Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden 5

Mathematik 1
Dr. Thomas Zehrt

Funktionen in zwei oder mehreren Veränderlichen I

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Eine Funktion war als eine Vorschrift definiert, die jedem Element einer Menge X (Definitionsbereich) genau ein Element einer Menge Y zuordnet. Bisher war für uns stets $X, Y \subset \mathbb{R}$. In den folgenden Kapiteln werden wir nun insbesondere Funktionen mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$ betrachten, allerdings lassen sich fast alle erzielten Resultate leicht auf Funktionen mit Definitionsbereichen $\mathbb{R}^n$ beliebiger Dimension n übertragen.

Schreibweise:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto z = f(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) &\longmapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

1.1 Beispiele aus der Ökonomie

1. Die Nachfrage q_1 nach einem Gut G_1 werde als Funktion des Preises p_1 und des Preises p_2 eines zweiten Gutes G_2 betrachtet:

$$q_1 = f(p_1, p_2).$$

   (a) **konkurrierende Güter** (Beispiel: Butter und Magarine) Die Funktion f ist
   - abnehmend als Funktion von p_1 (umso teurer die Butter wird, desto geringer die Nachfrage nach Butter)
   - wachsend als Funktion von p_2 (umso teurer die Magarine wird, desto grösser die Nachfrage nach Butter).

   Häufig verwendete Modelle:

$$q_1 = a - bp_1 + cp_2, \quad a, b, c > 0$$

$$q_1 = k \, \frac{p_2^\beta}{p_1^\alpha}$$

   (b) **komplementäre Güter** (Beispiel: Pfeifen und Tabak) Die Funktion f ist
   - abnehmend als Funktion von p_1 (umso teurer die Pfeifen werden, desto geringer die Nachfrage nach Pfeifen)
   - abnehmend als Funktion von p_2 (umso teurer der Tabak wird, desto geringer die Nachfrage nach Pfeifen).

   Häufig verwendete Modelle:

$$q_1 = a - bp_1 - cp_2, \quad a, b, c > 0$$

$$q_1 = k \, \frac{1}{p_1^\alpha \, p_2^\beta}$$

2. Eine Firma stellt die beiden Produkte 1 und 2 in Mengen q_1 und q_2 her. Die Kostenfunktion $C(q_1, q_2)$ ist eine monoton wachsende Funktion in beiden Variablen q_1 und q_2. Ein mögliches Modell ist:

$$C(q_1, q_2) \quad = \quad aq_1^2 + bq_1q_2 + cq_2^2 + dq_1 + eq_2 + f.$$

3. Die Cobb-Douglas Produktionsfunktion

   Es bezeichne

   - K: den 1. Produktionsfaktor (Kapital)
   - A: den 2. Produktionsfaktor (Arbeit)
   - $Q = f(K, A)$: das Produktionsergebnis als Funktion der Produktionsfaktoren.

   Ein häufig verwendeter Ansatz zur Modellierung der Funktion f ist

$$Q = f(K, A) \quad = \quad c \cdot K^\alpha \cdot A^\beta, \quad c > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1.$$

   Dieses Modell erfüllt die folgende ökonomische Gesetzmässigkeit:

   > Steigert man den Arbeitseinsatz (bei gleichbleibendem Kapital) stets um den gleichen Betrag ΔA, so nimmt der Produktionszuwachs ΔQ ab. Indem wir das Kapital als konstant ansehen, erhalten wir eine Funktion in einer reellen Veränderlichen:
   >
   > $$Q \quad = \quad c' \cdot A^\beta, \quad 0 < \beta < 1.$$

   Die eigentliche Cobb-Douglas Produktionsfunktion erfüllt ferner die Bedingung:

$$\alpha + \beta = 1 \quad \text{das heisst:} \quad Q = c \cdot K^\alpha \cdot A^{1-\alpha}.$$

4. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung spielt die sogenannte 2-dimensionale Gaußsche Verteilung eine wichtige Rolle. Sie gibt Anlass, die Funktion

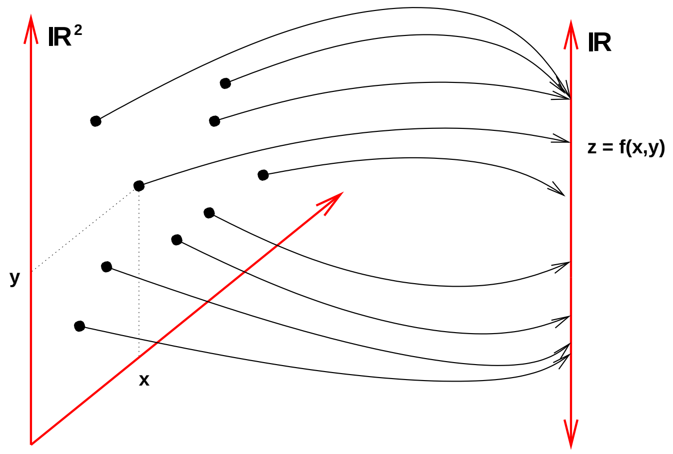
$$f(x, y) \quad = \quad e^{-(x^2+y^2)}$$

   genauer zu untersuchen.

1.2 Methoden der graphischen Darstellung

1.2.1 Das „direkte" Bild

Diese Darstellung ist vor allem geeignet, sich ein (richtiges) Bild einer Funktion an sich zu machen. Es ist wenig geeignet, zwichen verschiedenen Funktionen zu unterscheiden.

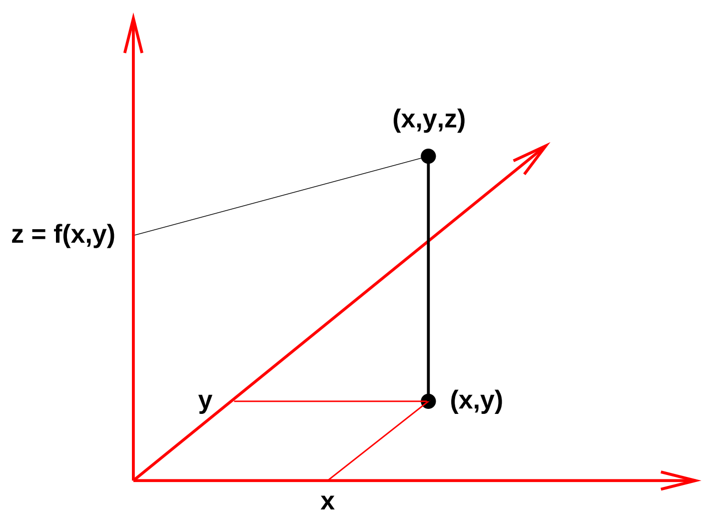


1.2.2 Der Graph

Über den Punkten (x, y) des Definitionsbereiches der Funktion errichten wir eine Strecke der Länge $z = f(x, y)$. Die Endpunkte aller dieser Strecken bilden eine Fläche im Raum, die auch als der Graph von f bezeichnet wird.

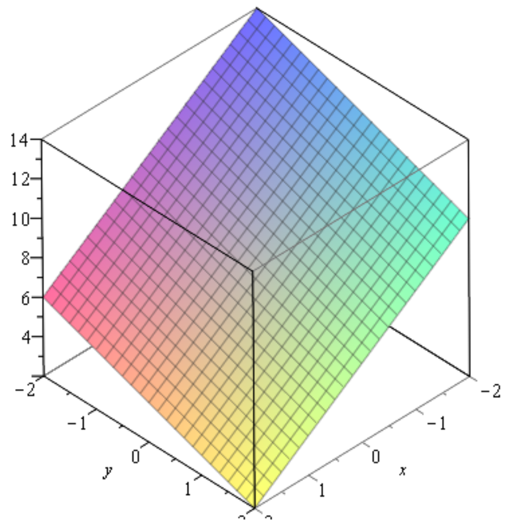
Definition 1.1

$$Graph(f) \quad = \quad \{ \ (x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D(f) \ \}$$

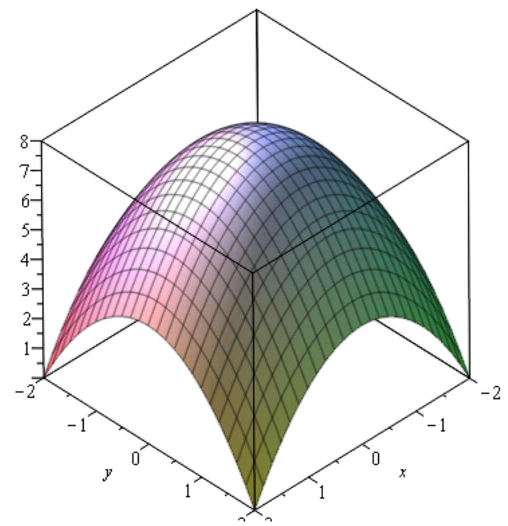


Beispiele:

1. Der Graph der Funktion $z = f(x, y) = 8 - 2x - y$ ist eine Ebene.



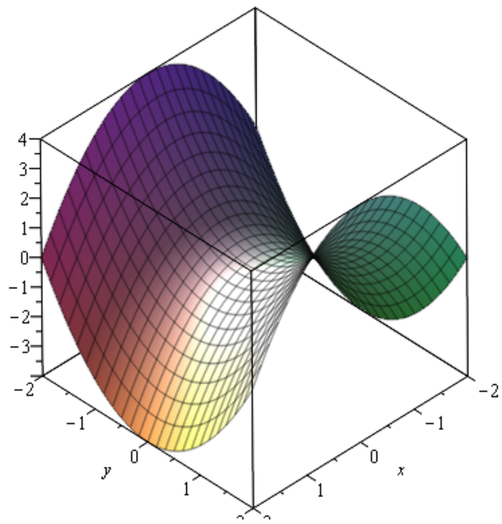
2. Der Graph der Funktion $z = f(x, y) = 8 - x^2 - y^2$ ist ein Rotationsparaboloid.



3. Der Graph der Funktion

$$z = f(x, y) \quad = \quad y^2 - x^2$$

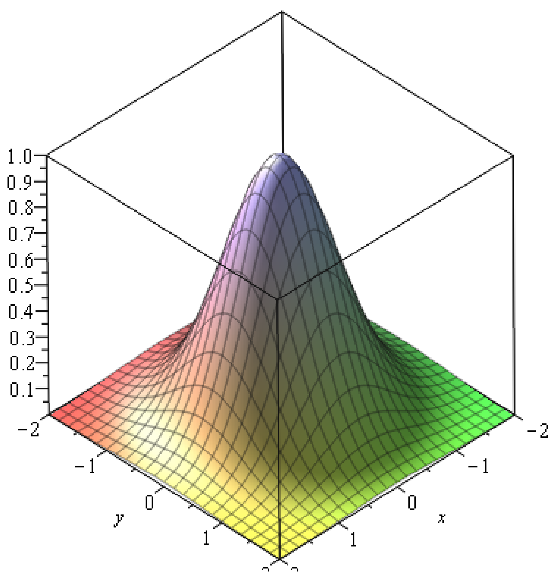
ist ein <u>hyperbolisches Paraboloid</u>.



4. Der Graph der Funktion

$$z = f(x, y) \quad = \quad e^{-(x^2+y^2)}$$

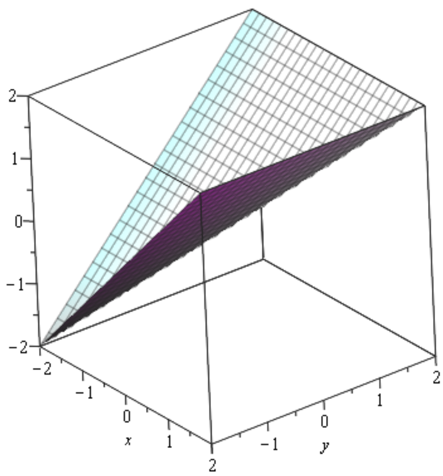
ist eine sogenannte <u>Gauß-Glocke</u>.

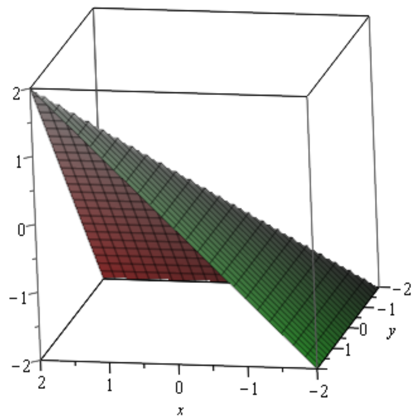


5. Die Funktionen

$$z = f(x,y) = \max\{x,y\} \qquad \text{bzw.} \qquad z = f(x,y) = \min\{x,y\}$$

ordnen jedem Punkt (x,y) in der Grundebene das Maximum (bzw. Minimum) der beiden Koordinaten als Funtionswert z zu. Es gilt also z.B. $\max\{2,3\} = 3$ und $\min\{2,-3\} = -3$.





1.2.3 Niveaulinien

Wir schneiden den Graphen einer Funktion in zwei Variablen mit horizontalen Ebenen (parallel zur (x, y)-Ebene in einer bestimmten Höhe z über dieser Ebene). Die Schnittkurve projizieren wir senkrecht in die (x, y)-Ebene (und beschriften die Projektion gegebenenfalls mit der Höhe z).

Definition 1.2 *Sei $z = f(x, y)$ eine Funktion mit Definitionsbereich D. Die Niveaulinie von f zum (konstanten) Niveau $c \in \mathbb{R}$ ist*

$$\boxed{N_c \;=\; \{\, (x,y) \in D \mid f(x,y) = c \,\} \;\subset\; D \;\subset\; \mathbb{R}^2}$$

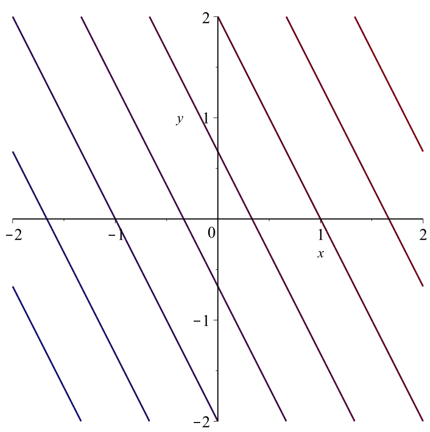
Das sind alle Punkte im Definitionsbereich von f, die von f auf den selben Wert c abgebildet werden.

Beispiele:

1. $z = f(x, y) = 8 - 2x - y$

   Als Niveaulinien erhalten wir eine Familie paralleler Geraden:

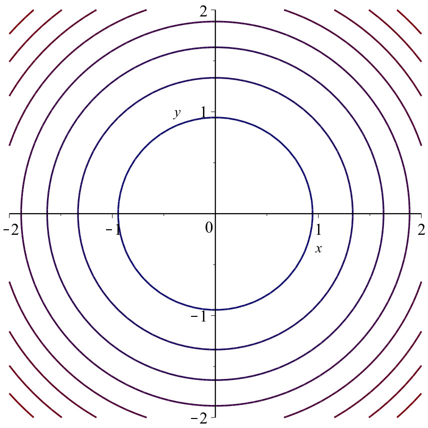
$$\begin{aligned} z = -2 \;&=\; 8 - 2x - y \;\;\rightarrow\;\; y = -2x + 10 \\ z = 0 \;&=\; 8 - 2x - y \;\;\rightarrow\;\; y = -2x + 8 \\ z = 2 \;&=\; 8 - 2x - y \;\;\rightarrow\;\; y = -2x + 6 \\ z = 4 \;&=\; 8 - 2x - y \;\;\rightarrow\;\; y = -2x + 4 \\ &\;\;\ldots \qquad\qquad \ldots \end{aligned}$$



2. $z = f(x, y) = 8 - x^2 - y^2$

   Als Niveaulinien erhalten wir eine Familie konzentrischer Kreise:

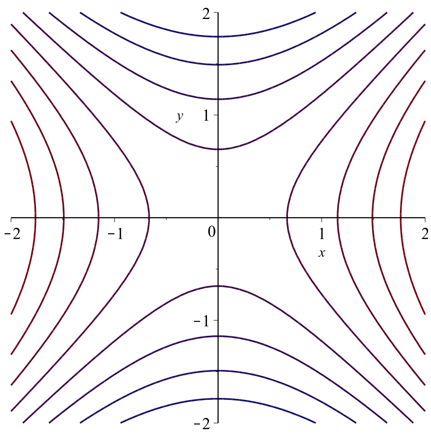
$$\begin{array}{rcl} z > 8 & : & \text{keine Lösung} \\ z = 8 \;=\; 8 - x^2 - y^2 & \to & x^2 + y^2 = 0 \\ z = 4 \;=\; 8 - x^2 - y^2 & \to & x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \;=\; 8 - x^2 - y^2 & \to & x^2 + y^2 = 8 \\ \dots & & \dots \end{array}$$



3. $z = f(x, y) = y^2 - x^2$

   Als Niveaulinien erhalten wir eine Familie von gleichseitigen Hyperbeln:

$$\begin{array}{rcl} z = 0 \;=\; y^2 - x^2 & \to & y^2 - x^2 = 0 \text{ oder } y = \pm x \\ z = -4 \;=\; y^2 - x^2 & \to & y^2 - x^2 = -4 \\ z = 4 \;=\; y^2 - x^2 & \to & y^2 - x^2 = 4 \\ \dots & & \dots \end{array}$$

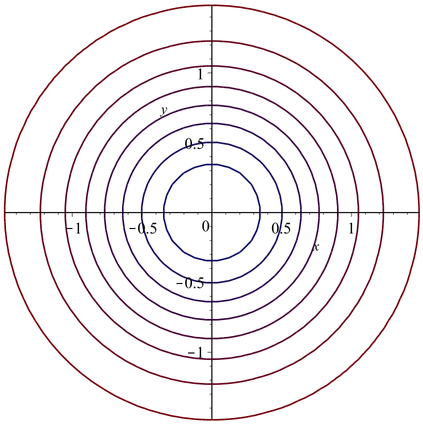


4. $z = f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$

   Für einen konstanten Wert $z = k$ gilt

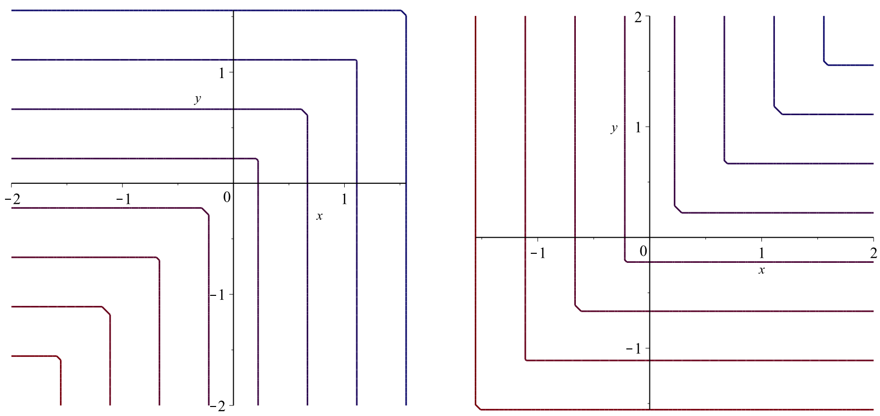
$$k \;=\; e^{-(x^2+y^2)} \qquad \text{oder} \qquad -\ln(k) \;=\; x^2+y^2$$

   und die Niveaulinien sind eine Familie konzentrischer Kreise.



5.

$$z \;=\; \max\{x,y\} \qquad \text{und} \qquad z \;=\; \min\{x,y\}$$



2 Partielle Ableitungen und partielle Elastizitäten

2.1 Partielle Ableitungen

Gegeben sei eine Funktion $z = f(x, y)$. Die partiellen Ableitungen von f sind definiert als

$$\begin{array}{lllll} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = f_x(x,y) & = & \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} & \text{partielle Ableitung nach } x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = f_y(x,y) & = & \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} & \text{partielle Ableitung nach } y \end{array}$$

Wir messen also hier die Veränderungsraten von f in Abhängigkeit von der Änderung einer der beiden Variablen, während man die andere Variable konstant hält. Für die Berechnung bedeutet das, dass wir so tun, als wäre die Funktion nur von der einen Variablen abhängig, nach der wir gerade ableiten. Die jeweils andere Variable wird wie eine Konstante behandelt.

Beispiel 2.1

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 + 3$$

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y + 0 + 0 = 2x + y \\ f_y(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial y} = 0 + x + 4y + 0 = x + 4y \end{aligned}$$

Beispiel 2.2

$$f(x,y) = x \cdot e^y$$

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x} = e^y \\ f_y(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot e^y \end{aligned}$$

Beispiel 2.3

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{x^2}{y}\right)$$

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2/y} \cdot \frac{1}{y} \cdot 2x = \frac{2}{x} \\ f_y(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2/y} \cdot x^2 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{y^2} = -\frac{1}{y} \end{aligned}$$

2.2 Partielle Elastizitäten

Definition 2.1 *Gegeben sei eine Funktion $z = f(x,y)$. Die partiellen Elastizitäten von f sind*

$$\boxed{\begin{aligned} \epsilon_{f,x} &= \epsilon_{f,x}(x,y) = \frac{f_x(x,y)\cdot x}{f(x,y)} && \textit{partielle Elastizität bezüglich } x \\ \epsilon_{f,y} &= \epsilon_{f,y}(x,y) = \frac{f_y(x,y)\cdot y}{f(x,y)} && \textit{partielle Elastizität bezüglich } y \end{aligned}}$$

Beispiel 2.4

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 + 3$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{f,x} &= \frac{f_x(x,y)\cdot x}{f(x,y)} = \frac{(2x+y)\cdot x}{x^2+xy+2y^2+3} \\ \epsilon_{f,y} &= \frac{f_y(x,y)\cdot y}{f(x,y)} = \frac{(x+4y)\cdot y}{x^2+xy+2y^2+3} \end{aligned}$$

Interpretation:

- Wir starten mit dem Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{\text{relative Funktionsänderung in } x\text{-Richtung}}{\text{relative } x\text{-Änderung}} &= \frac{\frac{\Delta f(x,y,\Delta x,0)}{f(x,y)}}{\frac{\Delta x}{x}} \\ &= \frac{\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{f(x,y)}}{\frac{\Delta x}{x}} \\ &= \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\cdot\frac{x}{f(x,y)}. \end{aligned}$$

  Natürlich ist die relative Funktionsänderung vom alten Punkt (x,y) **und** vom neuen Punkt $(x+\Delta x,y)$ abhängig. Wollte wir aber den Term auf der rechten Seite durch eine Funktion abschätzen, die **nur** vom Punkt (x,y) abhängt, könnten wir den Differenzenquotienten durch die partielle Ableitung ersetzen (falls Δx klein ist):

$$\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} \approx \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} = f_x(x,y)$$

  Man erhält somit insgesamt:

$$\frac{\frac{\Delta f(x,y,\Delta x,0)}{f(x,y)}}{\frac{\Delta x}{x}} \approx f_x(x,y)\cdot\frac{x}{f(x,y)}$$

und er Term auf der rechten Seite ist die oben definierte Elastizität und wir erhalten

$$\frac{\dfrac{\Delta f(x,y,\Delta x,0)}{f(x,y)}}{\dfrac{\Delta x}{x}} \approx \epsilon_{f,x}$$

Zusammenfassend kann man also sagen:

Die relative (prozentuale) Änderung von f beträgt etwa das $\epsilon_{f,x}$-fache der relativen (prozentualen) Änderung von x bei Konstanthaltung der Variablen y.

$$\frac{\Delta f(x,y,\Delta x,0)}{f(x,y)} \approx \epsilon_{f,x} \cdot \frac{\Delta x}{x}$$

- Die relative (prozentuale) Änderung von f beträgt etwa das $\epsilon_{f,y}$-fache der relativen (prozentualen) Änderung von y bei Konstanthaltung der Variablen x.

$$\frac{\Delta f(x,y,0,\Delta y)}{f(x,y)} \approx \epsilon_{f,y} \cdot \frac{\Delta y}{y}$$

Nachfrageelastizitäten Es seien die folgenden beiden Nachfragefunktionen gegeben:

- $q_1 = q_1(p_1, p_2)$ die Nachfrage nach Gut 1 als Funktion des Preises von Gut 1 und des Preises von Gut 2.
- $q_2 = q_2(p_1, p_2)$ die Nachfrage nach Gut 2 als Funktion des Preises von Gut 1 und des Preises von Gut 2.

Dann sind die folgenden vier Nachfrage-Elastizitäten gegeben:

$$\begin{array}{lllll}
\epsilon_{1,1} & = \epsilon_{q_1,p_1} & = & \dfrac{p_1}{q_1} \cdot \dfrac{\partial q_1}{\partial p_1} & \text{Nachfragelastizität von } q_1 \text{ bezüglich } p_1 \\[2ex]
\epsilon_{2,2} & = \epsilon_{q_2,p_2} & = & \dfrac{p_2}{q_2} \cdot \dfrac{\partial q_2}{\partial p_2} & \text{Nachfragelastizität von } q_2 \text{ bezüglich } p_2 \\[2ex]
\epsilon_{1,2} & = \epsilon_{q_1,p_2} & = & \dfrac{p_2}{q_1} \cdot \dfrac{\partial q_1}{\partial p_2} & \text{Nachfragelastizität von } q_1 \text{ bezüglich } p_2 \\[2ex]
\epsilon_{2,1} & = \epsilon_{q_2,p_1} & = & \dfrac{p_1}{q_2} \cdot \dfrac{\partial q_2}{\partial p_1} & \text{Nachfragelastizität von } q_2 \text{ bezüglich } p_1
\end{array}$$

Interpretation

$\epsilon_{1,1}$ gibt annäherend die prozentuale Änderung der Nachfrage nach Gut 1 an, wenn der Preis p_1 von Gut 1 um 1% steigt.

$\epsilon_{1,2}$ gibt annäherend die prozentuale Änderung der Nachfrage nach Gut 1 an, wenn der Preis p_2 von Gut 2 um 1% steigt.

2.3 Höhere partielle Ableitungen

Partielle Ableitungen werden es uns erlauben, notwendige und hinreichende Kriterien für die Existenz von Extrema bei Funktionen zweier Variablen zu formulieren. Die

partiellen Ableitungen 2. Ordnung

sind definiert als

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Wir erwähnen noch das folgende Resultat:

Satz 1 *Sind die partiellen Ableitungen f_{xy} und f_{yx} stetige Funktionen, so gilt $f_{xy} = f_{yx}$.*

Beispiel 2.5

$$\begin{array}{rcllcl} f(x,y) & = & x^2 + xy + 2y^2 + 3 & & & \\ f_x(x,y) & = & 2x + y & \rightarrow f_{xy}(x,y) & = & 1 \\ f_y(x,y) & = & x + 4y & \rightarrow f_{yx}(x,y) & = & 1 \end{array}$$

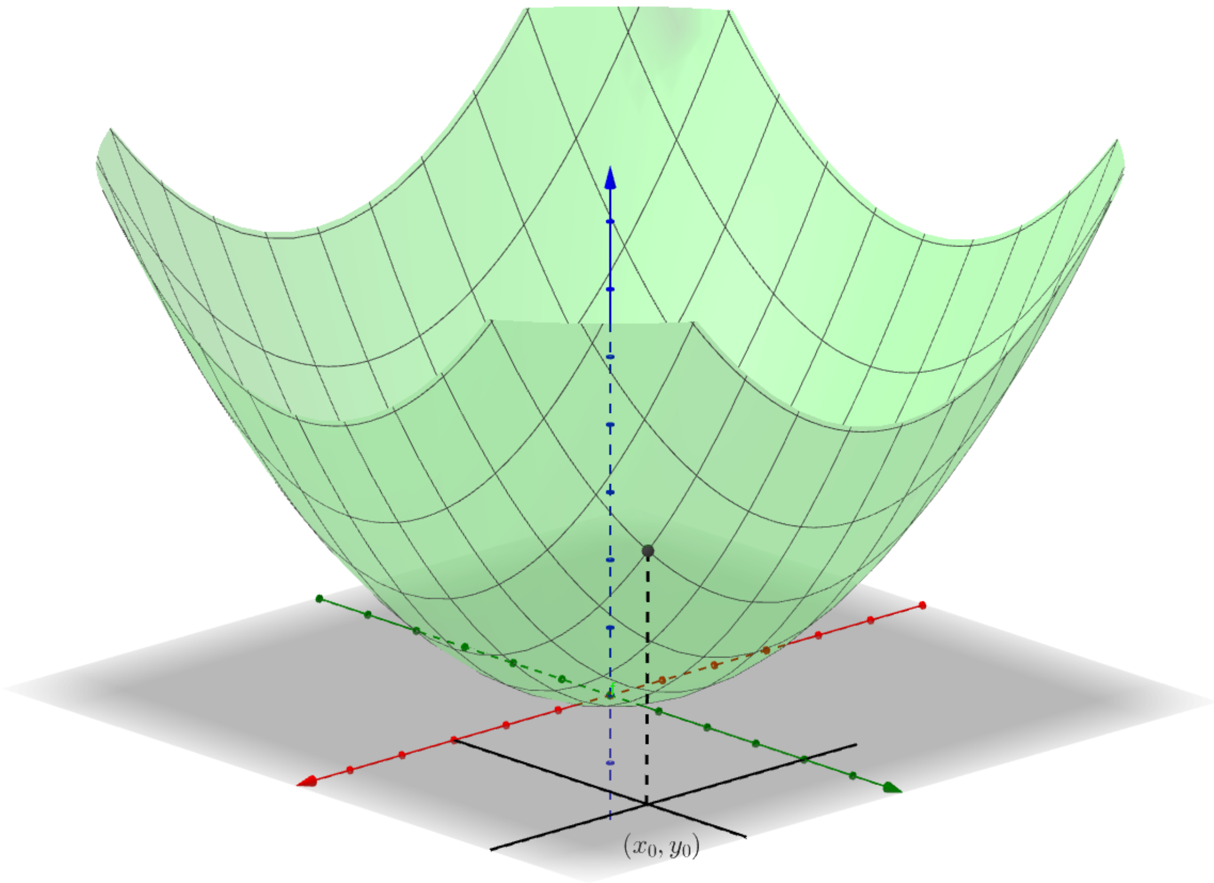
3 *Flächenkurven und partielle Ableitungen*

3.1 Flächenkurven

Sei $z = f(x, y)$ eine Funktion mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, $P_0 = (x_0, y_0, 0)$ ein Punkt im Definitionsbereich und $Q_0 = (x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$ ein Punkt auf dem Graphen von f.

Für ein besseres Verständnis des Graphen nahe bei Q_0 kann es sehr hilfreich sein, so genannte Flächenkurven (Kurven auf dem Graphen) durch den Punkt Q_0 zu untersuchen. Dazu schränken wir den 2-dimensionalen Definitionsbereich ein und betrachten die Funktion f (nur) auf speziellen 1-dimensionalen Teilmengen dieses Definitionsbereichs (die den Punkt (x_0, y_0) enthalten). Diese 1-dimensionalen Teilmengen werden in Zukunft stets Geraden oder Strecken sein.

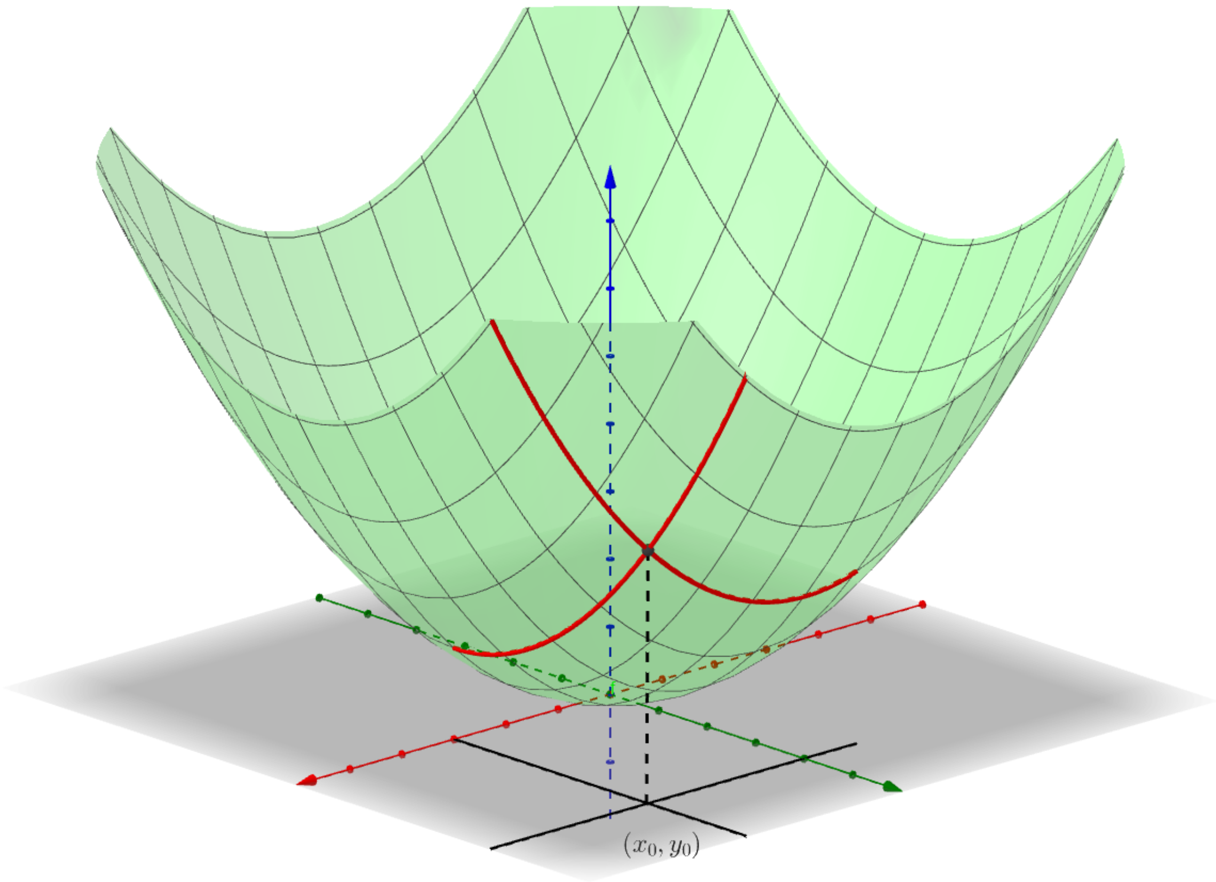
Wir starten zunächst mit den beiden zur x- Achse (hier gilt $y = y_0$) bzw. y-Achse (hier gilt $x = x_0$) parallelen Geraden durch den Punkt (x_0, y_0).



Der Graph von f genau über diesen Geraden (das sind Flächenkurven) kann dann durch die beiden Funktionsgleichungen

$$z = z(x) = f(x, y_0) \quad \text{bzw.} \quad z = z(y) = f(x_0, y)$$

beschrieben werden.



Um alle Geraden durch den Punkt $P_0 = (x_0, y_0, 0)$ beschreiben zu können, nutzen wir die allgemeine Parameterschreibweise. Sei dazu $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor und

$$K(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

die Gerade durch P_0 in Richtung $\mathbf{v}$. Dabei sollte sicherheitshalber $t \in (-a, a)$ (Intervall um 0) gelten, so dass das Geradensegment komplett im Definitionsbereich von f bleibt.

> Würden wir aus den beiden Gleichungen $x = x_0 + tx_1$ und $y = y_0 + ty_1$ den Parameter t eliminieren, erhielten wir die zugehörige Geradengleichung in Koordinatendarstellung:
>
> $$x_1 y - y_1 x = y_0 x_1 - x_0 y_1$$

und falls $x_1 \neq 0$:

$$y \;=\; \frac{y_1}{x_1}\,x + \frac{y_0x_1 - x_0y_1}{x_1}$$

bzw. falls $y_1 \neq 0$:

$$x \;=\; \frac{x_1}{y_1}\,y + \frac{-y_0x_1 + x_0y_1}{y_1}.$$

In dem wir jedem Punkt auf der Geraden noch den z-Wert $z = f(x,y)$ zuordnen, können wir die Gerade auf die Graphen von f hochheben:

$$(x,y) \in K \quad\longrightarrow\quad (x,y,f(x,y)) \in \mathit{Graph}(f).$$

Dadurch entsteht eine neue Kurve (im Raum), die auf dem Graphen von f genau **über oder unter** der Geraden K liegt und durch den Punkt Q_0 verläuft.

Definition 3.1 *Sei $z = f(x,y)$ eine Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{D}$, $Q_0 = (x_0, y_0, z_0 = f(x_0,y_0))$ ein Punkt auf dem Graphen von f und $t \in (-a,a)$. Die Kurve im Raum (auf dem Graphen von f)*

$$K_{f,Q_0,\mathbf{v}}(t) \;=\; \begin{pmatrix} x_0 + tx_1 \\ y_0 + ty_1 \\ f(x_0 + tx_1, y_0 + ty_1) \end{pmatrix}$$

heisst <u>Flächenkurve von f durch Q_0 in Richtung $\mathbf{v}$</u>.

Die Funktion $z(t) = z_{\mathbf{v}}(t) = f(x_0 + tx_1, y_0 + ty_1)$ heisst <u>Einschränkung von f auf die Gerade K</u>.

Schränken wir uns auf den Punkt $(x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = f(x_0,y_0))$ ein, vereinfachen sich alle Formeln.

Beispiel 3.1 *Sei $f(x,y) = x^2 + y^2$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor. Dann ist die Einschränkung von f auf die Gerade $t\mathbf{v}$ gegeben durch*

$$z(t) \;=\; (tx_1)^2 + (ty_1)^2 \;=\; (x_1^2 + y_1^2)\,t^2.$$

Da $(x_1^2 + y_1^2) > 0$ gilt, sind das stets nach oben offene Parabeln.

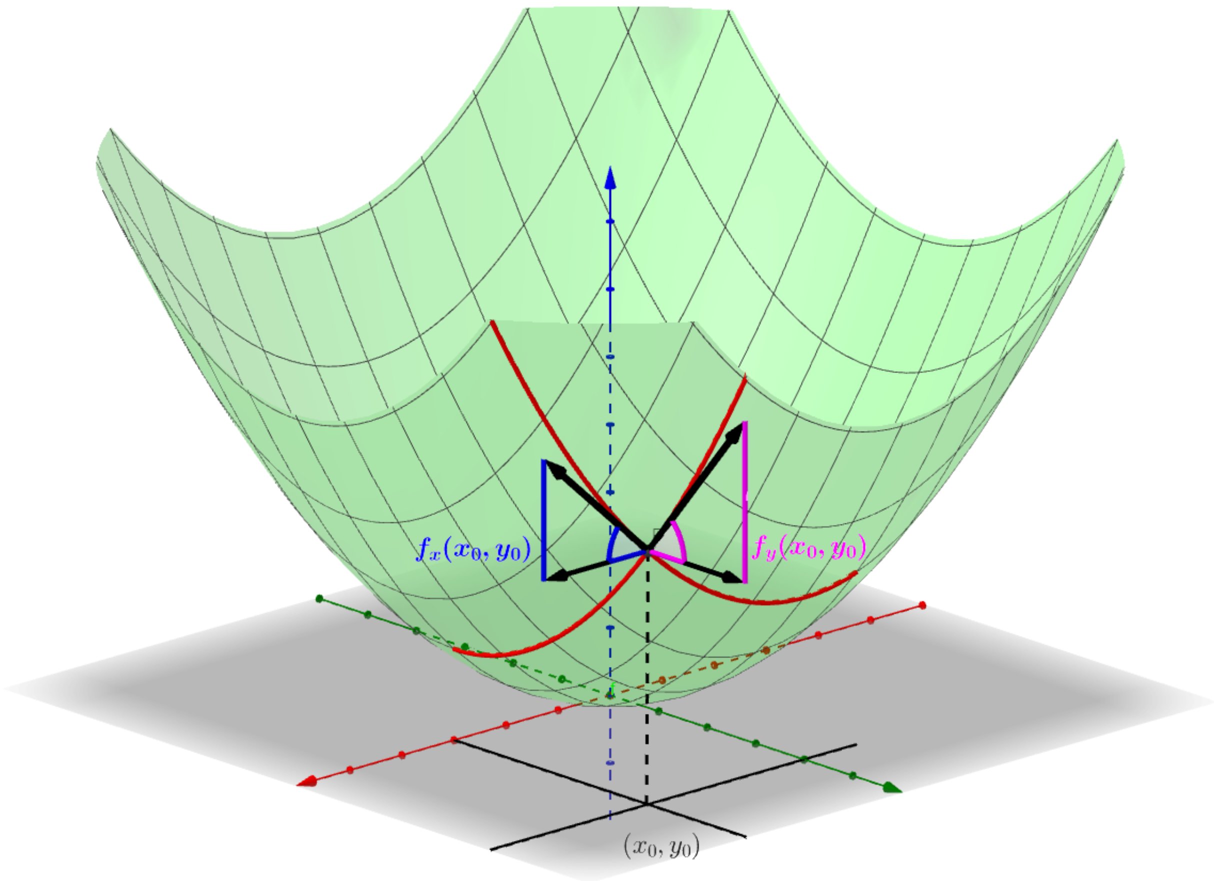
Beispiel 3.2 *Sei $f(x,y) = x^2 - y^2$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor. Dann ist die Einschränkung von f auf die Gerade $t\mathbf{v}$ gegeben durch*

$$z(t) \;=\; (tx_1)^2 - (ty_1)^2 \;=\; (x_1^2 - y_1^2)\,t^2.$$

Falls $(x_1^2 - y_1^2) > 0$ gilt, sind das nach oben offene Parabeln und falls $(x_1^2 - y_1^2) < 0$ gilt, sind das nach unten offene Parabeln.

3.2 Flächenkurven und partielle Ableitungen

- $f_x(x_0, y_0)$: Anstieg der Flächenkurve $K_{f,Q_0,\mathbf{e}_1}$ in $Q_0 = (x_0, y_0, z_0)$
- $f_y(x_0, y_0)$: Anstieg der Flächenkurve $K_{f,Q_0,\mathbf{e}_2}$ in $Q_0 = (x_0, y_0, z_0)$



Ausserdem gelten die folgenden wichtigen Zusammenhänge, die uns wichtige Anhaltspunkte für das Auffinden von lokalen Extremalstellen geben werden.

- $f_x(x_0, y_0) = 0$:
  $K_{f,Q_0,\mathbf{e}_1}$ hat in $Q_0 = (x_0, y_0, z_0)$ eine horizontale Tangente

- $f_y(x_0, y_0) = 0$:
  $K_{f,Q_0,\mathbf{e}_2}$ hat in $Q_0 = (x_0, y_0, z_0)$ eine horizontale Tangente

- $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \ (< 0)$:
  $K_{f,Q_0,\mathbf{e}_1}$ ist nahe bei $Q_0 = (x_0, y_0, z_0)$ konvex (konkav)

- $f_{yy}(x_0, y_0) > 0 \ (< 0)$:
  $K_{f,Q_0,\mathbf{e}_2}$ ist nahe bei $Q_0 = (x_0, y_0, z_0)$ konvex (konkav)

4 *Präferenzrelationen und Nutzenfunktionen*

4.1 (Präferenz)relationen

Sei M irgend eine Menge (in der Ökonomie ist meist $M = \mathbb{R}^2_{\geq 0}$ oder $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ und bedeutet die Menge aller möglichen Güterbündel von 2 bzw. n verschiedenen Gütern). Meist wird es einem (rationalen) Menschen leicht fallen, aus zwei verschiedenen Bündeln das für ihn Bessere auszuwählen, das Bündel, von dem er sich einen grösseren Nutzen verspricht. Mathematisch wird man das durch so genannte Relationen bzw. Präferenzrelationen modellieren.

Definition 4.1 *Eine (Präferenz)relation R auf M ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes $M \times M$, d.h. $R \subset M \times M$.*

Schreibweise: $a \succeq b$ falls $(a, b) \in R$

Wir werden das meistens als „a ist nicht schlechter als b" lesen.

Beispiel 4.1 *Sei M die Menge der folgenden Notenpaare (Prüfungsnote Mathe 1, Prüfungsnote Mathe 2):*

$$M = \{(6.0, 6.0), (3.6, 4.4), (4.4, 3.6)\}$$

Klar scheint zu sein, dass wir das Paar $(6.0, 6.0)$ nicht schlechter (oder sogar strikt besser) finden als die beiden anderen Notenpaare:

- $(6.0, 6.0) \succeq (3.6, 4.4)$ *oder* $(\ (6.0, 6.0), (3.6, 4.4)\ ) \in R$
- $(6.0, 6.0) \succeq (4.4, 3.6)$ *oder* $(\ (6.0, 6.0), (4.4, 3.6)\ ) \in R$

Es ist wohl auch nicht falsch zu sagen, dass

- $(6.0, 6.0) \succeq (6.0, 6.0)$ *oder* $(\ (6.0, 6.0), (6.0, 6.0)\ ) \in R$
- $(3.6, 4.4) \succeq (3.6, 4.4)$ *oder* $(\ (3.6, 4.4), (3.6, 4.4)\ ) \in R$
- $(4.4, 3.6) \succeq (4.4, 3.6)$ *oder* $(\ (4.4, 3.6), (4.4, 3.6)\ ) \in R$

Nicht ganz so einfach scheint das bei den beiden Paaren $(3.6, 4.4)$ und $(4.4, 3.6)$ zu sein.

- *1. Möglichkeit:*

  Wir könnten sagen, dass die beiden Notenpaare zwar nicht gleich sind, aber uns gleichviel bedeuten. Für die Relation würde das bedeuten, dass:

  $(3.6, 4.4) \succeq (4.4, 3.6)$ *und* $(4.4, 3.6) \succeq (3.6, 4.4)$ *oder aber*

  $(\ (3.6, 4.4), (4.4, 3.6)\ ), (\ (4.4, 3.6), (3.6, 4.4)\ ) \in R$

  Meist wird das kurz durch $(3.6, 4.4) \sim (4.4, 3.6)$ ausgedrückt. Diese neue Relation $\sim$ wird auch als Indifferenzrelation bezeichnet.

- *2. Möglichkeit:*
  Da das Fach Mathe 1 ausschlussrelevant ist, könnten wir doch
  $(4.4, 3.6) \succeq (3.6, 4.4)$ *oder* $(\,(4.4, 3.6), (3.6, 4.4)\,) \in R$ *setzen*

Als Teilmengen von $M \times M$ könnten wir uns sie Relationen wie folgt vorstellen:

- *1. Möglichkeit:*

$\succeq$	$(6.0, 6.0)$	$(4.4, 3.6)$	$(3.6, 4.4)$
$(6.0, 6.0)$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
$(4.4, 3.6)$		$\surd$	$\surd$
$(3.6, 4.4)$		$\surd$	$\surd$

- *2. Möglichkeit:*

$\succeq$	$(6.0, 6.0)$	$(4.4, 3.6)$	$(3.6, 4.4)$
$(6.0, 6.0)$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
$(4.4, 3.6)$		$\surd$	$\surd$
$(3.6, 4.4)$			$\surd$

Interessant sind die folgenden beiden Familien von Mengen.

Definition 4.2 *Sei $a \in M$. Dann heisst die Menge*

$$O(a) \;=\; \{b \in M \mid b \succeq a\}$$

die <u>obere Konturmenge zu a</u> (oder ,,nicht schlechter als a“-Menge) und die Menge

$$U(a) \;=\; \{b \in M \mid a \succeq b\}$$

die <u>untere Konturmenge zu a</u> (oder ,,nicht besser als a“-Menge).

Offensichtlich ist $O(a)$ die Menge aller Bündel, die ein Konsument freiwillig gegen a eintauschen würde. Diese Konturmengen können (nicht müssen) verschiedene Eigenschaften haben. Uns wird hier nur die Eigenschaft der Abgeschlossenheit interessieren. Dabei heisst einen Menge <u>abgeschlossen</u>, wenn sie alle ihre Randpunkt enthält.

Wir wollen noch einige wichtige Eigenschaften vorstellen, die (Präferenz)relationen haben könnten.

Definition 4.3 *Eine (Präferenz)relation $\succeq$ auf M heisst*

1. *<u>vollständig</u>, wenn für alle $a, b \in M$ gilt: $a \succeq b$ oder $b \succeq a$;*
2. *<u>transitiv</u>, wenn für alle $a, b, c \in M$ gilt: Falls $a \succeq b$ und $b \succeq c$ gilt; so gilt auch $a \succeq c$;*
3. *<u>rational</u>, wenn sie vollständig und transitiv ist und*
4. *<u>stetig</u>, wenn alle oberen und unteren Konturmengen abgeschlossen sind.*

Seien $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in M$ und $a \neq b$. Eine rationale (Präferenz)relation auf M heisst <u>monoton</u>, wenn aus $a_1 \geq b_1, \ldots, a_n \geq b_n$ (oder kurz $a \geq b$) stets auch $a \succeq b$ folgt. (,,Mehr ist immer besser“)

4.2 Nutzenfunktionen

Die Idee einer Präferenzrelation ist leicht verständlich. Leider kann man aber mit Relationen schlecht rechnen. Daher würde man Funktionen vorziehen, die bestimmte Relationen beschreiben. Solche Funktionen werden als Nutzenfunktionen bezeichnet und sind ein fundamentales Konzept der ökonomischen Theorie.

Definition 4.4 *Eine Nutzenfunktion u ordnet jedem Güterbündel $a \in M$ eine reelle Zahl $u(a)$ zu, die der Nutzenbewertung des Bündels a.*

Eine Nutzenfunktion u heisst Darstellung der Präferenzrelation $\succeq$, falls für alle Bündel $a, b \in M$ gilt:

$$a \succeq b \quad \Leftrightarrow \quad u(a) \geq u(b).$$

Natürlich stellt sich hier sofort die Frage, ob man **jede** Präferenzrelation durch eine zumindestens stetige Nutzenfunktion beschreiben kann. Das ist (wenig überraschend) nicht der Fall. Aber es gilt der folgende Satz.

Satz 2 *Sei M eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $\succeq$ sei eine rationale und stetige Präferenzrelation. Dann kann $\succeq$ durch eine stetige Nutzenfunktion repräsentiert werden.*

5 Testfragen zur Vorlesung

Hinweis: Bevor Sie die Übungsaufgaben lösen, sollten Sie den Stoff der Vorlesung verstanden haben. Insbesondere sollten Sie die folgenden einfachen Fragen beantworten können. Diese Fragen werden im Allgemeinen nicht in den Übungen besprochen, können aber prüfungsrelevant sein.

1. Sei $q_1 = f(p_1, p_2)$ eine Nachfragefunktion für die beiden konkurrierenden Güter P-Cola und C-Cola (q_1 Nachfrage nach P-Cola, p_1 Preis von P-Cola, p_2 Preis von C-Cola). Welche Eigenschaft(en) sollte f haben? Geben Sie zwei mögliche Modelle für f an, die diese Eigenschaft(en) haben.

2. Sei $q_1 = f(p_1, p_2)$ eine Nachfragefunktion für die beiden komplementären Güter Kaffee und Kaffeemaschinen (q_1 Nachfrage nach Kaffee, p_1 Preis von Kaffee, p_2 (Durchschnitts)Preis einer Kaffeemaschine). Welche Eigenschaft(en) sollte f haben? Geben Sie zwei mögliche Modelle für f an, die diese Eigenschaft(en) haben.

3. Was muss man sich unter dem Graph einer Funktion $z = f(x, y)$ vorstellen? Wie kann man den Graph der Funktion $z = f(x, y) = x + y$ konstruieren?

4. Sei $z = f(x, y)$ eine Funktion. Was versteht man unter dem direkten Bild, dem Schrägbild und den Niveaulinien der Funktion?

5. Beschreiben (benennen) Sie alle Terme in den beiden Relationen

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f(x, y, \Delta x, 0)}{f(x, y)} &\approx \epsilon_{f,x} \cdot \frac{\Delta x}{x} \\ \frac{\Delta f(x, y, 0, \Delta y)}{f(x, y)} &\approx \epsilon_{f,y} \cdot \frac{\Delta y}{y} \end{aligned}$$

   und beschreiben Sie (kurz) in Worten die Aussage dieser Relationen.

6 Übungsaufgaben

6.1 Niveau 1

1. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

   (a) $f(x,y) = \cos(x^2 + xy + y^2) - y$

   (b) $P(K,L) = K^{0.4} \cdot L^{0.6}$ $\quad K > 0,\ L > 0$

2. Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der folgenden Funktionen:

   (a) $f(x,y) = x \cdot \ln(y^2 + 1)$

   (b) $P(K,L) = K^{0.3} \cdot L^{0.4}$ $\quad K > 0,\ L > 0.$

6.2 Niveau 2

1. Es seien die folgenden beiden Nachfragefunktionen gegeben:

   - $q_1 = q_1(p_1, p_2) = 3 \cdot \frac{p_2}{p_1}$ die Nachfrage nach Gut 1 als Funktion des Preises p_1 von Gut 1 und des Preises p_2 von Gut 2.
   - $q_2 = q_2(p_1, p_2) = 15 + p_1 - 2p_2$ die Nachfrage nach Gut 2 als Funktion des Preises p_1 von Gut 1 und des Preises p_2 von Gut 2.

   Berechnen Sie die partiellen Elastizitäten beider Funktionen (bzgl. beider Variablen) und deuten Sie die Ergebnisse ökonomisch.

2. Bestimmen Sie die Niveaulinien $f(x,y) = c$, $c = 0, 1, 2, 3, \ldots$ für die folgenden Funktionen:

   (a) $f_1(x,y) = y^2 - x$

   (b) $f_2(x,y) = |y|$

   (c) $f_3(x,y) = p_1 x + p_2 y$ $\quad p_1 > 0,\ p_2 > 0$

   (d) $f_4(x,y) = x^{0.5} y^{0.5}$ $\quad x \geq 0,\ y \geq 0$

   (e) $f_5(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$

6.3 Niveau 3

1. Welche Eigenschaft haben alle Punkte $P = (x,y)$ auf einem Kreis vom Radius r um den Nullpunkt $(0,0)$? (Hinweis: Kreisgleichung)

2. Bestimmen Sie einige Niveaulinien der Funktionen

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= e^{x^2+y^2} + 3 \cdot (x^2 + y^2) \\
g(x,y) &= \sin(x^2 + y^2) - \cos(2x^2 + 2y^2) \\
h(x,y) &= \sin(-x^2 - y^2) - 3\cos(2x^2 + 2y^2)
\end{aligned}
$$

Lösungen der Übungsaufgaben

Niveau 1

1. *a)* $f_x = -(2x+y)\sin(x^2+xy+y^2)$ und $f_y = -(2y+x)\sin(x^2+xy+y^2) - 1$
   b) $P_K = 0.4\,K^{-0.6}\cdot L^{0.6}$ und $P_L = 0.6\,K^{0.4}\cdot L^{-0.4}$

2. *a)* $f_{xx} = 0 \qquad f_{yy} = \dfrac{2x-2xy^2}{(y^2+1)^2} \qquad f_{xy} = \dfrac{2y}{y^2+1}$
   b) $P_{KK} = -0.21\cdot K^{-1.7}\cdot L^{0.4} \qquad P_{LL} = -0.24\cdot K^{0.3}\cdot L^{-1.6}$
   $P_{KL} = 0.12\cdot K^{-0.7}\cdot L^{-0.6}$

Niveau 2

1. Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial p_1} &= -3\cdot\frac{p_2}{p_1^2} & \qquad \frac{\partial q_2}{\partial p_1} &= 1 \\ \frac{\partial q_1}{\partial p_2} &= 3\cdot\frac{1}{p_1} & \qquad \frac{\partial q_2}{\partial p_2} &= -2 \end{aligned}$$

   Partielle Elastizitäten:

$$\begin{aligned} \epsilon_{1,1} &= \frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{p_1^2}{3p_2}\cdot\left(-3\cdot\frac{p_2}{p_1^2}\right) = -1 \\ \epsilon_{1,2} &= \frac{p_2}{q_1}\cdot\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = \frac{p_1p_2}{3p_2}\cdot\left(3\cdot\frac{1}{p_1}\right) = 1 \\ \epsilon_{2,1} &= \frac{p_1}{q_2}\cdot\frac{\partial q_2}{\partial p_1} = \frac{1\cdot p_1}{15+p_1-2p_2} \\ \epsilon_{2,2} &= \frac{p_2}{q_2}\cdot\frac{\partial q_2}{\partial p_2} = \frac{(-2)\cdot p_2}{15+p_1-2p_2} \end{aligned}$$

2. *a)* $x = y^2 - c$ Parabeln nach rechts geöffnet,
   b) $y = c$ und $y = -c$ Paare von horizontalen Geraden,
   c) $y = c/p_2 - (p_1/p_2)x$ fallende Geraden
   d) Für $c > 0 : y = c^2/x$ Hyperbeln und für $c = 0 : x = 0$ oder $y = 0$
   e) Für $c \geq 2 : x^2 + y^2 = c^2 - 1$ Kreise

Niveau 3

1. -
2. $x^2 + y^2 = k$, Kreise mit Zentrum $(0,0)$