Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

7

Mathematik 1

Dr. Thomas Zehrt

Produktionsfunktionen

Inhaltsverzeichnis

1 Homogene Funktionen

1.1 Definition und Beispiele

Definition 1.1 *Eine Funktion $z = f(x, y)$ heisst (positiv) homogen vom Grad g, falls für jeden Wert von $k > 0$ gilt*

$$\boxed{f(kx, ky) = k^g \, f(x, y).}$$

Eine Funktion $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ heisst homogen vom Grad g, falls für jeden Wert von $k > 0$ gilt

$$\boxed{f(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n) = k^g \, f(x_1, x_2, \ldots, x_n).}$$

Ist $g = 1$ so heisst f linear homogen.

Beispiel 1.1 *Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = \frac{x^2}{y} + 2y + 2x + \frac{y^2}{x}$. Dann gilt für $k > 0$ (ersetzen Sie dazu jedes x durch kx und jedes y durch ky):*

$$\begin{aligned}
f(kx, ky) &= \frac{(kx)^2}{ky} + 2(ky) + 2(kx) + \frac{(ky)^2}{kx} \\
&= \frac{k^2x^2}{ky} + 2ky + 2kx + \frac{k^2y^2}{kx} \\
&= \frac{kx^2}{y} + 2ky + 2kx + \frac{ky^2}{x} \\
&= k\left(\frac{x^2}{y} + 2y + 2x + \frac{y^2}{x}\right) \\
&= k^1 f(x, y)
\end{aligned}$$

Die Funktion f ist homogen vom Grad $g = 1$.

Aufgabe 1.1 *Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen homogen sind und bestimmen Sie gegebenenfalls den Homogenitätsgrad.*

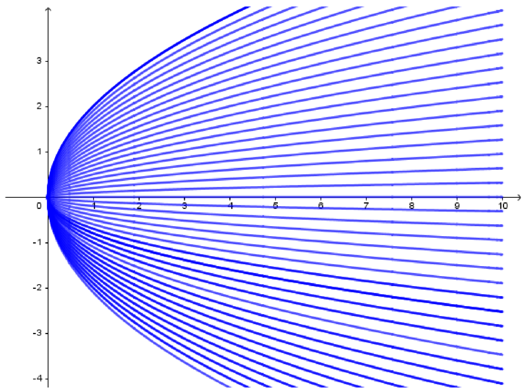
1. $f(x, y) = x^{0.3}y^{0.6}$
2. $f(x, y) = x^{0.3}y^{0.6} + y^{0.7} + x^{0.1}y^{0.8}$
3. $f(x, y) = x^{0.3}y^{0.6} + y^{0.9} + x^{0.1}y^{0.8}$
4. $f(x, y) = \frac{x^2}{y} + 2y + 2x + \frac{y^2}{x}$
5. $f(x, y) = x^3y^2 \cdot \ln\left(\frac{x^2 + xy + y^2}{xy}\right)$

Homogene Funktionen in einer Variablen Sei g eine reelle Zahl und $x > 0$. Dann gilt für eine homogene Funktion $y = f(x)$ vom Grad g (nach Definition) folgendes:

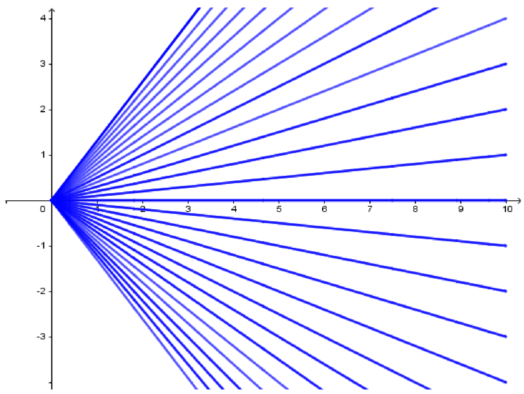
$$f(x) \;=\; f(x \cdot 1) \;=\; x^g \cdot f(1) \;=\; f(1) \cdot x^g.$$

f ist also (für $x > 0$) eine Potenzfunktion vom Grad g und durch nur **einen** Wert $f(1)$ eindeutig bestimmt.

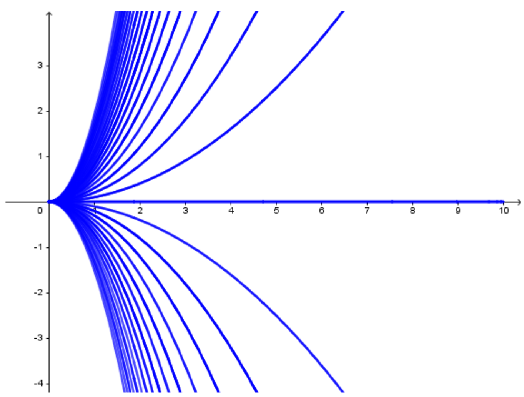
Beispiel 1.2 *Homogene Funktionen vom Grad $g = 1/2$: $f(x) = f(1) \cdot x^{1/2}$*



Beispiel 1.3 *Homogene Funktionen vom Grad $g = 1$: $f(x) = f(1) \cdot x$*



Beispiel 1.4 *Homogene Funktionen vom Grad $g = 2$: $f(x) = f(1) \cdot x^2$*



1.2 Besonderheiten homogener Funktionen

1.2.1 Einschränkung auf Strahlen

Wir betrachten eine homogene Funktion $f(x, y)$ vom Grad g nur auf einem Strahl

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } t \geq 0.$$

Dann gilt für jeden Punkt (x, y) bzw. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ auf diesem Strahl:

$$f(x, y) = f(tx_0, ty_0) = t^g \underbrace{f(x_0, y_0)}_{=:C} = C\, t^g$$

Eine homogene Funktion $f(x, y)$ vom Grad g verhält sich „über jedem Strahl“ wie eine Potenzfunktion $C\, t^g$.

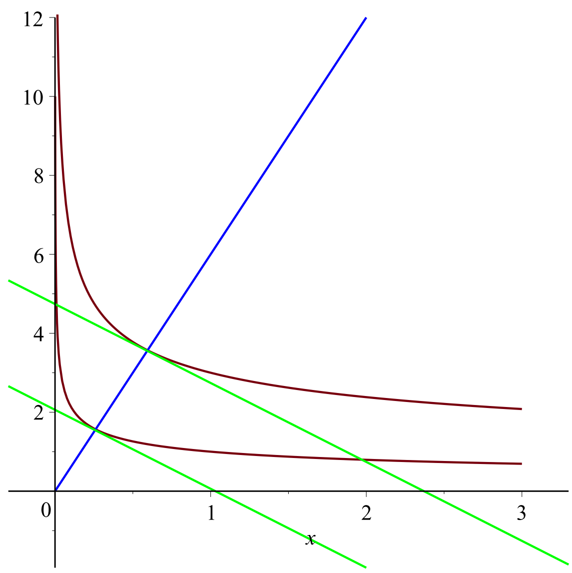
1.2.2 Parallele Tangenten

Satz 1 *Sei $z = f(x, y)$ eine stetig differenzierbare homogene Funktion vom Grad g auf dem 1. Quadranten ($x, y \geq 0$). Weiterhin seien (x_0, y_0) und $(x_1, y_1) = (k \cdot x_0, k \cdot y_0)$ zwei Punkte auf dem selben Strahl vom Nullpunkt aus.*

Dann sind die beiden Tangenten an die Niveaulinien

- *$f(x, y) = f(x_0, y_0)$ in (x_0, y_0) und*
- *$f(x, y) = f(x_1, y_1)$ in (x_1, y_1)*

parallel.



Beweis:

f_x und f_y sind homogen vom Grad $g-1$ und es folgt:

$$\frac{f_x(x_1,y_1)}{f_y(x_1,y_1)} = \frac{f_x(k\cdot x_0,k\cdot y_0)}{f_y(k\cdot x_0,k\cdot y_0)} = \frac{k^{g-1}\cdot f_x(x_0,y_0)}{k^{g-1}\cdot f_y(x_0,y_0)} = \frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}$$

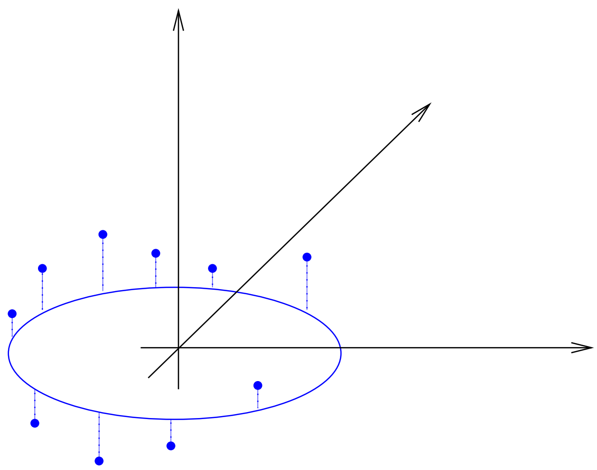
Die linke und die rechte Seite sind nun gerade, bis auf den Faktor -1, die Anstiege der beiden Tangenten (Satz über implizite Funktionen).

□

1.2.3 *Starrheit*

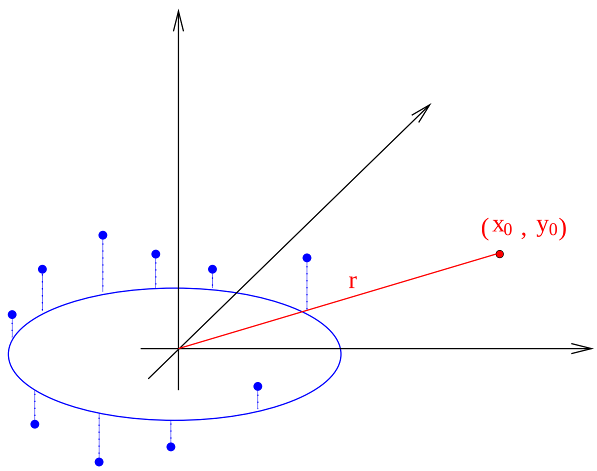
Eine homogene Funktion $z = f(x,y)$ vom Grad g ist alleine durch die Funktionswerte auf dem Einheitskreis $x^2+y^2=1$ eindeutig bestimmt!!

- Ausgangspunkt: Nehmen wir an, dass wir **nur** die Funktionswerte von f auf dem Kreis vom Radius 1 kennen (sonst nichts, weder weitere Funktionswerte noch die Funktionsgleichung von f!!).



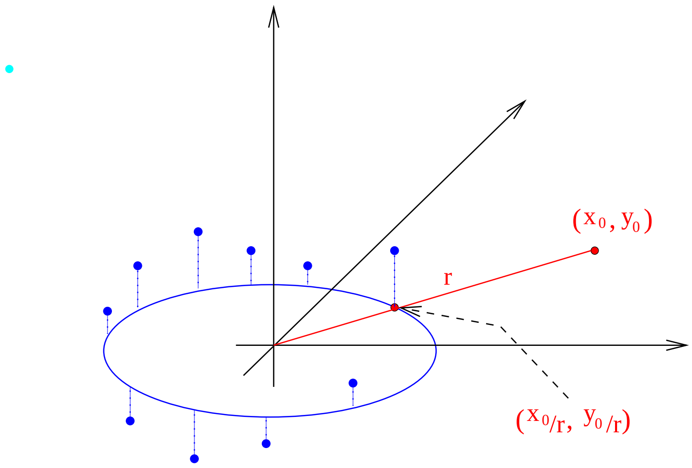
- Nun sei ein beliebiger Punkt (x_0,y_0) gegeben, der natürlich einen bestimmten Abstand r vom Nullpunkt hat:

$$r = \sqrt{x_0^2+y_0^2}$$



- Der neue Punkt $(x_0/r, y_0/r)$ liegt auf dem Einheitskreis und auf dem Strahl durch $(0,0)$ und (x_0, y_0).

$$(x_0/r)^2 + (y_0/r)^2 \;=\; 1$$



- Insbesondere kennen wir deshalb den Funktionswert $f(x_0/r, y_0/r)$! Damit können wir den gesuchten Funktionswert $f(x_0, y_0)$ direkt herleiten:

$$f(x_0, y_0) \;=\; f\left(r \cdot \frac{x_0}{r}, r \cdot \frac{y_0}{r}\right) \;=\; r^g \cdot f\left(\frac{x_0}{r}, \frac{y_0}{r}\right)$$

Sämtliche Terme auf der rechten Seite sind bekannt!

Beispiel 1.5 *Eine homogene Funktion $z = f(x,y)$ vom Grad g habe auf dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ die Werte $z = x + y$. Welchen Wert hat f an der Stelle $(3,4)$?*

Lösungsskizze:

1. $(3,4)$ *hat den Abstand* 5 *vom Nullpunkt, denn*

$$\sqrt{3^2 + 4^2} \;=\; \sqrt{9 + 16} \;=\; \sqrt{25} \;=\; 5.$$

2. $(3/5, 4/5)$ *hat den Abstand* 1 *vom Nullpunkt, liegt also auf dem Einheitskreis* $x^2 + y^2 = 1$, *denn*

$$\sqrt{(3/5)^2 + (4/5)^2} \;=\; \sqrt{9/25 + 16/25} \;=\; \sqrt{25/25} \;=\; 1.$$

3.

$$f(3,4) \;=\; f\left(5 \cdot \frac{3}{5}, 5 \cdot \frac{4}{5}\right) \;=\; 5^g \cdot f\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \;=\; 5^g \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) \;=\; 5^g \cdot \frac{7}{5}$$

4.
   - $g = 1 \;\rightarrow\; f(3,4) \;=\; 5^1 \cdot \dfrac{7}{5}$
   - $g = 2 \;\rightarrow\; f(3,4) \;=\; 5^2 \cdot \dfrac{7}{5}$
   - $g = 3 \;\rightarrow\; f(3,4) \;=\; 5^3 \cdot \dfrac{7}{5}$

1.2.4 Die Eulersche Relation

Satz 2 (Eulersche Relation) *Für jede homogene Funktion $z = f(x, y)$ vom Grad g gilt:*

$$\boxed{g \cdot f(x, y) = x \cdot f_x(x, y) + y \cdot f_y(x, y).}$$

Beweis:

Für $f(x, y)$ gilt für alle k die Gleichung $f(kx, ky) = k^g f(x, y)$. Diese Gleichung leiten wir nach k ab, dazu wenden wir auf der linken Seite die Kettenregel an:

$$f_x(kx, ky) \cdot x + f_y(kx, ky) \cdot y \quad = \quad g\, k^{g-1} f(x, y)$$

und diese Identität gilt für alle $k > 0$. Setzen wir nun speziell $k = 1$, so folgt der Satz.

□

Satz 3 *Für jede homogene Funktion $z = f(x, y)$ vom Grad g gilt:*

1. $f_x(x, y)$ *und* $f_y(x, y)$ *sind homogene Funktionen vom Grad* $g - 1$
2. *Für* $x, y > 0$ *ist* $f(x, y) \;=\; x^g\, f(1, y/x) \;=\; y^g\, f(x/y, 1)$
3. $x^2\, f_{xx}(x, y) + 2\, xy\, f_{xy}(x, y) + y^2\, f_{yy}(x, y) \;=\; g(g-1) f(x, y)$

Beweis:

1. Es gelte also $f(kx, ky) = k^g f(x, y)$. Leiten wir diese Gleichung nach x ab, erhalten wir mit der Kettenregel

$$f_x(kx, ky) \cdot k \quad = \quad k^g f_x(x, y)$$

und nach Division durch k folgt die Behauptung.

2. Die zweite Eigenschaft kann einfach und direkt allgemein bewiesen werden. Falls $x > 0$ ist folgt:

$$f(x, y) \quad = \quad f\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) \quad = \quad x^g\, f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

3. Zunächst wendet man die Eulersche Relation auf die beiden homogenen Funktionen (vom Grad $g - 1$) f_x und f_y an und setzt dann diese beiden Relationen in die Eulersche Relation für f ein.

□

Beispiel 1.6 *Wir überprüfen die Eigenschaften aus den beiden obigen Sätzen für die homogene Funktion* $f(x,y) = x^2y^3$ *vom Grad* 5.

Zunächst sind die beiden partiellen Ableitungen 1. Ordnung homogene Funktionen vom Grad 4:

$$f_x(x,y) \;=\; 2xy^3 \qquad \text{und} \qquad f_y(x,y) \;=\; 3x^2y^2.$$

Die partiellen Ableitungen 2. Ordnung sind homogene Funktionen vom Grad 3:

$$f_{xx}(x,y) \;=\; 2y^3 \qquad f_{yx}(x,y) \;=\; 6xy^2 \qquad \text{und} \qquad f_{yy}(x,y) \;=\; 6x^2y.$$

Eulersche Relation:

$$5 \cdot x^2y^3 \;=\; x \cdot 2xy^3 + y \cdot 3x^2y^2$$

Eigenschaft 2:

$$x^2y^3 \;=\; x^5\, 1^2 \cdot (y/x)^3 \;=\; y^5\, (x/y)^2 \cdot 1^3$$

Eigenschaft 3:

$$x^2 \cdot 2y^3 + 2xy \cdot 6xy^2 + y^2 \cdot 6x^2y \;=\; 5 \cdot 4 \cdot x^2y^3$$

2 Produktionsfunktionen

2.1 Definition und Beispiele

Definition 2.1 *Produktionsfunktionen geben den Ertrag Q als Funktion der beiden Produktionsfaktoren Kapital K und Arbeit A an $Q = f(K, A)$.*

Häufig verwendete Produktionsfunktionen:

1. Cobb-Douglas-Produktionsfunktionen

$$Q = f(K, A) = c\, K^{\alpha} A^{\beta} \quad \text{mit } 0 < \alpha < 1 \text{ und } 0 < \beta < 1.$$

   - Spezialfall 1: $Q = f(K, A) = c \cdot K^{\alpha} A^{1-\alpha}$
   - Spezialfall 2: $Q = f(K, A) = c \cdot K^{0.25} A^{0.75}$ (Spezielle Cobb-Douglas-Funktion)

2. CES-Produktionsfunktionen

$$Q = f(K, A) = (aK^{\rho} + bA^{\rho})^{\frac{1}{\rho}} \quad \text{mit } a, b > 0,\ \rho < 1 \text{ und } \rho \neq 0.$$

   Das Kürzel CES bedeutet **C**onstant **E**lasticity of **S**ubstitution.

2.2 Partielle Ableitungen = Grenzerträge

Grenzertrag des Kapitals $= f_K = \dfrac{\partial f}{\partial K}$ Grenzertrag der Arbeit $= f_A = \dfrac{\partial f}{\partial A}$

Beispiel 2.1 *Sei $Q = f(K, A) = K^{1/4} \cdot A^{3/4}$ eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion. Dann gilt*

$$\begin{aligned} f_K &= \frac{1}{4} \cdot K^{-3/4} \cdot A^{3/4} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{A}{K}\right)^{3/4} \\ f_A &= \frac{3}{4} \cdot K^{1/4} \cdot A^{-1/4} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{K}{A}\right)^{1/4} \end{aligned}$$

Der Grenzertrag des Kapitals (der Arbeit) ist eine abnehmende Funktion von K (resp. A), d.h. eine Vergrösserung von K um eine Einheit bewirkt bei grossem K eine kleinere Zunahme des Ertrages als bei kleinem K.

2.3 Niveaulinien = Isoquanten

Definition 2.2 *Die Isoquanten einer Produktionsfunktion sind Kurven in der K-A-Ebene mit einer Gleichung der Gestalt* $f(K, A) = Q_0 =$ *konstant (Niveaulinien).*

Jede Kombination von Arbeit und Kapital auf einer festgelegten Isoquanten führt zur selben Produktionsquantität.

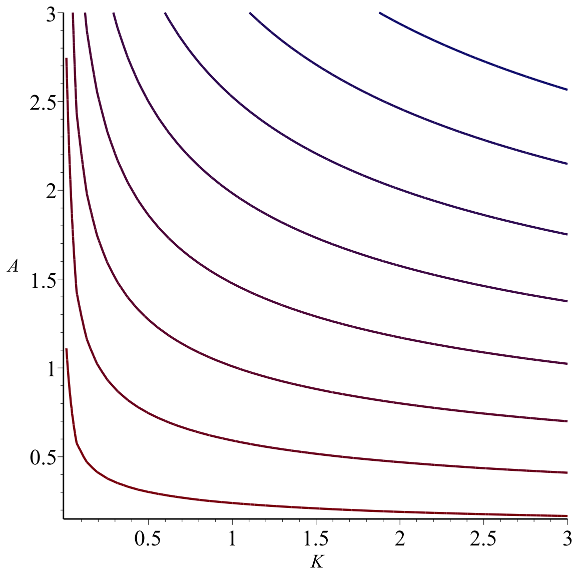
Beispiel 2.2 *Sei* $Q = K^{1/4} \cdot A^{3/4}$*. Dann ist die Isoquante für* $Q_0 = 1$*:*

$$1 \;=\; K^{1/4} \cdot A^{3/4} \quad \Leftrightarrow \quad A \;=\; K^{-1/3} \;=\; \frac{1}{\sqrt[3]{K}}$$

Jeder Punkt (d.h. jede Kombination von Kapital und Arbeit) auf dieser Isoquanten führt zur Produktionsmenge $Q = 1$*.*

K	A	$Q = K^{1/4} \cdot A^{3/4}$
1	$1 = \frac{1}{\sqrt[3]{1}}$	$1 = 1^{1/4} \cdot 1^{3/4}$
8	$\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}}$	$1 = 8^{1/4} \cdot (1/2)^{3/4}$
27	$\frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}}$	$1 = 27^{1/4} \cdot (1/3)^{3/4}$
$\frac{1}{512}$	$8 = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{512}}}$	$1 = (\frac{1}{512})^{1/4} \cdot 8^{3/4}$

In der folgenden graphischen Darstellung sind einige Graphen dieser Familie von Funktionen eingezeichnet (für verschiedene Werte von Q_0*).*



Die Isoquanten einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

Sei $Q = f(K, A) = c\ K^{\alpha}A^{\beta}$ eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion und wir setzen $c\ K^{\alpha}A^{\beta} = Q_0$. Diese Gleichung kann nach der Variablen A aufgelöst werden. Wir können also die Isoquanten als reelle Funktionen $A = A(K)$ darstellen und mit den bekannten Methoden die Monotonie und Krümmung untersuchen. Man erhält:

$$A(K) = \underbrace{\left(\frac{Q_0}{c}\right)^{\frac{1}{\beta}}}_{=k} K^{-\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$\frac{dA(K)}{dK} = -\frac{\alpha}{\beta}\, k\ K^{-\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)} < 0, \qquad A(K) \text{ monoton fallend}$$

$$\frac{d^2A(K)}{dK^2} = \left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)\frac{\alpha}{\beta}\, k\ K^{-\left(\frac{\alpha}{\beta}+2\right)} > 0, \qquad A(K) \text{ konvex}$$

2.4 Substitutionsrate = Tangentensteigung an Niveaulinie

Definition 2.3 *Die Substitutionsrate einer Produktionsfunktion* $Q = f(K, A)$ *ist definiert als* $\frac{dA}{dK}$ *und bekanntlich gilt*

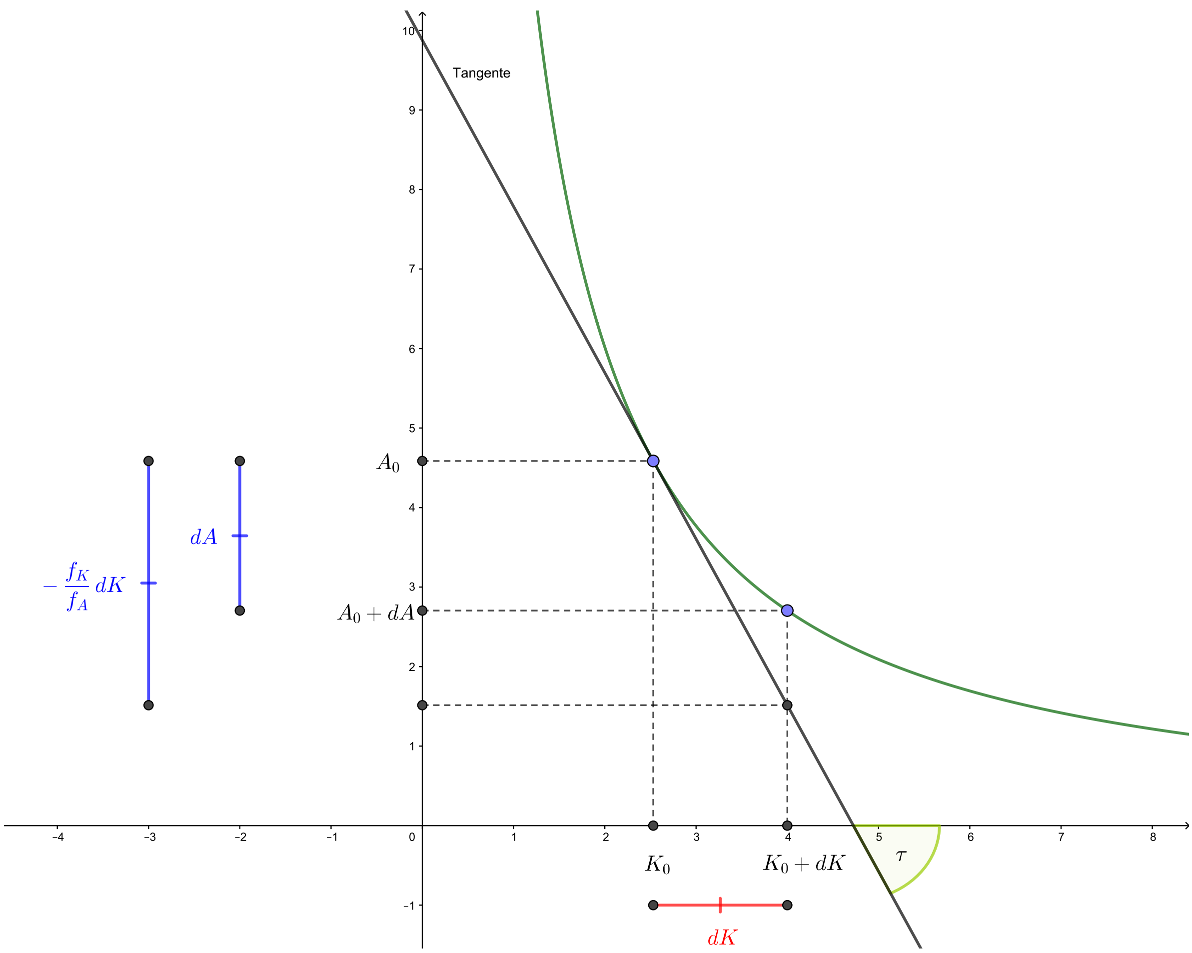
$$\frac{dA}{dK} = A'(K) = -\frac{f_K}{f_A} \quad (= \tan(\tau)).$$

Sei $Q_0 = f(A_0, K_0)$. Angenommen, K wird um dK verkleinert (Verringerung des Kapitaleinsatzes), um wieviel muss dann A vergrössert werden, damit der Output Q_0 konstant bleibt? Eine exakte Lösung dieses Problems ist schwierig und oft sogar unmöglich. Mit Hilfe der Substitutionsrate können wir aber meist gute Näherungslösungen finden. Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 = \Delta Q &= f(K_0 + dK, A_0 + dA) - f(K_0, A_0) \\ &\approx f_K(K_0, A_0)\, dK + f_A(K_0, A_0)\, dA \end{aligned}$$

oder eben:

$$\boxed{dA \approx -\frac{f_K(K_0, A_0)}{f_A(K_0, A_0)}\, dK = -\frac{f_K}{f_A}\, dK}$$



Bei homogenen Produktionsfunktionen hängt die Substitutionsrate nur vom Verhältnis $\frac{K}{A}$ von K und A ab, aber nicht von deren tatsächlichen Werten.

Interpretation:

Eine Steigerung/Verkleinerung von K um eine Einheit bewirkt eine Verringerung/Vergrösserung von A um $\left|\frac{dA}{dK}\right|$ Einheiten.

Beispiel 2.3 *Sei $Q = f(K, A) = c \cdot K^\alpha A^\beta$ eine Cobb-Douglas Produktionsfunkion. Dann gilt*

$$dA \approx -\frac{\alpha}{\beta} \frac{A}{K} dK.$$

Ändert man also K um dK muss man A um etwa $-\dfrac{\alpha}{\beta} \dfrac{A}{K} dK$ ändern, damit die Produktion konstant bleibt. Um das exakte Ergebnis zu erhalten, müsste man die Gleichung

$$0 = c \cdot (K + dK)^\alpha (A + dA)^\beta - c \cdot K^\alpha A^\beta$$

nach dA auflösen, was hier zwar noch möglich, aber sehr viel aufwändiger ist:

$$dA = \left(\frac{K^\alpha A^\beta}{(K + dK)^\alpha} \right)^{1/\beta} - A$$

Beispiel 2.4 *Sei $Q = f(K, A) = (aK^\rho + bA^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$ eine CES-Produktionsfunktion. Dann gilt*

$$dA \approx -\frac{a}{b} \left(\frac{K}{A} \right)^{\rho - 1} dK$$

2.5 Homogene Produktionsfunktionen

Die wichtigsten Produktionsfunktionen sind homogen (vom Grad 1)!! Warum??

Ökonomische Idee:

Nehmen wir an, dass wir jeweils eine Einheit Arbeit und Kapital investiert und damit $Q_0 = f(1,1)$ Einheiten produziert haben. Nun verdoppeln (verdreifachen, vervierfachen, ...) wir gleichzeitig beide Produktionsfaktoren. Dann sollte sich auch unsere Produktion verdoppeln (verdreifachen, vervierfachen, ...)!?

Mathematisch:

$$\begin{array}{rcl} f(2,2) & = & f(2\cdot 1, 2\cdot 1) & = & 2^1 \cdot f(1,1) \\ f(3,3) & = & f(3\cdot 1, 3\cdot 1) & = & 3^1 \cdot f(1,1) \\ f(4,4) & = & f(4\cdot 1, 4\cdot 1) & = & 4^1 \cdot f(1,1) \\ f(k,k) & = & f(k\cdot 1, k\cdot 1) & = & k^1 \cdot f(1,1) \end{array}$$

Cobb-Douglas-Produktionsfunktionen

$$Q = f(K,A) = c\; K^\alpha A^\beta$$

so dass Folgendes gilt:

- $c > 0$,
- $0 < \alpha < 1$ und $0 < \beta < 1$ (meistens auch $\alpha + \beta = 1$).

f ist homogen vom Grad $\alpha + \beta$, denn

$$\begin{array}{rcl} f(kK, kA) & = & c\;(kK)^\alpha (kA)^\beta \\ & = & c\; k^\alpha k^\beta K^\alpha A^\beta \\ & = & k^{\alpha+\beta}\; c\; K^\alpha A^\beta \\ & = & k^{\alpha+\beta}\; f(K,A) \end{array}$$

CES-Produktionsfunktionen

$$Q = f(K, A) = (aK^\rho + bA^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$$

so dass Folgendes gilt:

- $a, b > 0$,
- $\rho < 1$ und $\rho \neq 0$.

Das Kürzel CES bedeutet **C**onstant **E**lasticity of **S**ubstitution.
f ist homogen vom Grad 1, denn

$$\begin{aligned} f(kK, kA) &= \Big(a(kK)^\rho + b(kA)^\rho \Big)^{\frac{1}{\rho}} \\ &= (ak^\rho K^\rho + bk^\rho A^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \\ &= (k^\rho(aK^\rho + bA^\rho))^{\frac{1}{\rho}} \\ &= k(aK^\rho + bA^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \\ &= kf(K, A) \end{aligned}$$

3 Testfragen zur Vorlesung

Hinweis: Bevor Sie die Übungsaufgaben lösen, sollten Sie den Stoff der Vorlesung verstanden haben. Insbesondere sollten Sie die folgenden einfachen Fragen beantworten können. Diese Fragen werden im Allgemeinen nicht in den Übungen besprochen, können aber prüfungsrelevant sein.

1. Definieren Sie den Begriff homogene Funktion vom Grad g.
2. Kennen Sie Beispiele für homogene Funktionen vom Grad $1, 2, 3.4, 7.445$?
3. Was besagt die Eulersche Relation? Schreiben Sie die Gleichung auf und benennen Sie alle darin vorkommenden Grössen.
4. Was sind Grenzerträge, Isoquanten und Substitutionsraten?
5. Welche Eigenschaften haben die Isoquanten $A = A(K)$ einer Cobb-Douglas Funktion?
6. Beweisen Sie die Eulersche Relation.

4 Übungsaufgaben

4.1 Niveau 1

1. Sind die folgenden Funktionen homogen? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Homogenitätsgrad der Funktionen.

   (a) $f(x, y) = xy^2 + yx$

   (b) $f(x, y) = xy^3 + yx^3 + x^2y^2$

   (c) $f(x, y) = 2x + y + 3\sqrt{xy}$

   (d) $f(x, y) = xy \cdot \ln\big(\,(x^2 + y^2) \cdot (xy)^{-1}\,\big)$

2. Sei $f(K, A) = K^{3/4}A^{1/4}$ und $K_0 = A_0 = 10$. Der Kapitaleinsatz soll um $dK = 1$ erhöht werden, aber das Produktionsergebnis soll konstant bleiben. Wie muss A geändert werden?

   (a) Schätzen Sie dA mit Hilfe der Substitutionsrate.

   (b) Bestimmen Sie dA exakt.

4.2 Niveau 2

1. Die Funktion $f(x, y) = 3x^2y - y^3$ ist homogen vom Grad 3. Zeigen Sie, dass f die folgenden drei Eigenschaften hat:

   (a) f_x und f_y sind homogen vom Grad 2,

   (b) $f(x, y) \;=\; x^3 \cdot f(1, y/x) \;=\; y^3 \cdot f(x/y, 1)$ für $x > 0$ und $y > 0$,

   (c) $x^2 \cdot f_{xx}(x, y) + 2xy \cdot f_{xy}(x, y) + y^2 \cdot f_{yy}(x, y) \;=\; 3 \cdot 2 \cdot f(x, y)$.

2. Gegeben sind die beiden Funktionen (für $x, y \geq 0$):

$$f(x, y) \;=\; x^{1/2}y^{1/2} \qquad \text{und} \qquad g(x, y) \;=\; \left(x^{1/2} + 3y^{1/2}\right)^2$$

   (a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordung und zeigen Sie, dass diese nur vom Verhältnis x/y abhängen.

   (b) Bestimmen Sie die Substitutionsrate.

   (c) Überprüfen Sie die Gültigkeit der Eulerschen Relation.

   (d) Bestimmen Sie die Gleichung der Flächenkurve über dem Strahl

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } t \geq 0.$$

4.3 Niveau 3

Gegeben sind die beiden Funktionen (für $x, y \geq 0$):

$$f(x,y) \;=\; x^{\alpha}y^{\beta} \qquad \text{und} \qquad g(x,y) \;=\; (ax^{\rho}+by^{\rho})^{1/\rho}$$

1. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordung und zeigen Sie, dass diese nur vom Verhältnis x/y abhängen.
2. Bestimmen Sie die Substitutionsrate.
3. Überprüfen Sie die Gültigkeit der Eulerschen Relation.
4. Bestimmen Sie die Gleichung der Flächenkurve über dem Strahl

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; t\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } t \geq 0.$$

Lösungen der Übungsaufgaben

Niveau 1

1. (a) nicht homogen, (b) homogen vom Grad 4, (c) homogen vom Grad 1,
   (d) homogen vom Grad 2

2. $dA \approx -\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{A}{K}\,dK = -3$ und $dA = \left(\frac{K^\alpha A^\beta}{(K+dK)^\alpha}\right)^{1/\beta} - A = -2.4868$

Niveau 2

1. -

2. -

Niveau 3

-