Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

Mathematik 1

Dr. Thomas Zehrt

Extremwertprobleme
(ohne Nebenbedingung)

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Zwei ökonomische Prinzipien:

1. Maximiere den Erfolg bei gegebenen Mitteln
2. Erreiche einen gegebenen Erfolg mit minimalen Mitteln

Allgemeines Vorgehen am (eindimensionalen) Beispiel

(Eindim.) Ökonomisches Problem: Wie viel Stück eines Gutes soll meine Firma produzieren, um maximalen Profit zu erreichen?

Mathematische Modellierung: Kostenfunktion $K(x)$, Erlösfunktion $E(x)$ und Profitfunktion $P(x) = E(x) - K(x)$

Lösung des Problems: Maximiere die Funktion $P(x)$, über alle erlaubten Werte x, d.h. hier eigentlich, dass x eine natürliche Zahl sein sollte (Stückzahl). Um die mächtigen Werkzeuge der Differentialrechnung nutzen zu können, werden wir aber meist $x \in \mathbb{R}$ (mit $x \geq 0$) annehmen und das Ergebnis $P(x)$ runden.

Typen von Extremwertaufgaben

In der Praxis werden die zu optimierenden Funktionen aber nicht nur von einer Variablen abhängen. Gegeben sei also eine Funktion $z = f(x, y)$ in zwei Variablen. Wie auch für Funktionen in einer Variablen ist es oft wichtig, lokale und globale Extremstellen (und auch Sattelpunkte) von f zu finden und deren Typ zu identifizieren. Wir unterscheiden zwei Typen von Extremwertaufgaben:

- Extremwertprobleme (ohne Nebenbedingungen) und
- Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen: zusätzlich zur Funktion $z = f(x, y)$ gibt es hier weitere Bedingungen an die Variablen x und y. Diese Bedingungen sollen stets die Form einer (oder mehrerer) Gleichung(en) annehmen, also $\phi(x, y) = 0$.

2 Grundlegende Begriffe

2.1 Lokale und globale Extremalstellen

Definition 2.1 *Ein Punkt (x^*, y^*) heisst dann stationärer Punkt von f, falls dort beide partiellen Ableitungen verschwinden.*

Lokale Extremalstellen

Der Punkt (x^*, y^*) heisst lokale Maximalstelle von f in der Menge S, wenn $f(x, y) \leq f(x^*, y^*)$ für alle Paare (x, y) in S gilt, die hinreichend nahe an (x^*, y^*) liegen.

Der Punkt (x^*, y^*) heisst lokale Minimalstelle von f in der Menge S, wenn $f(x, y) \geq f(x^*, y^*)$ für alle Paare (x, y) in S gilt, die hinreichend nahe an (x^*, y^*) liegen.

Ein stationärer Punkt (x^*, y^*) von f, der weder eine lokale Maximalstelle noch eine lokale Mininimalstelle ist, wird als Sattelpunkt bezeichnet.

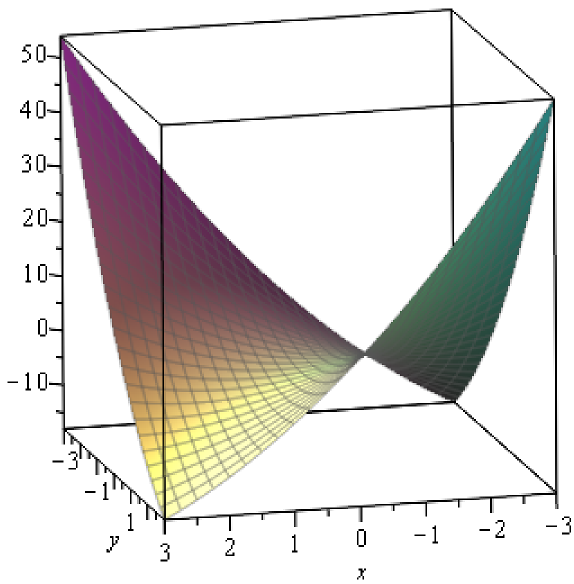
Globale Extremalstellen

Der Punkt (x^*, y^*) heisst globale Maximalstelle von f in der Menge S, wenn $f(x, y) \leq f(x^*, y^*)$ für alle Paare (x, y) in S gilt.

Der Punkt (x^*, y^*) heisst globale Minimalstelle von f in der Menge S, wenn $f(x, y) \geq f(x^*, y^*)$ für alle Paare (x, y) in S gilt.

Aufgabe 2.1

Wir betrachten die Funktion $z = f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2$ auf der Menge $S = [-3, 3] \times [-3, 3]$. Bestimmen Sie durch Rechnung die stationären Punkte von f in S. Kann man an der Skizze die globalen Extremwerte und Sattelpunkte ablesen?



2.2 Teilmengen von $\mathbb{R}^2$

Bei der Suche nach lokalen und globalen Extremalstellen spielt der Definitionsbereich der Funktion eine grosse Rolle. Selbstverständlich hängt das Ergebnis einer Suche davon ab, wo man suchen darf. Solche Einschränkungen des Suchbereichs können stets als Teilmenge (des Definitionsbereichs einer Funktion) dargestellt werden.

Insbesondere gibt es im Allgemeinen keine Garantie, dass eine Funktion auf einer Teilmenge $\mathbb{R}^2$ tatsächlich einen globalen Maximalwert bzw. Minimalwert realisiert. Insbesondere bei unendlich grossen Teilmengen könnte die Funktion in einer Richtung immer weiter wachsen und/oder fallen. Oder wenn auf dem Rand der Teilmenge Polstellen der Funktion liegen, wird die Funktion auch bei Annäherung an diese Punkte immer weiter wachsen und/oder fallen.

Wir wollen im Folgenden einige wichtige Eigenschaften von Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ kennenlernen.

Beschränktheit

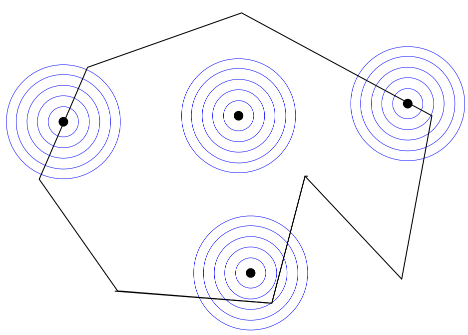
Definition 2.2 *Eine Menge $S \subset \mathbb{R}^2$ heisst <u>beschränkt</u>, wenn sie ganz in einem Kreis enthalten ist.*

Aufgabe 2.2 *Welche der folgenden Mengen sind beschränkt?*

1. $\mathbb{R}$
2. $[0,1]$ *(abgeschlossenes Intervall)*
3. $[0,1)$ *(halboffenes Intervall)*
4. $(0,1)$ *(offenes Intervall)*
5. $[0,1] \times (1,2) \;=\; \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1] \text{ und } y \in (1,2)\ \}$
6. $\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\ \}$
7. $\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq 1\ \}$

Randpunkte und innere Punkte

Definition 2.3 *Sei $S \subset \mathbb{R}^2$. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ heisst <u>Randpunkt</u> von S, falls* **jede** *Umgebung von x sowohl Punkte aus S als auch aus dem <u>Komplement</u> $S^c = \mathbb{R}^2 - S$ von S enthält. Ein Punkt von S, der kein Randpunkt ist, heisst <u>innerer Punkt</u> von S.*



Ein Randpunkt von S **kann ein Element von** S **sein oder auch nicht**. Als Beispiel mag hier das halboffene Intervall $S = (1, 2] \subset \mathbb{R}$ dienen. Sicher hat S die beiden Randpunkte 1 und 2, denn jede Umgebung der beiden Punkte schneidet sowohl S als auch das Komplement von S, aber es gilt $2 \in S$ und $1 \notin S$.

Abgeschlossenheit

Definition 2.4 *Eine Menge S heisst abgeschlossen, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.*

Aufgabe 2.3 *Welche der folgenden Mengen sind abgeschlossen?*

1. $\mathbb{R}$
2. $[0, 1]$ *(abgeschlossenes Intervall)*
3. $[0, 1)$ *(halboffenes Intervall)*
4. $(0, 1)$ *(offenes Intervall)*
5. $[0, 1] \times (0, 1)$
6. $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$
7. $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \}$

Auf beliebigen Mengen S muss eine Funktion kein globales Extrema realisieren. Ein einfaches Beispiel wäre die Funktion $f(x) = 1/x$ auf der nicht beschränkten und nicht abgeschlossenen Menge $S = (0, \infty)$. Bei der Annäherung an 0 (von rechts) wächst f unbeschränkt, realisiert also sicher kein globales Maximum und für $x \to \infty$ wird f immer kleiner, realisiert also kein globales Minimum.

Deshalb werden wir uns bei der Suche nach globalen Extremalstellen auf spezielle Definitionsbereiche S einschränken, die stets **abgeschlossen** und **beschränkt** sind. Mengen mit diesen beiden Eigenschaften heissen auch kompakt. Auf solchen Mengen gilt:

Satz 1 (Satz von Weierstrass) *Eine stetige Funktion realisiert auf einem abgeschlossenem und beschränktem Bereich ein (nicht notwendigerweise eindeutiges) globales Minimum und Maximum.*

3 Lokale Extremalstellen

Sei f eine Funktion, die auf einer Menge S definiert ist, die **keine** Randpunkte enthält. Das wichtigste Beispiel ist hier natürlich $S = \mathbb{R}^2$ und wir wollen in diesem Abschnitt voraussetzen, dass die gegebenen Funktionen auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert und genügend oft differenzierbar sind.

Satz 2 *Sei $z = f(x, y)$ eine Funktion. Gilt in einem Punkt $(x^\star, y^\star)$*

$$\boxed{\begin{gathered} f_x(x^\star, y^\star) = f_y(x^\star, y^\star) = 0 \\[1em] f_{xx}(x^\star, y^\star) < 0 \\ f_{yy}(x^\star, y^\star) < 0 \\[1em] f_{xx}(x^\star, y^\star) \cdot f_{yy}(x^\star, y^\star) - f_{xy}^2(x^\star, y^\star) > 0 \end{gathered}}$$

so ist $(x^\star, y^\star)$ eine lokale Maximalstelle.

Satz 3 *Sei $z = f(x, y)$ eine Funktion. Gilt in einem Punkt $(x^\star, y^\star)$*

$$\boxed{\begin{gathered} f_x(x^\star, y^\star) = f_y(x^\star, y^\star) = 0 \\[1em] f_{xx}(x^\star, y^\star) > 0 \\ f_{yy}(x^\star, y^\star) > 0 \\[1em] f_{xx}(x^\star, y^\star) \cdot f_{yy}(x^\star, y^\star) - f_{xy}^2(x^\star, y^\star) > 0 \end{gathered}}$$

so ist $(x^\star, y^\star)$ eine lokale Minimalstelle.

Satz 4 *Sei $z = f(x, y)$ eine Funktion. Gilt in einem Punkt $(x^\star, y^\star)$*

$$\boxed{\begin{gathered} f_x(x^\star, y^\star) = f_y(x^\star, y^\star) = 0 \\[1em] f_{xx}(x^\star, y^\star) \cdot f_{yy}(x^\star, y^\star) - f_{xy}^2(x^\star, y^\star) < 0 \end{gathered}}$$

so ist $(x^\star, y^\star)$ ein Sattelpunkt.

Wir wollen die Kriterien in den Sätzen an einigen Beispielen erläutern.

1. Eine **notwendige Bedingung** für die Existenz eines lokalen Maximums oder Minimums im Punkt (x^*, y^*) ist eine horizontale Tangentialebene, d.h. in diesem Punkt müssen beide partiellen Ableitungen verschwinden:

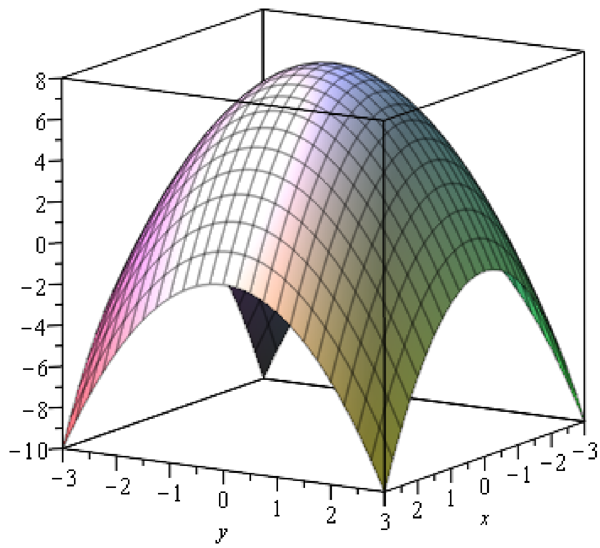
   $$f_x(x^*, y^*) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x^*, y^*) = 0.$$

   Diese Bedingung ist aber **nicht hinreichend**!

   Beispiele:

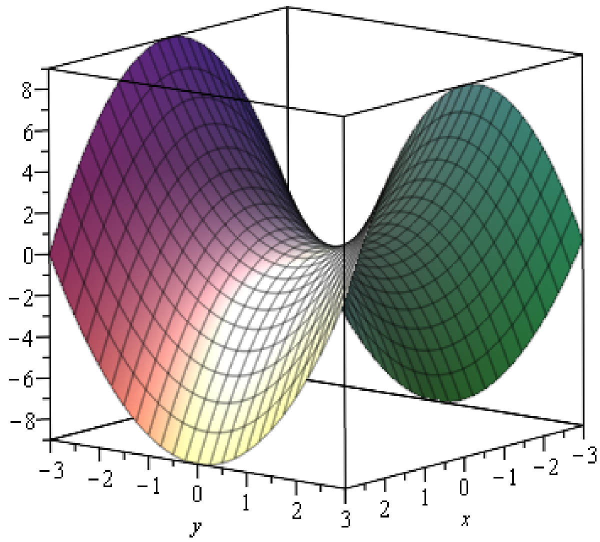
   - Wir betrachten das Rotationsparaboloid $z = f(x, y) = 8 - x^2 - y^2$. Die Funktion hat im Punkt $(0, 0)$ ein Maximum und tatsächlich gilt:

     $$\begin{aligned} f_x(0,0) &= -2x|_{(0,0)} = 0 \\ f_y(0,0) &= -2y|_{(0,0)} = 0. \end{aligned}$$



- Wir betrachten das hyperbolische Paraboloid $z = f(x,y) = y^2 - x^2$. Die Funktion hat im Punkt $(0,0)$ einen Sattelpunkt, also kein lokales Extrema, und es gilt

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= -2x|_{(0,0)} = 0 \\ f_y(0,0) &= 2y|_{(0,0)} = 0. \end{aligned}$$



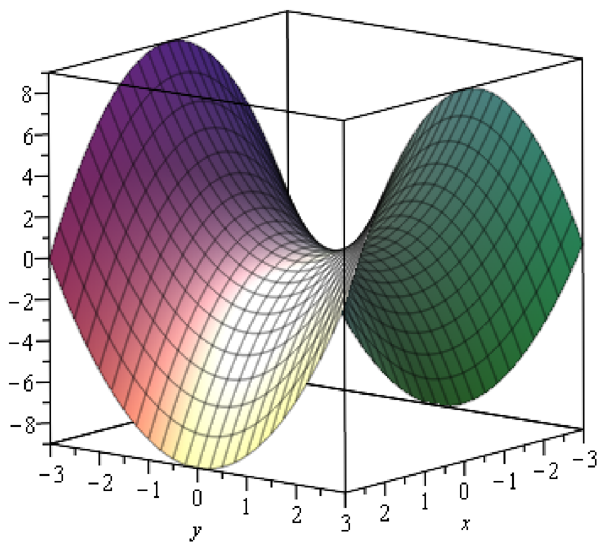
2. Für die Existenz eines lokalen Extremas an der Stelle (x^*, y^*) ist zusätzlich zu fordern, dass die x- und y-Schnittkurven in der Nähe des Punktes (x^*, y^*) konkav (bzw. konvex) sind:

   - (x^*, y^*) lokales Maximum:
   $$f_x(x^*, y^*) = 0, \quad f_y(x^*, y^*) = 0 \quad \text{und} \quad f_{xx}(x^*, y^*) < 0, \quad f_{yy}(x^*, y^*) < 0$$
   - (x^*, y^*) lokales Minimum:
   $$f_x(x^*, y^*) = 0, \quad f_y(x^*, y^*) = 0 \quad \text{und} \quad f_{xx}(x^*, y^*) > 0, \quad f_{yy}(x^*, y^*) > 0$$

   Aber auch diese Bedingung ist **nicht hinreichend**! Aus der Konkavität (bzw. Konvexität) der x- und y-Schnittkurve folgt im Allgemeinen **nicht**, dass **jede** Kurve durch diesen Punkt die selbe Krümmungseigenschaft hat!

   Beispiele:

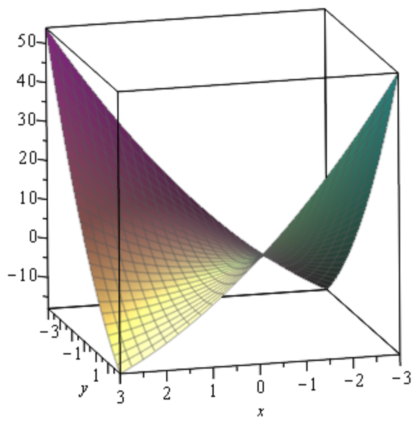
   - Wir betrachten wieder das hyperbolische Paraboloid $z = f(x, y) = y^2 - x^2$. Es gilt
   $$\begin{array}{rcl} f_x(0,0) & = & -2x|_{(0,0)} \ = \ 0 \\ f_y(0,0) & = & 2y|_{(0,0)} \ = \ 0 \\ f_{xx}(0,0) & = & -2 \ < \ 0 \\ f_{yy}(0,0) & = & 2 \ > \ 0 \end{array}$$
   also hat die Funktion im Nullpunkt keine Extremstelle.

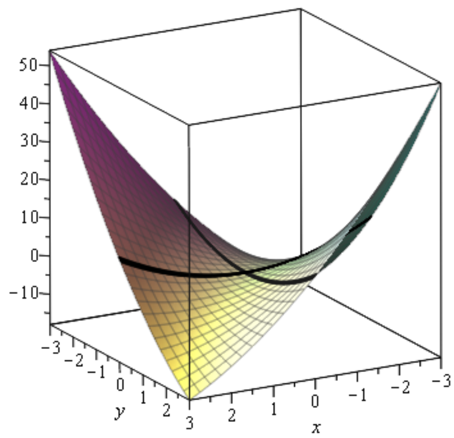


- Wir betrachten die Funktion $z = f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2$. Diese hat im Nullpunkt einen Sattel, aber es gilt

$$
\begin{aligned}
f_x(0,0) &= 2x - 4y|_{(0,0)} = 0 \\
f_y(0,0) &= 2y - 4x|_{(0,0)} = 0 \\
f_{xx}(0,0) &= 2 > 0 \\
f_{yy}(0,0) &= 2 > 0.
\end{aligned}
$$

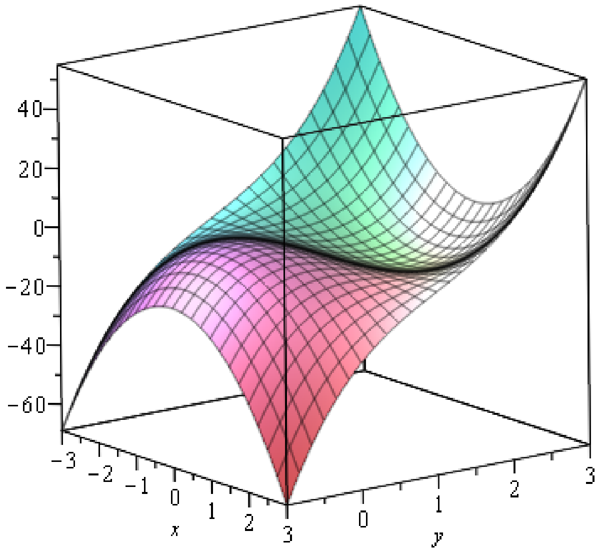
Unsere Kriterien genügen also noch nicht, um zwischen Extrema und Sattelpunkten zu unterscheiden. Insbesondere ist zu erkennen, dass es nicht genügt, nur die Flächenkurvenanstiege in x- und y- Richtung zu untersuchen, auch die Zwischenrichtungen spielen eine Rolle.





Beispiel 3.1 *Bestimmen Sie alle lokalen Extrema, deren Typ und alle Sattelpunkte der Funktion*

$$f(x,y) \quad = \quad 3x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 12y^2 + 1.$$



Lösungsskizze:

1. *Partielle Ableitungen*

$$\begin{aligned} f_x &= 6xy - 6x \; = \; 6x(y-1) \\ f_y &= 3x^2 + 12y^2 - 24y \\ f_{xx} &= 6y - 6 \\ f_{yy} &= 24y - 24 \\ f_{xy} = f_{yx} &= 6x \end{aligned}$$

2. *Nullstellen der Ableitungen 1. Ordnung*

$$\begin{aligned} I \qquad 0 &= 6xy - 6x \; = \; 6x(y-1) \\ II \qquad 0 &= 3x^2 + 12y^2 - 24y \end{aligned}$$

Um Gleichung I zu erfüllen, gibt es zwei Möglichkeiten: $x = 0$ *oder* $y = 1$.

- $x = 0$ *in II*

$$0 \quad = \quad 3 \cdot 0^2 + 12y^2 - 24y \quad = \quad 12y(y-2)$$

also $y = 0$ *oder* $y = 2$. *Beachten Sie hier, dass Sie die Gleichung* **nicht** *durch* y *teilen. Sie verlieren sonst eine Lösung.*
Kandidaten für Extremalstellen: $(0,0)$ *und* $(0,2)$

- *$y = 1$ in II*

$$0 = 3x^2 + 12 \cdot 1^2 - 24 \cdot 1 = 3x^2 - 12$$

also $x = 2$ oder $x = -2$.
Kandidaten für Extremalstellen: $(2,1)$ und $(-2,1)$

3. *Typbestimmung der vier Kandidaten*

(x,y)	$f_{xx}(x,y)$	$f_{yy}(x,y)$	$f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y)$	*Typ*
$(0,0)$	-6	-24	$(-6) \cdot (-24) - 0 = 144$	*lokale Maximalstelle*
$(0,2)$	6	24	$6 \cdot 24 - 0 = 144$	*lokale Minimalstelle*
$(2,1)$	0	0	$0 \cdot 0 - (12)^2 = -144$	*Sattelpunkt*
$(-2,1)$	0	0	$0 \cdot 0 - (-12)^2 = -144$	*Sattelpunkt*

4 Globale Extremalstellen

Satz 5 (Auffinden der (globalen) Extremalstellen) *Sei f eine differenzierbare Funktion auf der abgeschlossenen und beschränkten Menge $S \subset \mathbb{R}^2$. Wir suchen alle (globalen) Extrema von f auf S.*

Algorithmus:

(I) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von S im Inneren von S.

(II) Bestimmen Sie den grössten und den kleinsten Wert von f auf dem Rand von S und die zugehörigen Punkte.

Wenn es angebracht ist, den Rand in mehrere Teilstücke zu zerlegen, so bestimmen Sie den grössten und den kleinsten Wert auf jedem Teilstück.

(III) Berechnen Sie die Werte der Funktion in allen Punkten, die Sie in (I) und (II) gefunden haben. Der grösste Funktionswert ist das (globale) Maximum von f auf S. Der kleinste Funktionswert ist das (globale) Minimum von f auf S.

Beispiel 4.1 *Bestimmen Sie die (globalen) Extrema der Funktion $f(x, y) = x^2+y^2+y-1$ auf der Menge $S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$*

Lösungsskizze:

1. *Stationäre Punkte in S*

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x &= 0 \quad \textit{also } x = 0 \\ f_y(x, y) &= 2y + 1 &= 0 \quad \textit{also } y = -1/2 \end{aligned}$$

$(0, -1/2) \in S$ *ist der einzige stationäre Punkt*

2. *Rand von S ist der Kreis $x^2 + y^2 = 1$ und* **auf** *diesem Kreis gilt*

$$f(x, y) = \underbrace{x^2 + y^2}_{=1} + y - 1 = y$$

Minimum von f auf dem Kreis: $y = -1$ in $(0, -1)$

Maximum von f auf dem Kreis : $y = 1$ in $(0, 1)$

3. *An den drei gefundenen Punkten gilt:*

$$\begin{array}{rcllll} f(0, -1) &=& -1 & & & \\ f(0, 1) &=& 1 & & (0, 1) & \textit{globales Maximum} \\ f(0, -1/2) &=& -5/4 & & (0, -1/2) & \textit{globales Minimum} \end{array}$$

Beispiel 4.2 *Gegeben sei die Funktion* $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.

1. *Bestimmen Sie alle stationären Stellen.*
2. *Bestimmen Sie alle Kandidaten für globale Extremalstellen der Funktion auf den folgenden vier Mengen:*

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(x,y) \mid x = 0 \textit{ und } 0 \le y \le 4\} \\ M_2 &= \{(x,y) \mid x = 4 \textit{ und } 0 \le y \le 4\} \\ M_3 &= \{(x,y) \mid 0 \le x \le 4 \textit{ und } y = 0\} \\ M_4 &= \{(x,y) \mid 0 \le x \le 4 \textit{ und } y = 4\} \end{aligned}$$

3. *Bestimmen Sie die globalen Extremalstellen der Funktion auf der Menge* $M = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 4 \textit{ und } 0 \le y \le 4\}$.

Lösungsskizze:

5 Testfragen zur Vorlesung

Hinweis: Bevor Sie die Übungsaufgaben lösen, sollten Sie den Stoff der Vorlesung verstanden haben. Insbesondere sollten Sie die folgenden einfachen Fragen beantworten können. Diese Fragen werden im Allgemeinen nicht in den Übungen besprochen, können aber prüfungsrelevant sein.

1. Definieren Sie die Begriffe stationärer Punkt, lokale (und globale) Maximalstelle, lokale (und globale) Minimalstelle und Sattelpunkt.
2. Wann ist eine Menge beschränkt? Wann ist eine Mengen abgeschlossen? Was sind Randpunkte von Mengen? Kennen Sie einfache Beispiele für Mengen mit diesen Eigenschaften?
3. Nennen Sie notwendige und hinreichende Kriterien für das Vorliegen eines
   (a) lokalen Maximums,
   (b) lokalen Minimums und
   (c) Sattelpunktes.
4. Was sagt der Satz von Weierstrass?
5. Erläutern Sie kurz den Algorithmus zum Auffinden von globalen Extrema für differenzierbare Funktionen auf abgeschlossenen und beschränkten Mengen.

6 Übungsaufgaben

6.1 Niveau 1

1. Untersuchen Sie die folgende Funktion auf lokale Extremalstellen und Sattelpunkte:
$$f(x,y) = x^3 + 4x^2 - 3x - 8xy + 4y^2.$$
2. Untersuchen Sie die folgende Funktion auf lokale Extremalstellen und Sattelpunkte:
$$f(x,y) = 3x^2 - 6xy + y^3 - 60x + 60y - 700.$$
3. Untersuchen Sie die folgende Funktion auf lokale Extremalstellen und Sattelpunkte:
$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

6.2 Niveau 2

1. Für die Fertigung eines Gutes G (in der Menge q) werden zwei Produktionsfaktoren A (in der Menge a) und B (in der Menge b) eingesetzt. Die zugehörige Produktionsfunktion lautet
$$q = f(a,b) = 10 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$
Der Gewinn der Unternehmung (in Geldeinheiten) lasse sich durch die Funktion
$$G(q,a,b) = 9q - 4a - b$$
beschreiben. Man berechne diejenige Kombination der Produktionsfaktoren, die den Gewinn (zumindest lokal) maximiert.
2. Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.
   (a) Bestimmen Sie alle stationären Stellen.
   (b) Bestimmen Sie alle Kandidaten für globale Extremalstellen der Funktion auf den folgenden vier Mengen:
$$\begin{aligned} M_1 &= \{(x,y) \mid x = 0 \text{ und } 0 \leq y \leq 4\} \\ M_2 &= \{(x,y) \mid x = 4 \text{ und } 0 \leq y \leq 4\} \\ M_3 &= \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 4 \text{ und } y = 0\} \\ M_4 &= \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 4 \text{ und } y = 4\} \end{aligned}$$
   (c) Bestimmen Sie die globalen Extremalstellen der Funktion auf der Menge $M = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 4 \text{ und } 0 \leq y \leq 4\}$.

6.3 Niveau 3

Sei (K^*, L^*) eine (innere) lokale Extremalstelle der Funktion
$$G(K,L) = c \cdot K^\alpha L^\beta - p_1 K - p_2 L$$
mit $c, \alpha, \beta, p_1, p_2 \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass folgendes gilt:
$$\frac{L^*}{K^*} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{p_1}{p_2}.$$

Lösungen der Übungsaufgaben

Niveau 1

1. Lokales Minimum $(1,1)$, Sattelpunkt $(-1,-1)$
2. Lokales Minimum $(12,2)$, Sattelpunkt $(10,0)$
3. Lokales Minimum $(1,1)$, Sattelpunkt $(0,0)$

Niveau 2

1. $(1.5, 3)$
2. (a) $(0,0)$ und $(3,3)$
   (b) $(0,0)$ und $(0,4)$ auf M_1
   $(4,0)$, $(4,\sqrt{12})$ und $(4,4)$ auf M_2
   $(0,0)$ und $(4,0)$ auf M_3
   $(0,4)$, $(\sqrt{12},4)$ und $(4,4)$ auf M_4
   (c) Globale Minimalstelle: $(3,3)$
   Globale Maximalstellen: $(0,4)$ und $(4,0)$

Niveau 3

-