Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

Mathematik 1

Dr. Thomas Zehrt

Funktionen in zwei oder mehreren Veränderlichen II

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Approximation und Differenzierbarkeit

1.1 Die Tangentialebene einer Fläche

Sei $z = f(x, y)$ eine Funktion. Wir wollen eine Funktion

$$T(x, y) = ax + by + c$$

bestimmen, die die Funktion f in der Nähe eines Punktes $P_0 = (x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$ möglichst gut approximiert.

Die freien Parameter a, b, c sollen so bestimmt werden, dass der Graph von T den Graphen von f im Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ **berührt**, d.h. wir verlangen:

Gemeinsamer Punkt	$z_0 = f(x_0, y_0) = ax_0 + by_0 + c$
Gleiche Steigung in x-Richtung	$f_x(x_0, y_0) = T_x(x_0, y_0) = a$
Gleiche Steigung in y-Richtung	$f_y(x_0, y_0) = T_y(x_0, y_0) = b$

Definition 1.1
Durch Kombination der Bedingungen erhält man die Gleichung der <u>*Tangentialebene*</u> $T(x, y)$ *an* $z = f(x, y)$ *im Punkt* (x_0, y_0)*:*

$$\boxed{z = T(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{= dx} + f_y(x_0, y_0) \cdot \underbrace{(y - y_0)}_{= dy}}$$

Beweis:

$$T(x, y) = \underbrace{a}_{=f_x(x_0,y_0)} x + \underbrace{b}_{=f_y(x_0,y_0)} y + \underbrace{c}_{=f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)\,x_0-f_y(x_0,y_0)\,y_0}$$

□

Da lineare (eigentlich sollte man besser ,,affine" sagen) Funktionen sehr einfach zu handhaben sind, werden komplizierte Funktionen oft in der Nähe eines für uns interessanten Punktes linearisiert (d.h. hier durch die Tangentialebene ersetzt). Dieses Vorgehen ist die direkte Verallgemeinerung der Situation für Funktionen in einer Veränderlichen. Hier hatten wir die komplizierte Funktion in der Nähe eines Punktes durch die Tangente ersetzt.

Zum Vergleich: Die Tangente an den Graphen von $y = f(x)$ im Punkt x_0 hat die Gleichung

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Differenzierbare Funktionen sind nun Funktionen, die man sehr gut durch lineare Funktionen (lokal) approximieren kann.

Definition 1.2 *Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen. Die Funktion $z = f(x, y)$ heisst im Punkt $(x_0, y_0) \in D$ (total) differenzierbar oder linear approximierbar, wenn der Fehler*

$$\begin{aligned} R(x, y, x_0, y_0) &:= f(x, y) - T(x, y) \\ &= f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) - f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \end{aligned}$$

der bei der Approximation von f durch T entsteht, **sehr schnell** *gegen 0 konvergiert, falls (x, y) gegen (x_0, y_0) läuft, d.h.*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R(x, y, x_0, y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Wir verlangen bei einer differenzierbaren Funktion also nicht nur, dass $R(x, y, x_0, y_0)$ gegen 0 konvergiert, was offensichtlich notwendig für eine gute Approximation sein sollte. Wir verlange auch, dass der Fehler schneller gegen 0 konvergiert als der Abstand zwischen (x, y) und (x_0, y_0).

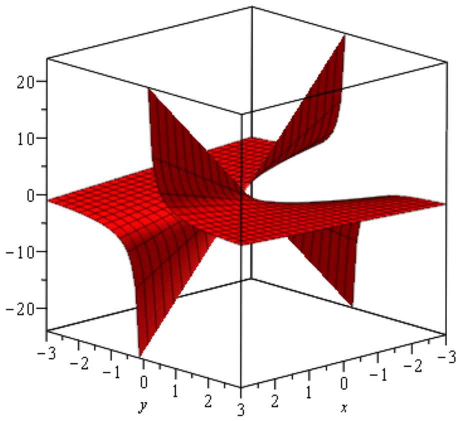
Beispiel 1.1 *Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangentialebene an die Fläche* $z = f(x, y) = \dfrac{x}{y}$ *im Punkt* $(1, 1)$.

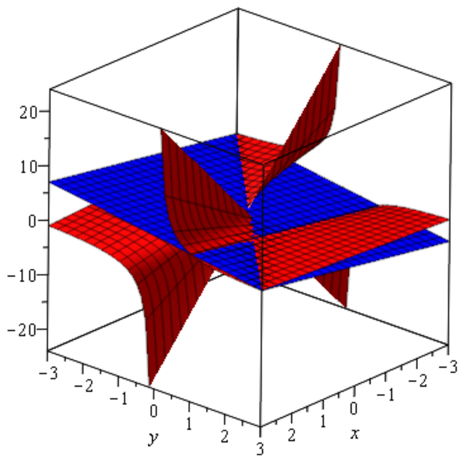
Lösung:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{y} & f_x(1,1) &= 1 = a \\ f_y &= -\frac{x}{y^2} & f_y(1,1) &= -1 = b \end{aligned}$$

Tangentialebene

$$\begin{aligned} T(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \\ &= 1 + 1\cdot(x-1) + (-1)\cdot(y-1) \\ &= 1 + x - y \end{aligned}$$





1.2 *Verallgemeinerung auf n Variablen*

Das Konzept der Tangentialebene lässt sich direkt auf Funktionen n Variablen verallgemeinern. Schreiben wir $y = f(x_1, \ldots, x_n) = f(\mathbf{x})$ und $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ als Aufpunkt, so ist die so genannte Tangentialhyperebene von f in $\mathbf{a}$ definiert durch:

$$\boxed{T(\mathbf{x}) \; = \; T(x_1, \ldots, x_n) \; = \; f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{a}) \cdot (x_i - a_i)}$$

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Funktion $y = f(\mathbf{x})$ heisst im Punkt $\mathbf{a} \in D$ (total) differenzierbar oder linear approximierbar, wenn für den Approximationsfehler $R(\mathbf{x}, \mathbf{a}) := f(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})$ folgendes gilt:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \frac{R(\mathbf{x}, \mathbf{a})}{||\mathbf{x} - \mathbf{a}||} \; = \; 0.$$

2 Das totale Differential

2.1 Das totale Differential in 2 Variablen

Es sei $z = f(x, y)$ eine Funktion. Wir suchen eine Approximation für die Änderung Δf von f, wenn sich x_0 um die kleine Grösse $\Delta x = dx$ und y_0 um die kleine Grösse $\Delta y = dy$ ändert. Dazu ersetzen wir die Funktion f durch die Tangentialebene im Punkt (x_0, y_0) und berechnen die Änderung dieser linearen Funktion. Wie im eindimesionalen Fall wollen wir die Änderung durch $df = df(x_0, y_0, dx, dy)$ bezeichnen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\Delta f(x_0, y_0, dx, dy) &= f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0) \\
&\approx df(x_0, y_0, dx, dy) \\
&= T(x_0 + dx, y_0 + dy) - T(x_0, y_0) \\
&= f_x(x_0, y_0) \cdot dx + f_y(x_0, y_0) \cdot dy.
\end{aligned}$$

Man erkennt, dass $df = df(x_0, y_0, dx, dy)$ eine Funktion der 4 Variablen x_0, y_0, dx und dy ist. Trotzdem verwendet man meist nur die kurze Schreibweise df.

exakt	$df(x_0, y_0, dx, dy) = f_x(x_0, y_0) \cdot dx + f_y(x_0, y_0) \cdot dy$
kurz	$df = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy$

Beispiel 2.1 *Wir betrachten die Produktionsfunktionen*

$$P(K, A) = 800 \cdot K^{0.25} \cdot A^{0.75}.$$

Das totale Differential an der Stelle (K_0, A_0) ist dann

$$\begin{aligned}
dP(K_0, A_0, dK, dA) &= P_K(K_0, A_0) \cdot dK + P_A(K_0, A_0) \cdot dA \\
&= 800 \cdot 0.25 \cdot K_0^{-0.75} \cdot A_0^{0.75} \cdot dK + 800 \cdot 0.75 \cdot K_0^{0.25} \cdot A_0^{-0.25} \cdot dA \\
&= 200 \cdot K_0^{-0.75} \cdot A_0^{0.75} \cdot dK + 600 \cdot K_0^{0.25} \cdot A_0^{-0.25} \cdot dA
\end{aligned}$$

Ergänzen Sie die folgende Tabelle für $(K_0, A_0) = (1, 2)$:

dK	dA	$dP(1, 2, dK, dA)$	$P(1 + dK, 2 + dA) - P(1, 2)$
1	1		
0.1	0.1		
-0.1	0.1		
0.1	-0.1		

Beispiel 2.2 *Die Nachfrage eines Haushaltes nach Kaffee erfüllt die Beziehung*

$$q \;=\; q(p_1, p_2) \;=\; 10\frac{p_2}{p_1}$$

- p_1*: Preis von 1kg Kaffee*
- p_2*: Preis von 1kg Tee*
- q *: Menge in kg*

Wie ändert sich die Nachfrage, wenn der Kaffeepreis von Fr. 16.- auf Fr. 16.40 steigt und der Teepreis von Fr. 12.- auf Fr. 11.50 fällt?

Lösungsskizze:

Aktuelle Situation	*neue Situation*
$p_1 = 16$	$p_1 + dp_1 \;=\; 16 + 0.4 \;=\; 16.4$
$p_2 = 12$	$p_2 + dp_2 \;=\; 12 - 0.5 \;=\; 11.5$

Echte Nachfrageänderung:

$$\Delta q \;=\; q(16.4, 11.5) - q(16, 12) \;=\; 10 \cdot \frac{11.5}{16.4} - 10 \cdot \frac{12}{16} \;\approx\; \underline{-0.487}$$

Partielle Ableitungen von q

$$\begin{aligned} q_{p_1} &= -10 \cdot \frac{p_2}{p_1^2} &\quad\rightarrow\quad q_{p_1}(16, 12) &= -0.46875 \\ q_{p_2} &= 10 \cdot \frac{1}{p_1} &\quad\rightarrow\quad q_{p_2}(16, 12) &= 0.625 \end{aligned}$$

Approximative Nachfrageänderung:

$$\begin{aligned} dq &= q_{p_1}(16, 12) \cdot dp_1 + q_{p_2}(16, 12) \cdot dp_2 \\ &= \quad -0.46875 \cdot 0.4 + \qquad 0.625 \cdot (-0.5) \;=\; \underline{-0.5} \end{aligned}$$

Die Nachfrage nach Kaffee sinkt also um etwa 0.5 *kg.*

2.2 *Verallgemeinerung auf n Variablen*

Das Konzept des totalen Differentials lässt sich direkt auf Funktionen in beliebig vielen Veränderlichen verallgemeinern. Schreiben wir $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ so gilt

$$\begin{aligned} df(\mathbf{a}, d\mathbf{x}) &= T(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) - T(\mathbf{a}) \\ &= f_{x_1}(\mathbf{a}) \cdot dx_1 + f_{x_2}(\mathbf{a}) \cdot dx_2 + \ldots + f_{x_n}(\mathbf{a}) \cdot dx_n. \end{aligned}$$

3 Die verallgemeinerte Kettenregel

3.1 Die Kettenregel für Funktionen in 2 Variablen

Es sei $z = f(x, y)$ eine Funktion und es gelte $x = x(t)$ und $y = y(t)$. Man bezeichnet das als Parametrisierung von x und y (nach dem Parameter t). Wir betrachten nun die zusammengesetzte Funktion (Komposition)

$$z(t) \;=\; f(x(t), y(t)).$$

Satz 1 *Falls alle vorkommenden Funktionen differenzierbar sind gilt für die Ableitung von $z(t)$ nach t:*

$$\boxed{z'(t) \;=\; \frac{dz(t)}{dt} \;=\; f_x(x,y)\frac{dx}{dt} + f_y(x,y)\frac{dy}{dt} \;=\; f_x(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t),y(t)) \cdot y'(t)}$$

Beweisidee:
Wir nutzen die Definition der Ableitung und die Eigenschaften der linearen Approximation der Funktion f:

$$\begin{aligned}
z'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\ [\, f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)) - f(x(t), y(t)) \,] \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\ [\, T(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)) - T(x(t), y(t)) \,] \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\ [\, f_x(x(t), y(t)) \cdot (x(t+\Delta t) - x(t)) + f_y(x(t), y(t)) \cdot (y(t+\Delta t) - y(t)) \,] \\
&= f_x(x(t), y(t)) \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} + f_y(x(t), y(t)) \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 3.1 *Wir betrachten die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion*

$$Q = f(K, A) \quad = \quad K^\alpha A^\beta.$$

Nehmen wir an, dass wir beide Variablen Kapital und Arbeit als Funktionen der Zeit darstellen können:

$$K = K(t) = e^{st} \quad \text{und} \quad A = A(t) = e^{rt}.$$

Wir wollen die Ableitung von Q zum einen auf direktem Weg und zum anderen unter Ausnutzung der Formel im Satz berechnen.

1. *Dann gilt zunächst nach direkter Rechnung*

$$\begin{aligned} Q(t) = K(t)^\alpha A(t)^\beta &= (e^{st})^\alpha (e^{rt})^\beta = e^{\alpha st} e^{\beta rt} = e^{(\alpha s + \beta r)t} \\ \frac{dQ}{dt} &= e^{(\alpha s+\beta r)t}(\alpha s + \beta r) = K^\alpha A^\beta(\alpha s + \beta r). \end{aligned}$$

2. *Mit Hilfe des Satzes gilt zunächst:*

$$\begin{array}{ll} K'(t) = se^{st} = sK & f_K(K, A) = \alpha K^{\alpha-1} A^\beta \\ A'(t) = re^{rt} = rA & f_A(K, A) = \beta K^\alpha A^{\beta-1} \end{array}$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= f_K K'(t) + f_A A'(t) \\ &= \alpha K^{\alpha-1} A^\beta sK + \beta K^\alpha A^{\beta-1} rA \\ &= K^\alpha A^\beta(\alpha s + \beta r). \end{aligned}$$

3.2 *Verallgemeinerung auf n Variablen*

Schreiben wir wieder $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\mathbf{x})$. Ausserdem sei jede Variable $x_i = x_i(t)$ eine (differenzierbare) Funktion in t, so dass

$$y(t) \quad = \quad f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$$

selbst eine Funktion der Variablen t ist. Dann gilt

$$y'(t) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}(t)) \cdot x_i'(t).$$

4 Kurven in $\mathbb{R}^2$

4.1 Die drei Arten eine Kurve zu beschreiben

Kurven in Parameterdarstellung

Grob gesprochen ist eine Kurve eine eindimensionale Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. Etwas genauer sollte man eine Kurve (in Parameterdartsellung) als das Bild einer mindestens stetigen Abbildung $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ betrachten.

Definition 4.1 *Seien $x = x(t)$ und $y = y(t)$ (mindestens) stetige Funktionen für $t_1 \leq t \leq t_2$. Dann durchläuft der sich mit t stetig ändernde Punkt*

$$\mathbf{K}(t) \;=\; \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

eine (ebene) Kurve. Man bezeichnet diese Darstellung als Parameterdarstellung dieser Kurve, t als Parameter und $[t_1, t_2]$ den Parameterintervall.

Kurven in impliziter Darstellung

Definition 4.2 *Sei $z = \phi(x, y)$ eine (mindestens) stetige Funktion. Dann ist durch*

$$\mathbf{K} \;=\; \left\{ \, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(x, y) = 0 \, \right\}$$

eine Kurve in impliziter Darstellung gegeben.

Kurven als Graph einer Funktion $y = f(x)$

Sei $y = f(x)$ eine Funktion mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$. Dann ist der Graph

$$\mathbf{K} \;=\; Graph(f) \;=\; \left\{ \, (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D \, \right\}$$

offensichtlich eine Kurve. Der Graph einer Funktion $y = f(x)$ kann natürlich leicht in der impliziten Form durch $\phi(x, y) = y - f(x) = 0$ geschrieben werden. Umgekehrt ist es allerdings nur selten möglich eine Gleichung $\phi(x, y) = 0$ nach y aufzulösen!

Beispiel 4.1

implizit		*explizit*
$\phi(x, y) = x^2 + y = 0$	$\leftrightarrow$	$y = -x^2$
$\phi(x, y) = x^6 \ln x - y = 0$	$\leftrightarrow$	$y = x^6 \ln x$
$\phi(x, y) = \sin(x) + \ln(y) - xy = 0$	$\rightarrow$	?

4.2 Wichtige Kurven

Geraden

Geraden in impliziter Darstellung

$$\mathbf{K} \;=\; \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c \;=\; 0 \,\}$$

Geraden in Parameterdarstellung

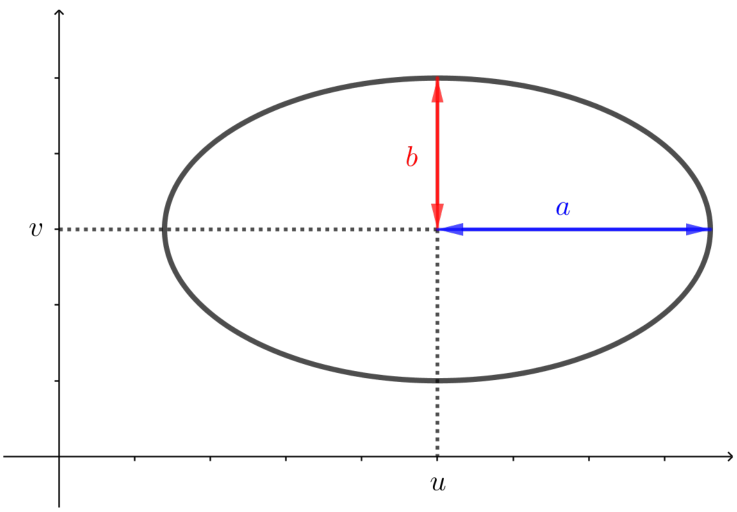
$$\mathbf{K}(t) \;=\; \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Geraden als Funktionsgraph

$$\mathbf{K} \;=\; Graph(f) \;=\; \{\, (x, mx+n) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \,\}$$

Ellipsen

Geometrisch ist die Ellipse die Menge aller Punkte, für die die Summe der Abstände von zwei festen Punkten (den Brennpunkten, in der Skizze nicht zu sehn) konstant ist.



Ellipsen in impliziter Darstellung Ellipse mit dem Mittelpunkt (u,v) und den Halbachsen a und b

$$\phi(x,y) \;=\; \frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} - 1 = 0$$

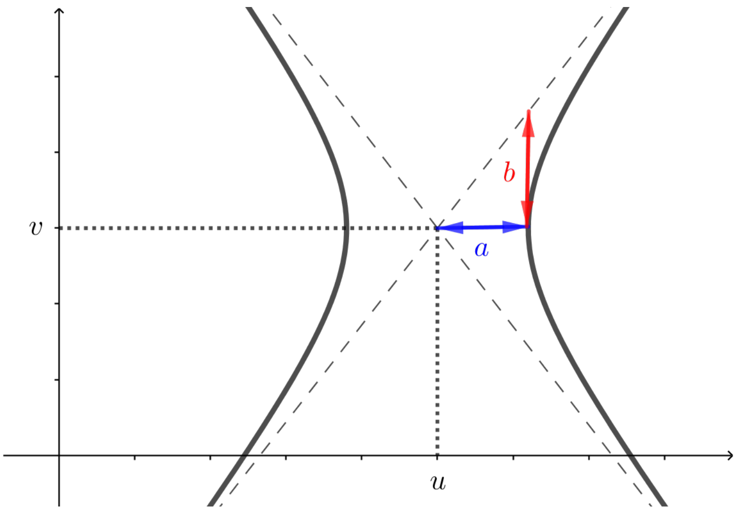
Spezialfälle:

- Kreis mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius r ($a = b = r$ und $u = v = 0$):
$$\phi(x,y) \;=\; x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$
- Kreis mit dem Mittelpunkt (u,v) und dem Radius r ($a = b = r$):
$$\phi(x,y) \;=\; (x-u)^2 + (y-v)^2 - r^2 = 0.$$

Ellipsen in Parameterdarstellung

$$\mathbf{K}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cdot \cos t \\ b \cdot \sin t \end{pmatrix}$$

Hyperbeln



Geometrisch ist die Hyperbel die Menge aller Punkte, für die die Differenz der Abstände von zwei festen Punkten (den Brennpunkten) konstant ist.

Hyperbeln in impliziter Darstellung Hyperbel mit dem Zentrum (u, v) und den Achsen a und b

$$\phi(x,y) = \frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} - 1 = 0$$

Spezialfall: Gleichseitige Hyperbel mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ ($a = b = 1$ und $u = v = 0$):

$$\phi(x,y) = x^2 - y^2 - 1 = 0.$$

Parabeln

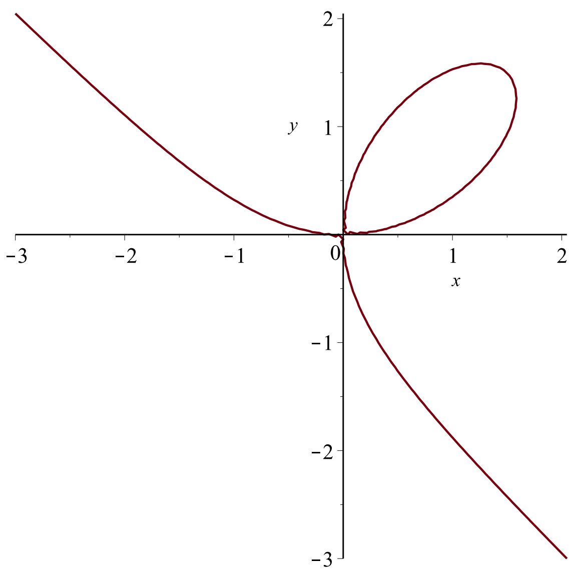
Parabeln in impliziter Darstellung Parabel mit dem Zentrum (u, v) und dem Parameter a

$$\phi(x,y) = a(x-u)^2 - (y-v) = 0$$

Parabeln in Parameterdarstellung

$$\mathbf{K}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ a(t-u)^2 + v \end{pmatrix}$$

Cartesisches Blatt



Cartesisches Blatt in impliziter Darstellung

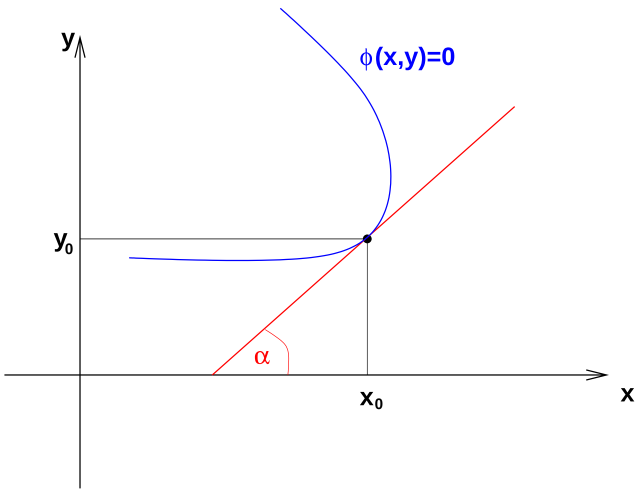
$$\phi(x,y) \quad = \quad x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

Cartesisches Blatt in Parameterdarstellung

$$\mathbf{K}(t) \;=\; \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{1+t^3} \begin{pmatrix} 3t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

5 Implizite Differentiation

Problem:
Wir suchen die Steigung der Tangente an die Kurve $\phi(x, y) = 0$ in einem Punkt (x_0, y_0). Häufig ist es nicht (oder nicht eindeutig) möglich, die Gleichung $\phi(x, y) = 0$ nach y aufzulösen und die Tangentensteigung durch die 1. Ableitung zu bestimmen.



Beispiele:

1. Die Gleichung $\phi(x, y) = x^2 + y - 1 = 0$ kann eindeutig und problemlos nach y aufgelöst werden. Es gilt $y = 1 - x^2$ und $y' = -2x$. Der Punkt $(1, 0)$ liegt sicher auf der Kurve, denn es gilt $\phi(1, 0) = 1^2 + 0 - 1 = 0$. Die Tangente an diese Kurve im Punkt $(1, 0)$ hat den Anstieg $y'(1) = -2 \cdot 1 = -2$.

2. Die Gleichung $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ kann nicht eindeutig nach y aufgelöst werden. Wir haben zwei Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} y &= +\sqrt{4 - x^2} \\ y &= -\sqrt{4 - x^2} \end{aligned}$$

   aber durch die passende Wahl der Funktion kann man hier praktisch die 1. Ableitung bestimmen und die Tangentensteigung berechnen.

   Der Punkt $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ liegt sicher auf der durch ϕ beschriebenen Kurve, denn es gilt $\phi(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2 + 2 - 4 = 0$. Ausserdem erfüllt der Punkt (nur) die erste der beiden Auflösungsgleichungen $\sqrt{2} = +\sqrt{4 - (\sqrt{2})^2}$. Für die Funktion $y = +\sqrt{4 - x^2} = (4 - x^2)^{1/2}$ gilt $y' = -x(4 - x^2)^{-1/2}$ und somit folgt für den Tangentenanstieg in $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ durch direktes Einsetzen: $y'(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}(4 - (\sqrt{2})^2)^{-1/2} = -\sqrt{2}/\sqrt{2} = -1$.

3. Versuchen Sie die Gleichung des Cartesischen Blattes nach y aufzulösen. Unmöglich!?

Die implizite Differentiation bietet hier einen Ausweg. Gilt in einem Punkt (x_0, y_0) der Kurve $\phi_y(x_0, y_0) \neq 0$, so kann y **lokal** als Funktion von x dargestellt werden, also $y = y(x)$ und $\phi(x, y(x)) = 0$.

Bemerkung: Aussagen dieser Art kommen in der Mathematik häufiger vor. Man kann zwar die Existenz einer solchen lokalen Funktion beweisen (und das ist meist völlig ausreichend), aber man kann diese Funktion $y = y(x)$ (meist) nicht explizit aufschreiben (d.h. als Kombination unserer ,,elementaren" Funktionen). Dann gilt

1. Ableiten der Gleichung $\phi(x, y(x)) = \phi(x, y) = 0$ nach x mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dx}\,\phi(x,y) &= \phi_x(x,y)\cdot\frac{d}{dx}x + \phi_y(x,y)\cdot\frac{d}{dx}y \\ &= \phi_x(x,y)\cdot 1 + \phi_y(x,y)\cdot y'(x) \end{aligned}$$

2. Umstellen nach $y' = y'(x)$:

$$\boxed{y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\phi_x(x,y)}{\phi_y(x,y)}.}$$

Beispiel 5.1 *Gesucht ist die Tangentensteigung des Cartesischen Blattes*

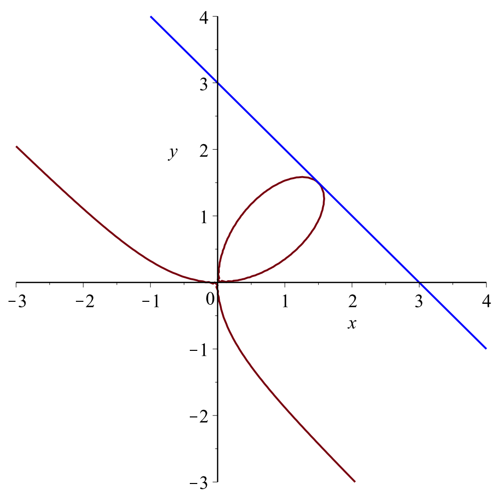
$$\phi(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

im Punkt $(1.5, 1.5)$. *Prüfen Sie, dass* $\phi(1.5, 1.5) = 0$ *gilt, d.h. dass dieser Punkt auf der Kurve liegt! Dann folgt:*

$$\begin{aligned} \phi_x(x,y) &= 3x^2 - 3y \qquad & \phi_x(1.5,1.5) &= 2.25 \\ \phi_y(x,y) &= 3y^2 - 3x \qquad & \phi_y(1.5,1.5) &= 2.25 \end{aligned}$$

und somit ist der Tangentenanstieg im gegebenen Punkt:

$$\tan(\alpha) = -\frac{\phi_x(1.5,1.5)}{\phi_y(1.5,1.5)} = -1$$



Satz 2 *Gegeben sei eine Funktion* $z = f(x, y)$ *und ein Punkt* (x_0, y_0) *im Definitionsbereich. Dann ist die Steigung der Tangente an die Niveaulinie durch den Punkt* (x_0, y_0) *gleich*

$$\boxed{-\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}.}$$

Beweis: Die Niveaulinie durch den Punkt (x_0, y_0) kann mittels der Funktion

$$\phi(x, y) \;=\; f(x, y) - z_0 \;=\; f(x, y) - f(x_0, y_0) \;=\; 0$$

beschrieben werden. Mittels impliziter Differentiation gilt dann für den Tangentenanstieg

$$\frac{dy}{dx} \;=\; -\frac{\phi_x}{\phi_y} \;=\; -\frac{\frac{\partial}{\partial x}(f - z_0)}{\frac{\partial}{\partial y}(f - z_0)} \;=\; -\frac{f_x}{f_y}.$$

□

Beispiel 5.2 *Sei* $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. *Wir wissen bereits, dass durch* $f(x, y) = 0$ *das Cartesische Blatt definiert ist (als Niveaulinie der Funktion* f *zum Niveau* 0*).*

Betrachten wir nun die Niveaulinie $f(x, y) = 13$. *Sicher liegt der Punkte* $(-1, 2)$ *auf dieser Niveaulinie. Somit gilt*

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3x^2 - 3y \qquad & f_x(-1, 2) &= -3 \\ f_y(x, y) &= 3y^2 - 3x \qquad & f_y(-1, 2) &= 15 \end{aligned}$$

und der Anstieg der Tangente an die Niveaulinie $f(x, y) = 13$ *im gegebenen Punkt ist:*

$$\tan(\alpha) \;=\; -\frac{f_x(-1, 2)}{f_y(-1, 2)} \;=\; \frac{1}{5}$$

6 Testfragen zur Vorlesung

Hinweis: Bevor Sie die Übungsaufgaben lösen, sollten Sie den Stoff der Vorlesung verstanden haben. Insbesondere sollten Sie die folgenden einfachen Fragen beantworten können. Diese Fragen werden im Allgemeinen nicht in den Übungen besprochen, können aber prüfungsrelevant sein.

1. Sei $z = f(x, y)$ eine differenzierbare Funktion. Erklären Sie kurz in Worten den Unterschied zwischen df und Δf.

2. Sei $z = f(x, y)$ eine differenzierbare Funktion und (x_0, y_0) ein Punkt im Definitionsbereich von f. Wie ist die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ definiert?

3. Sei $z = f(x, y) = 2x - 3y + 2$ eine (lineare) Funktion. Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangentialebenen an den Graphen von f in jedem der folgenden Punkte: $(1, 2, f(1, 2))$, $(3, 7, f(3, 7))$, $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, f(\sqrt{2}, \sqrt{3}))$ und allgemein: $(a, b, f(a, b))$.

4. Erläutern Sie (kurz) in Worten die Bedeutung der folenden Ausdrücke: Δx, Δy, dx, dy, $\Delta f(x, y)$, $df(x, y)$, $\frac{\Delta x}{x}$, $\frac{\Delta y}{y}$, $\frac{\Delta f(x,y)}{f(x,y)}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

5. Skizzieren Sie die folgenden implizit gegebenen Kurven (falls sie existieren). Beschriften Sie in der Skizze stets den Mittelpunkt und die Halbachsen.

$$
\begin{aligned}
+\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{4} + 1 &= 0 \\
+\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{4} - 1 &= 0 \\
+\frac{(x-2)^2}{2} - \frac{(y-1)^2}{4} + 1 &= 0 \\
+\frac{(x-2)^2}{2} - \frac{(y-1)^2}{4} - 1 &= 0 \\
-\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{4} + 1 &= 0 \\
-\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{4} - 1 &= 0 \\
-\frac{(x-2)^2}{2} - \frac{(y-1)^2}{4} + 1 &= 0 \\
+\frac{(x-2)^2}{2} - \frac{(y-1)^2}{4} - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{4} - \frac{1}{2} &= 0 \\
\frac{(x-2)^2}{2} - \frac{(y-1)^2}{4} - \frac{1}{2} &= 0
\end{aligned}
$$

7 Übungsaufgaben

7.1 Niveau 1

1. Berechnen Sie die Tangentialebene im Punkt $(1, 2)$ der Funktionen

$$\begin{aligned} z = f(x,y) &= x + y + \frac{8}{xy}, \quad x > 0,\ y > 0 \\ z = f(x,y) &= e^{xy}. \end{aligned}$$

2. Berechnen Sie das totale Differential folgender Funktionen:
   (a) $f(x,y) = 3x^4 - 7xy + x$
   (b) $f(x,y,z) = \ln(xyz), \quad x > 0, y > 0, z > 0$
   (c) $P(K,L) = 150 \cdot K^{0.3} \cdot L^{0.7}, \quad K > 0, L > 0$
   (d) $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

7.2 Niveau 2

1. Gegeben ist die Gewinnfunktion $G(K,L) = P(K,L) - rK - wL$, wobei $P(K,L) = 200K^{0.5}L^{0.3}$, $r = 40$ und $w = 30$.
   (a) Berechnen Sie das totale Differential an der Stelle $(K_0, L_0) = (1, 1)$. Wie lässt sich die Formel ökonomisch interpretieren?
   (b) Vergleichen Sie für $(dK, dL) = (0.05, -0.05)$ den Näherungswert dG mit dem exakten Wert ΔG.

2. Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = 3x^2 - 6xy + y^3 - 60x + 60y$.
   (a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $f_x(x,y)$ und $f_y(x,y)$.
   (b) Berechnen Sie im Punkt $(x_0, y_0) = (10, 10)$ die Tangentensteigung an der Niveaulinie $f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

7.3 Niveau 3

1. Gegeben sei die CES-Funktion $u(x,y) = (x^{0.5} + 3y^{0.5})^2$, $x > 0, y > 0$.
   (a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen u_x und u_y.
   (b) Durch $u(x,y) = 16$ ist eine Indifferenzkurve (Niveaulinie) definiert. Ermitteln Sie die Tangentensteigung an dieser Niveaulinie im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

2. Gegeben sind die zwei Kurven mit den Gleichungen

$$x^2 - 2x - \frac{y^2}{c} = 0 \quad \text{und} \quad x^2 - 8x + y + 16 - v = 0.$$

   Man wähle c und v so, dass beide Kurven sich an der Stelle $x = 3$ berühren (Hinweis: Implizite Differentiation). Stellen Sie die Kurven graphisch dar.

Lösungen der Übungsaufgaben

Niveau 1

1. $z = -3x - y + 12$ und $z = e^2(2x + y - 3)$

2. (a) $df = [12x^3 - 7y + 1]dx - 7xdy$
   (b) $df = (1/x)dx + (1/y)dy + (1/z)dz$
   (c) $dP = 45 \cdot K^{-0.7}L^{0.7}dK + 105 \cdot K^{0.3}L^{-0.3}dL$
   (d) $df = 2e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}(x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3)$

Niveau 2

1. (a) Gewinnfunktion:

$$\begin{aligned} G(K,L) &= P(K,L) - rK - wL \\ &= 200\ K^{1/2} \cdot L^{3/10} - 40K - 30L \end{aligned}$$

Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} G_K(K,L) &= 100\ K^{-1/2} \cdot L^{3/10} - 40 \\ G_L(K,L) &= 60\ K^{1/2} \cdot L^{-7/10} - 30 \end{aligned}$$

Partielle Ableitungen in $(1,1)$:

$$\begin{aligned} G_K(1,1) &= 60 \\ G_L(1,1) &= 30 \end{aligned}$$

Differential in $(1,1)$:

$$\begin{aligned} dG\ =\ dG(1,1,dK,dL) &= G_K(1,1)\ dK + G_L(1,1)\ dL \\ &= 60\ dK + 30\ dL \end{aligned}$$

Ausgehend von der Wahl der Produktionsfaktoren als $(K_0 = 1, L_0 = 1)$ beschreibt die Formel einen einfachen approximativen Zusammenhang zwischen den Änderungen von Kapital und Arbeit einerseits und der zugehörigen Gewinnänderung andererseits. Erhöhen wir z.B. beide Inputs um 1, d.h. $dK = dL = 1$, so erhöht sich der Gewinn ungefähr um $dG\ =\ 60 \cdot 1 + 30 \cdot 1\ =\ 90$. erhöhen wir K um 1 und senken L um 1 (d.h. $dK = 1$ und $dL = -1$), so erhöht sich unser Gewinn ungefähr um $dG\ =\ 60 \cdot 1 + 30 \cdot (-1)\ =\ 30$.

Der Vorteil dieser Formel hier ist nicht ihre Präzision, sondern ihre einfache Berechenbarkeit bei festem Ausgangspunkt.

   (b) $dG(1,1,0.05,-0.05)\ =\ 60 \cdot 0.05 + 30\ (-0.05)\ =\ 1.5$ und
   $\Delta G(1,1,0.05,-0.05)\ =\ G(1+0.05, 1-0.05) - G(1,1)\ =\ 1.31$

2. (a) $f_x(x,y) = 6x - 6y - 60$ und $f_y(x,y) = -6x + 3y^2 + 60$
   (b) 0.2

Niveau 3

1. (a) $u_x = 1 + 3(y/x)^{0.5}$ und $u_y = 3(x/y)^{0.5} + 9$
   (b) $-1/3$

2. (a) Zunächst untersuchen wir beide Kurven (oder besser Kurvenscharen) und bestimmen mittels impliziter Differentiation allgemeine Formeln für den Tangentenanstieg in einem beliebigen Kurvenpunkt. Bei der letzten Umformung wird quadratisch ergänzt.

   - Kurve 1

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(x,y) \\ &= x^2 - 2x - \frac{1}{c}\,y^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 - 1 - \frac{1}{c}\,y^2 \\ &= \frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y-0)^2}{c} - 1 \end{aligned}$$

   Das ist eine Hyperbel mit dem Mittelpunkt $(1,0)$ und den Halbachsen 1 und $\sqrt{c}$ (vergl. Formelsammlung). Der Tangentenanstieg in einem beliebigen Kurvenpunkt berechnet sich mittels impliziter Differentiation.

$$A(x,y,c) \;:=\; -\frac{\phi_x(x,y)}{\phi_y(x,y)} = -\frac{2x-2}{-2y/c} = \frac{(x-1)c}{y}$$

   - Kurve 2

$$\begin{aligned} 0 &= \psi(x,y) \\ &= x^2 - 8x + y + 16 - v \\ &= (x-4)^2 + (y-v) \end{aligned}$$

   Das ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel $(4,v)$ (vergl. Formelsammlung). Der Tangentenanstieg in einem beliebigen Kurvenpunkt berechnet sich mittels impliziter Differentiation.

$$B(x,y,v) \;:=\; -\frac{\psi_x(x,y)}{\psi_y(x,y)} = -\frac{2x-8}{1} = 2(4-x)$$

   (b) Beide Kurven sollen sich für $x = 3$ berühren und die Koordinaten dieses Punktes (oder besser dieser Punkte) seien mit $(3,\overline{y})$ bezeichnet. Setzen wir diese Koordinaten in die beiden Kurven ein, erhalten wir die beiden folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 = \phi(3,\overline{y}) &= 9 - 6 - \frac{\overline{y}^2}{c} = 3 - \frac{\overline{y}^2}{c} \\ \text{oder} \quad \overline{y}^2 &= 3c \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; \psi(3,\overline{y}) \;&=\; 9 - 24 + \overline{y} + 16 - v \;=\; \overline{y} - v + 1 \\
\text{oder} \qquad & \boxed{\overline{y} \;=\; v - 1} \\
\text{oder} \qquad & \overline{y}^2 \;=\; (v-1)^2
\end{aligned}
$$

Sollen beide Kurven durch den Punkt $(3, \overline{y})$ gehen, so muss die folgende Gleichung gelten:

$$\boxed{3c \;=\; (v-1)^2}$$

(c) Sollen beide Kurven im Punkt $(3, \overline{y})$ den gleichen Tangentenanstieg haben, so muss $A(3, \overline{y}, c) \;=\; B(3, \overline{y}, v)$ gelten.

$$\frac{(3-1)c}{\overline{y}} \;=\; 2(4-3),$$

und diese Gleichung reduziert sich nach leichter Rechnung zu

$$\boxed{c \;=\; \overline{y}}$$

(d) Kombiniert man die drei eingerahmten Gleichungen erhält man die einzige Lösung $c = 3$ und $v = 4$.