dem, welchen Entwicklungspunkt wir wählen. und wir können die drei Konstanten so festlegen, dass im Nullpunkt der Funktionswert, die 1. Ableitung und die 2. Ableitung (Krümmung) der Funktion K *mit den entsprechenden Werten des Polynoms übereinstimmen, also* $K(10) = P_2(10)$, $K'(10) = P_2'(10)$ *und* $K''(10) = P_2''(10)$. *Da wir mit Ableitungen arbeiten, ist die Darstellung von* P_2 *mit Entwicklungspunkt* $x_0 = 10$ *gut geeignet.*

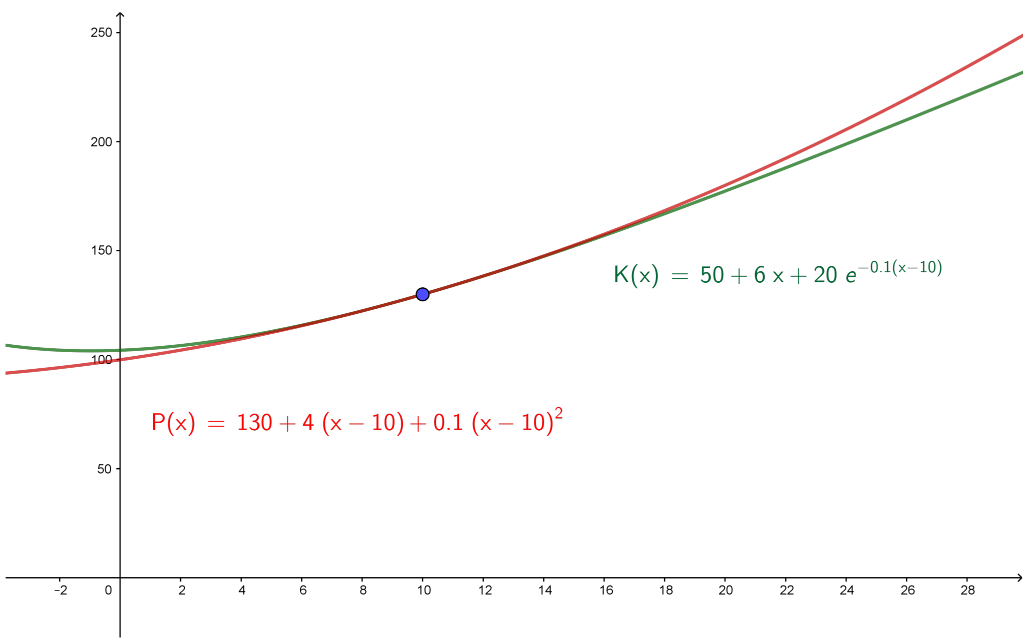
$$K(10) = 50 + 6x + 20e^{-0.1(x-10)}\Big|_{x=10} = 130 = P_2(10) = b_0$$

$$K'(10) = 6 - 2e^{-0.1(x-10)}\Big|_{x=10} = 4 = P_2'(10) = b_1$$

$$K''(10) = 0.2e^{-0.1(x-10)}\Big|_{x=10} = 0.2 = P_2''(10) = 2b_2.$$

Somit ist

$$P_2(x) = b_0 + b_1(x-10) + b_2(x-10)^2 = 130 + 4(x-10) + 0.1(x-10)^2.$$



Beispiel 6.3 *Wir suchen ein Polynome 2-ten Grades, das die Funktion*

$$f(x) \;=\; -e^{-x} - x + 1$$

an der Stelle $x_0 = 0$ möglichst gut approximieren.

Ein Polynom $P_2(x)$ vom Grad 2 hat die allgemeine Gestalt $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ und wir können die drei Konstanten so festlegen, dass im Nullpunkt der Funktionswert, die 1. Ableitung und die 2. Ableitung (Krümmung) der Funktion f mit den entsprechenden Werten des Polynoms übereinstimmen, also $f(0) = P_2(0)$, $f'(0) = P_2'(0)$ und $f''(0) = P_2''(0)$:

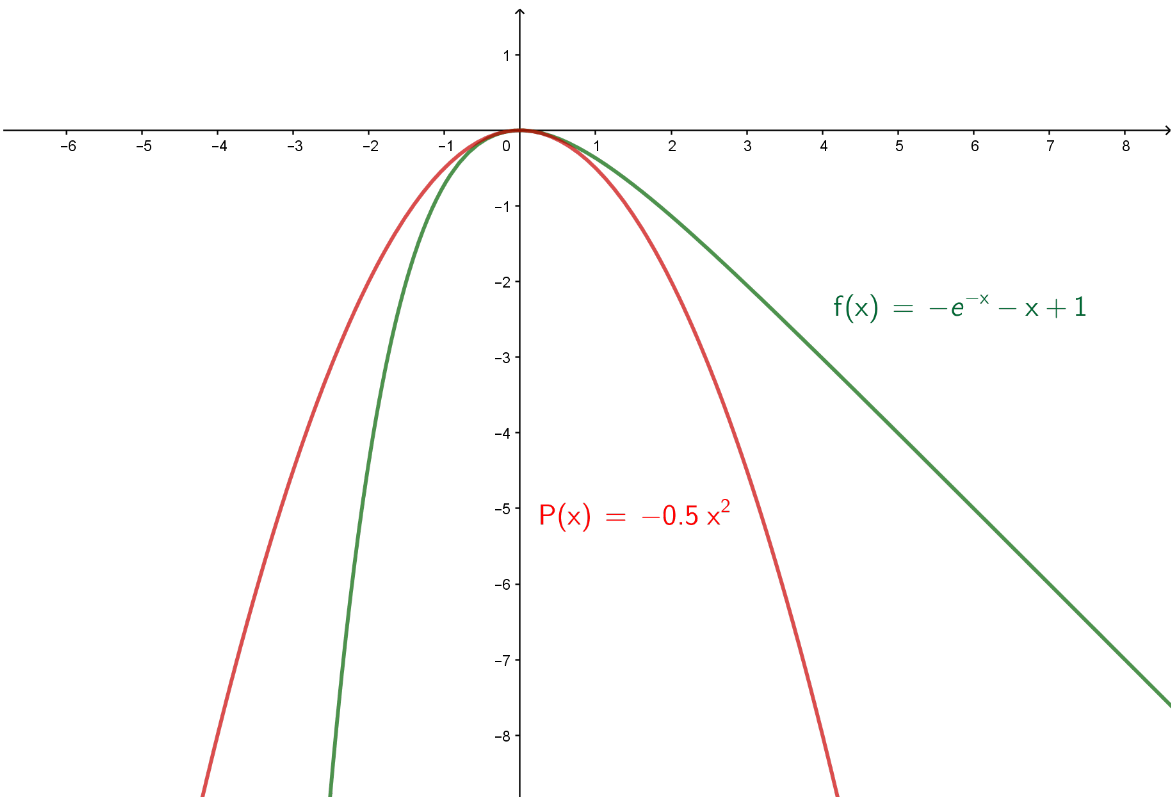
$$\begin{aligned} f(0) &= -e^{-0} - 0 + 1 \;=\; 0 \;=\; P_2(0) \;=\; a_0 \\ a_0 &= f(0) \;=\; 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= e^{-0} - 1 \;=\; 0 \;=\; P_2'(0) \;=\; a_1 \\ a_1 &= f'(0) \;=\; 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(0) &= -e^{-0} \;=\; -1 \;=\; P_2''(0) \;=\; 2a_2 \\ a_2 &= \frac{f''(0)}{2} \;=\; -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$P_2(x) \;=\; -\frac{1}{2}x^2.$$



6.3 Taylor-Polynom und ihre Eigenschaften

Definition 6.1 *Das n-te Taylor-Polynom $P_n(x)$ von f mit Entwicklungspunkt x_0 ist definiert als*

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

Das n-te Taylor-Polynom $P_n(x)$ hat im Punkt x_0 die folgende schöne Eigenschaft:

$$\begin{array}{lcll}
P_n(x_0) & = & f(x_0) & \text{gemeinsamer Punkt an der Stelle } x_0 \\
P_n'(x_0) & = & f'(x_0) & \text{gemeinsame Tangente} \\
P_n''(x_0) & = & f''(x_0) & \text{gleiche Krümmung} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
P_n^{(n)}(x_0) & = & f^{(n)}(x_0) &
\end{array}$$

denn für die l-te Ableitung von $P_n(x)$ für $l = 0, 1, 2, \ldots, n$ gilt:

$$\begin{aligned}
P_n^{(l)}(x)\Big|_{x=x_0} &= \frac{d^l}{dx^l}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)\Bigg|_{x=x_0} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,\frac{d^l}{dx^l}(x-x_0)^k\Bigg|_{x=x_0} \\
&= f^{(l)}(x_0)
\end{aligned}$$

Wir können nun (genügend oft differenzierbare) reelle Funktionen $y = f(x)$ in der Nähe eines Punktes x_0 durch ein Taylor-Polynom $y = P_2(x)$ approximieren:

$$P_2(x) \quad = \quad f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} P_2(x_0) &= f(x_0) \\ P_2'(x_0) &= f'(x_0) \\ P_2''(x_0) &= f''(x_0) \end{aligned}$$

Warum hilft nun die 2. Ableitung bei der Typbestimmung einer Extremalstelle? Insbesondere glauben wir, dass sich P_2 und f nahe bei x_0 sehr ähnlich sind. Das quadratische Polynom P_2 sollte also die Krümmung von f nahe bei x_0 (meist) recht gut beschreiben und wir können tatsächlich das wohl bekannte Kriterium zur Unterscheidung zwischen lokalen Maximalstellen und lokalen Minimalstellen herleiten und bestätigen.

Sei also $x_0 = x^*$ ein stationärer Punkt von f, d.h. $f'(x^*) = 0$. Dann gilt für alle x nahe bei x^*:

$$f(x) \approx P_2(x) \quad = \quad f(x^*) + \frac{f''(x^*)}{2}\underbrace{(x - x^*)^2}_{>0}$$

und man erkennt sofort:

- Ist $f''(x^*) > 0$, so ist $\frac{f''(x^*)}{2}(x - x^*)^2 > 0$ und

  $$f(x) \quad \approx \quad f(x^*) + \underbrace{\frac{f''(x^*)}{2}(x - x^*)^2}_{>0} \quad > \quad f(x^*)$$

  für **alle** x nahe bei x^*. Also muss x^* eine lokale Minimalstelle sein.

- Ist $f''(x^*) < 0$, so ist $\frac{f''(x^*)}{2}(x - x^*)^2 < 0$ und

  $$f(x) \quad \approx \quad f(x^*) + \underbrace{\frac{f''(x^*)}{2}(x - x^*)^2}_{<0} \quad < \quad f(x^*)$$

  für **alle** x nahe bei x^*. Also muss x^* eine lokale Maximalstelle sein.

- Ist $f''(x^*) = 0$ können wir zunächst **nichts** aussagen! Wir müssten höhere Ableitungen von f untersuchen. Als Beispiel hierfür könnten Sie die drei Funktionen x^3, x^4 und $-x^4$ untersuchen. Alle drei Funktionen haben sowohl den stationären Punkt $x^* = 0$ als auch eine verschwindende zweite Ableitung im Punkt 0, realisieren aber Sattelpunkt, lokale Minimalstelle bzw. lokale Maximalstelle.

Beispiel 6.4 *Wir wollen die Taylorpolynom 0-ten, 1-ten, 2-ten und 3-ten Grades der Funktion $f(x) = 2 + \ln(x)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ bestimmen.*

Lösungsskizze:

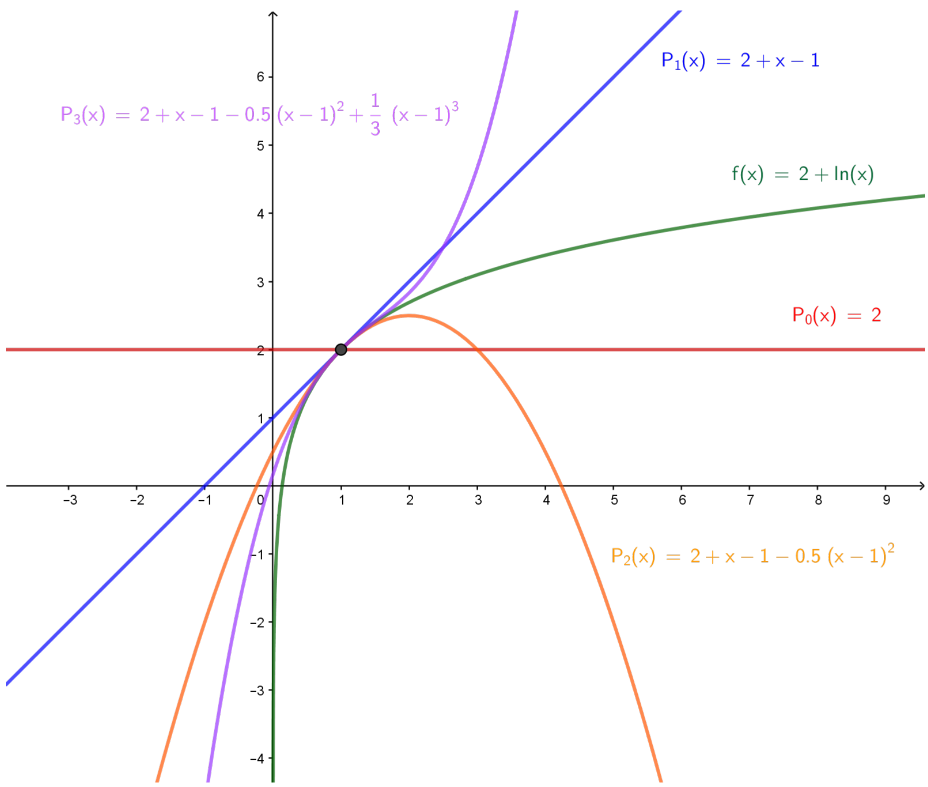
- *Ableitungen von f im Punkt $x_0 = 1$ bestimmen*

$$\begin{array}{rcccrcl} f^{(0)}(x) = & 2+\ln(x) & \to & f^{(0)}(1) & = & 2 \\ f^{(1)}(x) = & x^{-1} & \to & f^{(1)}(1) & = & 1 \\ f^{(2)}(x) = & -x^{-2} & \to & f^{(2)}(1) & = & -1 \\ f^{(3)}(x) = & 2x^{-3} & \to & f^{(3)}(1) & = & 2 \end{array}$$

- *Taylor-Polynome bilden*

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f(1) + \frac{f^{(1)}(1)}{1!}(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 \\ &= 2 + \frac{1}{1}(x-1) + \frac{-1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3 \\ &= \underbrace{\underbrace{\underbrace{2}_{=P_0(x)} + (x-1)}_{=P_1(x)} - \frac{1}{2}(x-1)^2}_{=P_2(x)} + \frac{1}{3}(x-1)^3 \end{aligned}$$

Insbesondere enthält das Polynom P_3 alle Taylor-Polynome kleineren Grades!



6.4 *Die Taylor-Formel*

Natürlich wissen wir nicht, wie gut unser Taylor-Polynom unsere Funktion approximiert. Wir bräuchten dazu eine Aussage über die Differenz der beiden Funktionswerte $f(x) - P_n(x) =: R_{n+1}(x, x_0)$. Fundamental wichtig für die Lösung dieses Problems ist der folgende Satz.

Satz 2 (Taylor-Formel) *Für jede auf einem offenen Intervall I mindestens $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion f und alle $x, x_0 \in I$ gilt:*

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{=:\, P_n(x)} + R_{n+1}(x, x_0)$$

mit dem Restglied nach

<u>*Cauchy*</u> $\quad R_{n+1}(x, x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n \, f^{(n+1)}(t) \, dt$

<u>*Lagrange*</u> $\quad R_{n+1}(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \, (x-x_0)^{n+1}$ *mit z zwischen x und x_0*

Beweisidee:

Wir wollen zunächst die erste Formel mit dem Restglied nach Cauchy mittels Induktion beweisen. Für $n = 0$, d.h. f ist einmal stetig differenzierbar, gilt die Formel

$$f(x) \;=\; f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t) dt$$

Ist die Funktion f zweimal stetig differenzierbar, so integrieren wir partiell und setzen

$$u = t - x \quad u' = 1 \qquad v = f' \quad v' = f''$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{f'(t)}_{v} \, dt &= \underbrace{(t-x)}_{u} \cdot \underbrace{f'(t)}_{v} \Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \underbrace{(t-x)}_{u} \cdot \underbrace{f''(t)}_{v'} \, dt \\
&= -(x_0 - x) f'(t) - \int_{x_0}^{x} (t-x) f''(t) dt \\
&= (x - x_0) f'(t) + \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t) dt
\end{aligned}$$

$$f(x) \;=\; f(x_0) + (x - x_0) f'(t) + \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t) dt$$

Fortlaufende partielle Integration führ zur angegebenen Formel mit der Restglieddarstellung nach Cauchy.

Die Lagrange-Form des Restgliedes ergibt sich nun aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung. Danach gibt es einen Wert z zwischen x_0 und x so dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n \, f^{(n+1)}(t) \, dt &= \frac{1}{n!} \, f^{(n+1)}(z) \int_{x_0}^{x} (x-t)^n \, dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \, (x-x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

□

Beispiel 6.5 *Mit dem Lagrangeschen Restglied gilt*

$$e^x \;=\; 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^z}{(n+1)!} \, x^{n+1}$$

und für $|x| \le 1$ *ergibt sich die Abschätzung*

$$\left| e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \cdots - \frac{x^n}{n!} \right| \;=\; \frac{e^z}{(n+1)!} \, |x|^{n+1} \;\le\; \frac{e}{(n+1)!} \, |x|^{n+1}.$$

Bei einen tolerierten Fehler, etwa $\pm 10^{-7}$, *ist* n *(in Abhängigkeit von* x*) so zu bestimmen, dass*

$$\frac{e}{(n+1)!} \, |x|^{n+1} \;\le\; 10^{-7}$$

gilt. Für $x = 0.1$ *ist das bereits für* $n = 5$ *erfüllt, für* $x = 1$ *muss man* $n = 10$ *wählen.*

7 Diskussion von Funktionen

Infolge der Verfügbarkeit von EDV-Programmen zur graphischen Darstellung von Funktionen hat die Kurvendiskussion an Bedeutung eingebüsst. Treten allerdings Funktionen mit Parametern auf (z.B. $f(x) = x^{2a}/e^{bx}$), so ist eine qualitative Analyse des Funktionsverlaufes nach wie vor von Bedeutung.

7.1 Was lesen wir aus der Funktionsgleichung $y = f(x)$?

1. **Definitionsbereich**

   Beispiele:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x-6} \quad \text{ist definiert für } \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 6\} \\ f(x) &= \sqrt{4-x^2} \quad \text{ist definiert für } \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \ \leq 2\} \end{aligned}$$

2. **Nullstellen** Löse die Gleichung $f(x) = 0$ nach x auf.

   Beispiele:

$$f(x) \;=\; x^2 - x - 6 \;=\; 0$$

   hat die Lösungen -2 und 3.

3. **Symmetrien**

   Gilt die Gleichung $f(x) = f(-x)$ für alle x, so ist f eine gerade Funktion, also symmetrisch bezüglich der y-Achse. Wir müssen also nur einen Teil der Funktion untersuchen (z.B. den positiven), um die gesamte Funktion zu verstehen.

   Beispiele:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 4x^6 \\ f(-x) &= (-x)^2 + 4(-x)^6 \\ &= x^2 + 4x^6 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x) \\ f(-x) &= \cos(-x) \\ &= \cos(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

   Gilt die Gleichung $f(-x) = -f(x)$ für alle x, so ist f eine ungerade Funktion, also symmetrisch bezüglich des Nullpunktes. Wir müssen also auch hier nur einen Teil der Funktion untersuchen (z.B. den positiven), um die gesamte Funktion zu verstehen.

Beispiele:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + x^5 \\ f(-x) &= (-x)^3 + (-x)^5 \\ &= -(x^3 + x^5) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \\ f(-x) &= \sin(-x) \\ &= -\sin(x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

4. **Asymptotisches Verhalten** (Verhalten für $x \to \pm\infty$)

Zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ verhalten sich asymptotisch gleich, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) &= 0 \\ \lim_{x\to-\infty} (f(x) - g(x)) &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel:

Die beiden Funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 3}{x} \quad \text{und} \quad g(x) = 2x - 1$$

verhalten sich asymptotisch gleich, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2 - x + 3}{x} - 2x + 1 \right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2 - x + 3 - 2x^2 + x}{x} \right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} = 0. \end{aligned}$$

7.2 Was lesen wir aus den Ableitungen?

1. Was lesen wir aus der 1. Ableitung?

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad &\Longrightarrow \quad \text{Funktion wachsend} \\ f'(x_0) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \text{Funktion hat an der Stelle } x_0 \text{ horizontale Tangente} \\ f'(x) < 0 \quad &\Longrightarrow \quad \text{Funktion fallend} \end{aligned}$$

2. Was lesen wir aus der 2. Ableitung?

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 \quad &\Longrightarrow \quad \text{Funktion konvex} \\ f''(x) < 0 \quad &\Longrightarrow \quad \text{Funktion konkav} \end{aligned}$$

3. Was lesen wir aus der 1. und 2. Ableitung?

$$\begin{aligned} f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) < 0 \quad &\Longrightarrow \quad x_0 \text{ ist lokale Maximalstelle} \\ f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) > 0 \quad &\Longrightarrow \quad x_0 \text{ ist lokale Minimalstelle} \end{aligned}$$

4. Was lesen wir aus der 2. und 3. Ableitung?

$$f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 \text{ ist Wendepunkt}$$

Beispiel 7.1 *Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion* $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ *durch.*

1. Definitionsbereich

$$D = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \}$$

2. Nullstellen

$$f(x) = 0 \iff x = 0$$

3. Symmetrien

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{-x-1} = \frac{x^2}{-x-1} \neq \pm f(x)$$

Nein!

4. Asymptotisches Verhalten

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-1/x} = \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$

5. Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{x-1} - \frac{x^2}{(x-1)^2} \\ f''(x) &= \frac{2}{x-1} - \frac{4x}{(x-1)^2} + \frac{2x^2}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \iff x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 2$$

$$\begin{aligned} f''(0) &< 0 \quad \text{also} \quad x_1 = 0 \ \text{ ist lokale Maximalstelle} \\ f''(2) &> 0 \quad \text{also} \quad x_2 = 2 \ \text{ ist lokale Minimalstelle} \end{aligned}$$

6. Verhalten an der Polstelle $x = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to1+} \frac{x^2}{x-1} &= \frac{1^2}{+0} = +\infty \qquad \text{rechtseitiger Grenzwert bei 1} \\ \lim_{x\to1-} \frac{x^2}{x-1} &= \frac{1^2}{-0} = -\infty \qquad \text{rechtseitiger Grenzwert bei 1} \end{aligned}$$

8 Testfragen zur Vorlesung

Hinweis: Bevor Sie die Übungsaufgaben lösen, sollten Sie den Stoff der Vorlesung verstanden haben. Insbesondere sollten Sie die folgenden einfachen Fragen beantworten können. Diese Fragen werden im Allgemeinen nicht in den Übungen besprochen, können aber prüfungsrelevant sein.

1. Können Sie alle aus der Schule bekannten (elementaren) Funktionen (ohne weitere Rechnungen) schnell skizzieren?

2. Können Sie die Funktion

$$n(p) \quad = \quad \frac{\ln(2)}{\ln(1+p)}$$

   für $p \geq 0$ schnell und grob (Vorzeichen und Monotonie) skizzieren? Wissen Sie noch, welchen kausalen Zusammenhang diese Funktion beschreibt?

3. Definieren Sie die Begriffe konvexe Funktion, konkave Funktion, lokale und globale Extemalstelle, lokale und globale Maximalstelle und Wendestelle.

4. Wie lautet der Mittelwertsatz? Kennen Sie unmittelbare Folgerungen aus dem Mittelwertsatz?

5. Geben Sie die Definition für konvexe Funktion und konkave Funktion. Geben Sie mindestens drei weitere Eigenschaften von konvexen Funktionen und mindestens drei weitere Eigenschaften von konkaven Funktionen an. Nennen Sie jeweils zwei Beispiele für Funktionen, die die folgenden Eigenschaften haben:

   - streng monoton wachsend **und** konvex,
   - streng monoton fallend **und** konvex,
   - streng monoton wachsend **und** konkav bzw.
   - streng monoton fallend **und** konkav.

6. Nennen Sie ein notwendiges Kriterium für das Vorliegen eines lokalen Maximums (Minimums).

7. Nennen Sie ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen eines lokalen Maximums (Minimums).

8. Überlegen Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Begründen (beweisen) Sie Ihre Antwort.

   (a) Eine Nullstelle der ersten Ableitung ist stets eine lokale Extremalstelle.

   (b) Ist x_0 eine lokale Extremalstelle von f, so hat die erste Ableitung von f in x_0 eine Nullstelle.

   (c) Ist x_0 eine lokale Extremalstelle von f, so ist die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ parallel zur y-Achse.

   (d) Ist x_0 eine lokale Extremalstelle von f, so ist die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ parallel zur x-Achse.

9. Welche Eigenschaft(en) hat das Taylor-Polynom

$$P_2(x) \;=\; \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k$$

von f mit Entwicklungspunkt x_0 (im Hinblick auf f und x_0)?

10. Angenommen, Sie kennen von einer (genügend oft) differenzierbaren Funktion f nur die beiden Werte $f(1) = 1$ und $f'(1) = 0.2$. Bestimmen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $f(1.1)$!

    Hinweis:

$$\begin{aligned} f(1.1) &\approx P_1(1.1) \\ &= f(1) + f'(1)(1.1-1) \\ &= 1 + 0.2 \cdot 0.1 \;=\; 1.02 \end{aligned}$$

9 Übungsaufgaben

9.1 Niveau 1

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf dem gegebenen Intervall (Monotonie, lokale und globale Extremalstellen).

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x} + \frac{7}{x^4} = x^{-1} + 7 \cdot x^{-4} \qquad x \in [1, 2] \\ h(x) &= \frac{x}{\ln(x)} = x \cdot (\ln x)^{-1} \qquad x \in [2, 10] \end{aligned}$$

9.2 Niveau 2

1. Bestimmen Sie die Taylor-Polynome $P_1(x), P_2(x)$ und $P_3(x)$ für die Funktion $f(x) = \ln(1 - x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

2. Wo sind die gegebenen Funktionen konvex bzw. konkav?

   (a) $K(x) = 30 \cdot x - 10 \cdot \ln(x + 1), \quad x > 0$

   (b) $g(x) = \ln(x^2 + 1), \quad x \in \mathbb{R}$

9.3 Niveau 3

Die Nachfrage nach einem Gut als Funktion des monatlichen Einkommens sei gegeben durch die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 1 \\ \dfrac{10(x-1)^2}{e^x} & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$$

wobei x das monatliche Einkommen (in tausend Fr.) und y die nachgefragte Menge (in tausend Stück) bezeichnet.

1. Diskutieren und skizzieren Sie die Funktion f.

2. Berechnen Sie für $x \geq 1$ die Einkommenselastizität $\epsilon_{f,x}$ der Nachfrage.

3. Welche prozentuale Erhöhung/Verringerung der Nachfrage bringt eine 1%-ige Erhöhung des Einkommens bei $x = 2, 3, 5, 7$? (Hinweis: $\epsilon_{f,x}$ nutzen)

Lösungen der Übungsaufgaben

Niveau 1

1. *a)* Keine stationäre Stelle auf $[1,2]$, streng monoton fallend auf $[1,2]$, Globales Maximum bei 1, globales Minimum bei 2

   b) Globales Minimum bei e, globales Maximum bei 10

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\ln x)^{-1} - (\ln x)^{-2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \\ h''(x) &= \frac{-1}{x(\ln x)^2} + \frac{2}{x(\ln x)^3} = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} \end{aligned}$$

Niveau 2

1. $P_1(x) = -x$, $P_2(x) = -x - \frac{x^2}{2}$ und $P_3(x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$

2. *a)* konvex, denn $K''(x) = \frac{10}{(x+1)^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

   b) weder konvex noch konkav. Genauer könnte man zeigen, dass zunächst

$$g''(x) = \frac{2}{x^2+1}\left(1 - \frac{2x^2}{x^2+1}\right) = 2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

   gilt. Dann löst man die Gleichung $g''(x) = 0$ und erhält die beiden Lösungen $x = \pm 1$. Die Funktion g'' ändert also höchstens an diesen beiden Punkten das Vorzeichen. Bestimmt man nun noch das Vorzeichen von g'' an drei gut gewählten Punkten, erhält man folgendes:

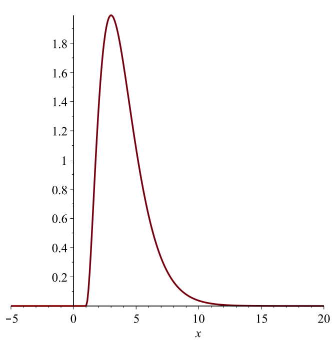
   g ist konkav auf $(-\infty, -1)$, da $g''(x) < 0$ für alle $x \in (-\infty, -1)$

   g ist konvex auf $(-1, 1)$, da $g''(x) > 0$ für alle $x \in (-1, 1)$

   g ist konkav auf $(1, \infty)$, da $g''(x) < 0$ für alle $x \in (1, \infty)$

Niveau 3

a)



b) $\epsilon_{f,x} = \frac{x(3-x)}{x-1}$

c) $2\%, 0\%, -2.5\%, -4.667\%$