Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

9

Mathematik 1

Dr. Thomas Zehrt

Extremwertprobleme
mit Nebenbedingung

Inhaltsverzeichnis

1 Einstimmung

Gegeben sei eine Funktion $z = f(x, y)$. Zusätzlich sei eine Nebenbedingung in Form einer Gleichung gegeben. Wir suchen ein Extrema der Funktion unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

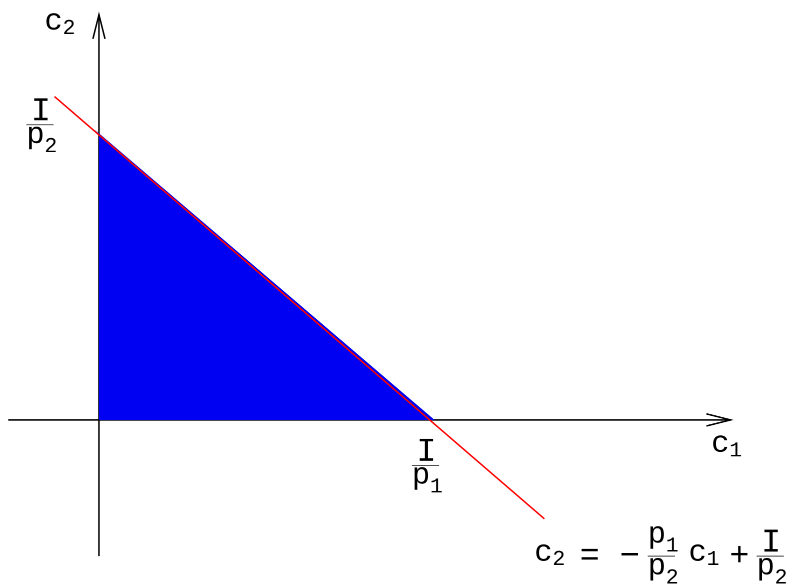
Beispiel 1.1 *Es bezeichne p_1 und p_2 die Preise von zwei Gütern und I das verfügbare Einkommen einer Person. Weiterhin sei $u(c_1, c_2)$ eine Nutzenfunktion, d.h. eine Funktion, die den Nutzen (Grad der Bedürfnisbefriedigung der Person) als Funktion der konsumierten Mengen c_1 und c_2 der beiden Güter darstellt. Wir suchen einen Konsumplan (c_1^*, c_2^*) $(c_1^*, c_2^* \geq 0)$, welcher die Nutzenfunktion $u(c_1, c_2)$ unter der Budgetrestriktion $p_1c_1 + p_2c_2 = I$ maximiert, also kurz*

$$\begin{aligned} \textit{zu maximierende } \underline{\textit{Zielfunktion}} &: u(c_1, c_2) \\ \underline{\textit{Nebenbedingung}} &: \phi(c_1, c_2) = p_1c_1 + p_2c_2 - I = 0 \end{aligned}$$

Hier kann die Nebenbedingung leicht nach c_2 aufgelöst werden und man erhält die Geradengleichung

$$c_2 = -\frac{p_1}{p_2}c_1 + \frac{I}{p_2}.$$

Da beide Preise positiv sind, ist die Gerade sicher fallend. Ausserdem erkennt man sofort, dass eine Änderung des Einkommens den Anstieg nicht beeinflusst. Alle Punkte der blauen Fläche haben die Eigenschaften: $c_1, c_2 \geq 0$ und $p_1c_1 + p_2c_2 \leq I$, d.h. die entsprechenden Güterbündel kann ich mir leisten.



Beispiel 1.2 *Ein Produzent mit der Produktionsfunktion $f(K, A)$ will den Output b möglichst kostengünstig herstellen. Es bezeichne:*

- K *: Kapital(einsatz)*
- A *: Arbeit(seinsatz)*
- r *: Kostensatz für Kapitalbenutzung*
- w *: Lohnsatz*

Wir suchen einen Produktionsplan (K^*, A^*) $(K^*, A^* \geq 0)$, welcher die Produktionskosten

$$C(K, A) \quad = \quad r \cdot K + w \cdot A$$

unter der Nebenbedingung $f(K, A) = b$ minimiert, also kurz

$$\begin{aligned} \textit{zu minimierende } \underline{\textit{Zielfunktion}} \quad &: \quad C(K, A) = r \cdot K + w \cdot A \\ \underline{\textit{Nebenbedingung}} \quad &: \quad \phi(K, A) = f(K, A) - b = 0 \end{aligned}$$

Allgemeine Formulierung:

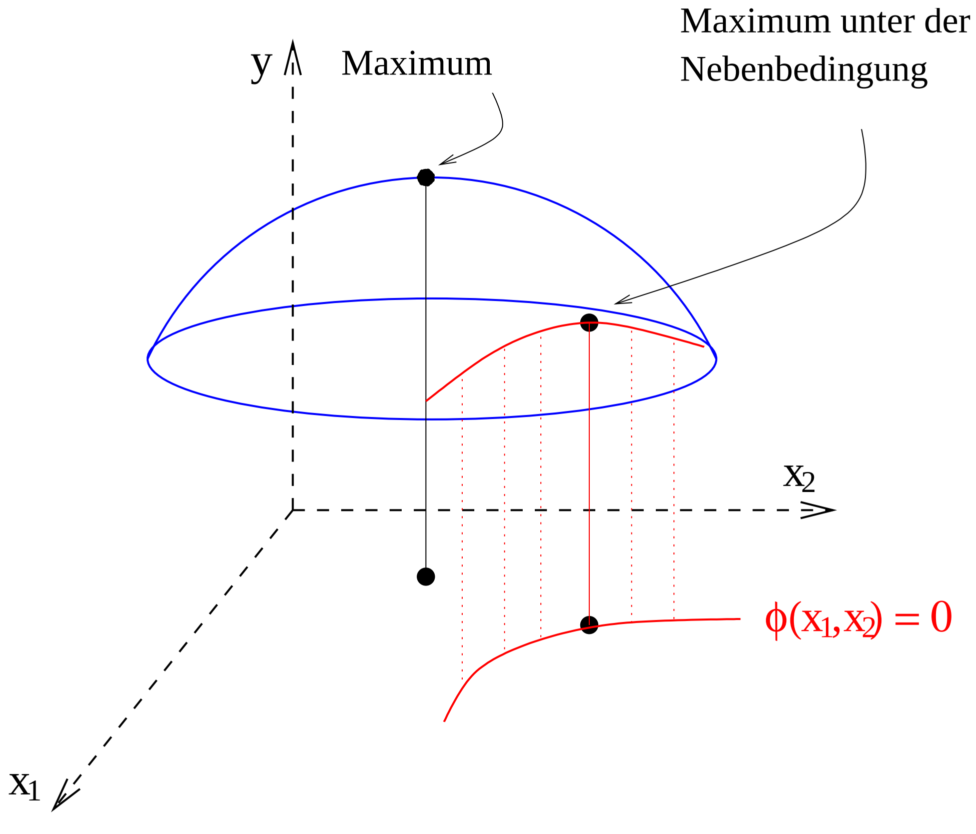
Gesucht ist (x_1^*, x_2^*), so dass die Zielfunktion

$$y = f(x_1, x_2)$$

unter der Nebenbedingung

$$\phi(x_1, x_2) = 0$$

maximiert (resp. minimiert) wird.



2 Die Reduktionsmethode

In einfachen Fällen lässt sich die Nebenbedingung $\phi(x_1, x_2) = 0$ nach x_2 auflösen, d.h. es gibt eine (explizit darstellbare) Funktion $h(x_1)$ so dass:

$$\phi(x_1, x_2) = 0 \iff x_2 = h(x_1).$$

Dann kann die Variable x_2 aus der Zielfunktion eliminiert werden und man erhält eine Funktion, die nur noch von der Variablen x_1 abhängt.

Beispiel 2.1 *Wir betrachten die Nebenbedingung $\phi(x_1, x_2) = x_1^3 - e^{2x_2} = 0$. Diese kann leicht nach y aufgelöst:*

$$\phi(x_1, x_2) = x_1^3 - e^{2x_2} = 0 \iff x_2 = h(x_1) = \frac{3}{2}\ln(x_1)$$

und in jede Zielfunktion eingesetzt werden.

Das neue Problem ist dann die Maximierung (resp. Minimierung) der Funktion (in einer Variablen)

$$F(x_1) = f(x_1, h(x_1))$$

mit den Methoden der früheren Kapitel.

Beachte:

- Die Nebenbedingung $\phi(x_1, x_2) = 0$ stellt nicht immer einen funktionalen Zusammenhang zwischen x_1 und x_2 dar. Deshalb ist die Reduktionsmethode nicht immer anwendbar.
- Gravierend ist auch der Nachteil, dass die ökonomische Interpretation der Optimalitätsbedingungen bei Nutzung der Reduktionsmethode meist Probleme bereitet.

Beispiel 2.2 *Maximieren Sie die Funktion $u(c_1, c_2) = 5\ln(c_1 + 3) + \ln(c_2 + 1)$ unter der Nebenbedingung $\phi(c_1, c_2) = 2c_1 + c_2 - 5 = 0$.*

Lösungsskizze:

- *Nebenbedingung umformen (für $c_1, c_2 \geq 0$ und $c_1 \leq 5/2$):*

$$2c_1 + c_2 - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = 5 - 2c_1$$

- *Einsetzen in Zielfunktion:*

$$F(c_1) = u(c_1, 5 - 2c_1) = 5\ln(c_1 + 3) + \ln(5 - 2c_1 + 1) = 5\ln(c_1 + 3) + \ln(6 - 2c_1)$$

- *F maximieren:*

$$F'(c_1) = \frac{5}{c_1 + 3} - \frac{2}{6 - 2c_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = 2 \text{ und } c_2 = 5 - 2 \cdot 2 = 1$$

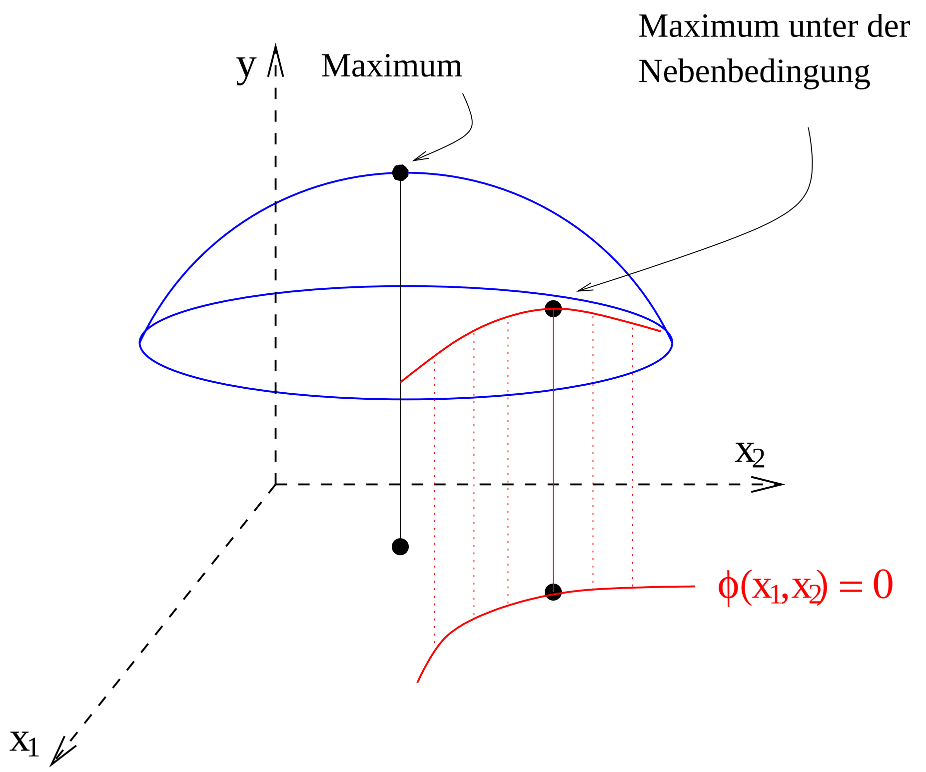
  $F''(2) < 0$, *also ist $c_1 = 2$ eine lokale Maximalstelle von F.*

- $(2, 1)$ *ist eine lokale Maximalstelle von u.*

3 Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren

Wir haben wieder ein Optimierungsproblem der allgemeinen Gestalt zu lösen:

$$\begin{array}{rll} \text{zu maximierende Zielfunktion} & : f(x_1,x_2) = y & \text{Fläche im Raum} \\ \text{Nebenbedingung} & : \phi(x_1,x_2) = 0 & \text{Kurve in der } x_1 - x_2\text{−Ebene} \end{array}$$

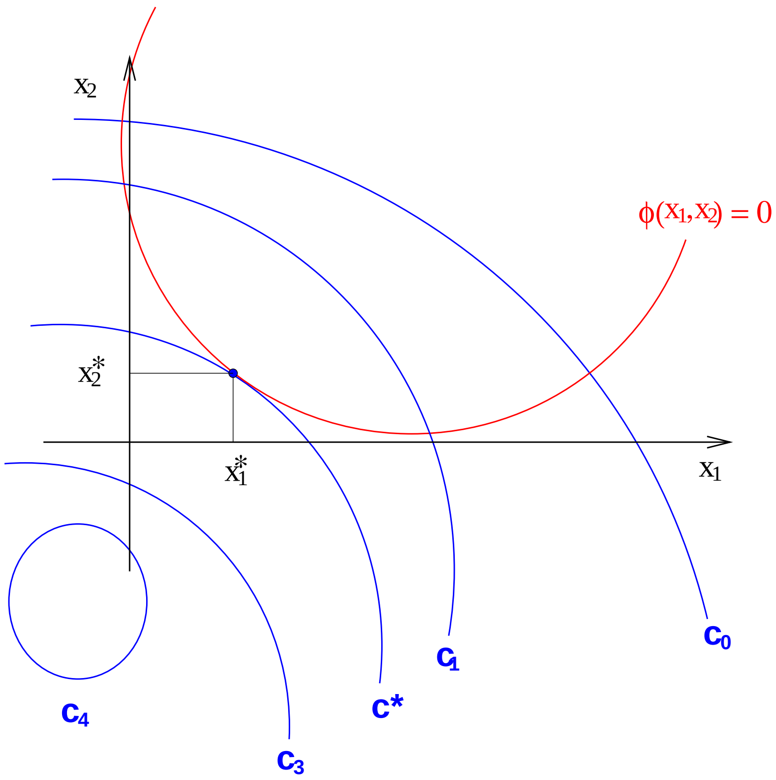


Tatsächlich interessieren uns also nur die Punkte auf dem durch $y = f(x_1,x_2)$ definierten Graphen, deren x-y-Koordinaten die Nebenbedingung $\phi(x_1,x_2) = 0$ erfüllen. Geometrisch sind das genau die Punkte auf dem Graphen, deren Projektionen in die $x_1 - x_2-$ Ebene auf der durch $\phi(x_1,x_2) = 0$ definierten Kurve liegen. Den Graphen von $z = f(x,y)$ wollen wir uns nun durch eine Schar von Niveaulinien veranschaulichen:

$$f(x_1,x_2) \;=\; c = konstant \qquad \text{und} \qquad c_0 < c_1 < c^* < c_3 < c_4$$

Nehmen wir an, dass der Punkt $M = (x_1^*, x_2^*)$ der gesuchte Punkt ist, d.h. es gilt

$$\begin{array}{rcl} \phi(x_1^*,x_2^*) & = & 0 \text{ und} \\ f(x_1^*,x_2^*) & \geq & f(x_1,x_2) \text{ für alle } x_1,x_2 \text{ mit } \phi(x_1,x_2) = 0. \end{array}$$



Dann gilt:

Im Punkt $M = (x_1^*, x_2^*)$ **berührt die Kurve** $\phi(x_1, x_2) = 0$ **eine Niveaulinie** $f(x_1, x_2) = c^*$, das heisst, die Kurve und die Niveaulinie haben in M die gleiche Tangentensteigung. Daraus folgt mittels impliziter Differentiation, dass

$$\frac{f_{x_1}(x_1^*, x_2^*)}{f_{x_2}(x_1^*, x_2^*)} = \frac{\phi_{x_1}(x_1^*, x_2^*)}{\phi_{x_2}(x_1^*, x_2^*)} \quad \text{oder kurz} \quad \frac{f_{x_1}}{f_{x_2}} = \frac{\phi_{x_1}}{\phi_{x_2}} \quad \text{oder} \quad \frac{f_{x_1}}{\phi_{x_1}} = \frac{f_{x_2}}{\phi_{x_2}}$$

gelten muss. Dieses Verhältnis wird mit λ abgekürzt.

Definition 3.1 *Die Zahl* λ *mit*

$$\frac{f_{x_1}}{\phi_{x_1}} = \lambda = \frac{f_{x_2}}{\phi_{x_2}}$$

heisst *Lagrange-Multiplikator.*

Es ist also

$$f_{x_1} = \lambda\, \phi_{x_1} \quad \text{und} \quad f_{x_2} = \lambda\, \phi_{x_2} \qquad \text{oder}$$

$$f_{x_1} - \lambda\, \phi_{x_1} = 0 \quad \text{und} \quad f_{x_2} - \lambda\, \phi_{x_2} = 0$$

Insgesamt müssen also in unserem gesuchten Punkt $M = (x_1^*, x_2^*)$ folgende drei Gleichungen erfüllt sein:

$$\boxed{\begin{array}{lll} 1. & 0 = & f_{x_1}(x_1^*, x_2^*) - \lambda\, \phi_{x_1}(x_1^*, x_2^*) \\ 2. & 0 = & f_{x_2}(x_1^*, x_2^*) - \lambda\, \phi_{x_2}(x_1^*, x_2^*) \\ 3. & 0 = & \phi(x_1^*, x_2^*) \end{array}}$$

Betrachtet man die **drei** Gleichungen für die **drei** Unbekannten x_1^*, x_2^* und λ so stellt man fest: Ihre rechten Seiten sind gerade die partiellen Ableitungen der Funktion

$$F(x_1, x_2, \lambda) \quad = \quad f(x_1, x_2) - \lambda\, \phi(x_1, x_2)$$

nach x_1, x_2 und λ. Das bringt uns zu einer kompakten Formulierung des oben konstruierten Algorithmus, die wir im folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 1 (Lagrange'sche Multiplikatorregel für 2 Variablen)
Zur Bestimmung der Extremwerte einer Funktion $y = f(x_1, x_2)$ *mit der Nebenbedingung* $\phi(x_1, x_2) = 0$ *bildet man die* *Lagrange-Funktion*

$$F(x_1, x_2, \lambda) \quad = \quad f(x_1, x_2) - \lambda\, \phi(x_1, x_2).$$

Aus dem Gleichungssystem (drei Gleichungen und drei Unbekannte)

$$\begin{aligned} F_{x_1} &= 0 \\ F_{x_2} &= 0 \\ F_\lambda &= 0 \end{aligned}$$

werden dann die Koordinaten des möglichen Extremwertes sowie der Lagrange-Multiplikator berechnet.

Aufgabe 3.1 *In der Literatur wird das Verhältnis der partiellen Ableitungen von Ziel- und Nebenbedingungsfunktion oft auch mit* $-\lambda$ *abgekürzt:*

$$\frac{f_{x_1}}{\phi_{x_1}} = -\lambda \qquad \frac{f_{x_2}}{\phi_{x_2}} = -\lambda.$$

Das führt zu einer anderen Lagrange-Funktion $F_{neu}(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda\, \phi(x_1, x_2)$. *Überlegen Sie sich, dass* F *und* F_{neu} *die selben Extremalpunktkandidaten liefern.*

Beispiel 3.1 *Bestimmen Sie alle mögliche Extremalstellen der Funktion* $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ *unter der Nebenbedingung* $\phi(x,y) = y - x^2 + 1 = 0$.

Lösungsskizze

- *Lagrange-Funktion*

$$F(x,y,\lambda) \;=\; x^2 + 2y^2 - \lambda \cdot (y - x^2 + 1)$$

- *Partielle Ableitungen der Lagrange-Funktion*

$$\begin{aligned} F_x &= 2x + 2\lambda x \;=\; 2x(1+\lambda) \\ F_y &= 4y - \lambda \\ F_\lambda &= -(y - x^2 + 1) \end{aligned}$$

- *Lösen der drei Gleichungen*

$$\begin{array}{rrcl} I & 0 &=& 2x(1+\lambda) \\ II & 0 &=& 4y - \lambda \\ III & 0 &=& y - x^2 + 1 \end{array}$$

Gleichung I bedeutet $x = 0$ *oder* $\lambda = -1$.

  * $x = 0$ *in Gleichung III:* $y + 1 \;=\; 0$ *oder* $y = -1$. *Mit Gleichung II folgt dann noch* $\lambda = -4$. *Ein erster Lösungskandidat ist somit*

$$(0,-1) \qquad \textit{mit} \qquad \lambda = -4$$

  * $\lambda = -1$ *in Gleichung II:* $y = -\frac{1}{4}$. *Setzen wir das in Gleichung III ein, folgt*

$$-\frac{1}{4} - x^2 + 1 \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 \;=\; \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x \;=\; \sqrt{\frac{3}{4}} \;\textit{oder}\; -\sqrt{\frac{3}{4}}$$

Damit erhalten wir zwei weitere Lösungskandidaten:

$$\begin{array}{rcc} \left(\sqrt{\frac{3}{4}}, -\frac{1}{4}\right) & \qquad \textit{mit} \qquad & \lambda = -1 \\ \left(-\sqrt{\frac{3}{4}}, -\frac{1}{4}\right) & \qquad \textit{mit} \qquad & \lambda = -1 \end{array}$$

4 *Ergänzungen und Verallgemeinerungen*

Ergänzung 1 Warum berühren sich die Nebenbedingungskurve und die Niveaulinie im Punkt (x_1^*, x_2^*)?

Beweis:

Falls $\phi_{x_2}(x_1^*, x_2^*) \neq 0$ ist, lässt sich die Funktion $\phi(x_1, x_2) = 0$ lokal (in der Nähe von x_1^*) nach x_2 auflösen: $x_2 = h(x_1)$ und es gilt dann $\phi(x_1, h(x_1)) = 0$.

- Damit gilt einerseits für die Nebenbedingung

$$\begin{aligned} 0 &= \phi'(x_1, h(x_1))|_{x_1=x_1^*} \\ &= \phi_{x_1}(x_1^*, h(x_1^*)) + \phi_{x_2}(x_1^*, h(x_1^*)) \cdot h'(x^*) \\ &= \phi_{x_1}(x_1^*, x_2^*) + \phi_{x_2}(x_1^*, x_2^*) \cdot h'(x_1^*) \end{aligned}$$

  oder

$$h'(x_1^*) = -\frac{\phi_{x_1}(x_1^*, x_2^*)}{\phi_{x_2}(x_1^*, x_2^*)}.$$

- Nutzen wir diese lokale Darstellung von x_2, so nimmt unsere Zielfunktion die Gestalt

$$F(x_1) = f(x_1, h(x_1))$$

  an und eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Maximums oder Minimums in x_1^* ist

$$\begin{aligned} 0 &= F'(x_1)|_{x_1=x_1^*} \\ &= f_{x_1}(x_1^*, h(x_1^*)) + f_{x_2}(x_1^*, h(x_1^*)) \cdot h'(x_1^*) \\ &= f_{x_1}(x_1^*, x_2^*) + f_{x_2}(x_1^*, x_2^*) \cdot h'(x_1^*) \end{aligned}$$

  oder

$$h'(x_1^*) = -\frac{f_{x_1}(x_1^*, x_2^*)}{f_{x_2}(x_1^*, x_2^*)}$$

Durch Kombination beider Gleichungen erhält man nun

$$\frac{f_{x_1}(x_1^*, x_2^*)}{f_{x_2}(x_1^*, x_2^*)} = \frac{\phi_{x_1}(x_1^*, x_2^*)}{\phi_{x_2}(x_1^*, x_2^*)}.$$

□

Ergänzung 2 Die Methode von Lagrange liefert **notwendige, aber nicht hinreichende** Bedingungen für das Vorliegen eines Extremum und sie gibt uns keine Möglichkeit, zwischen Maximum und Minimum zu unterscheiden. Ohne Beweis geben wir eine **hinreichende** Bedingung an:

Satz 2

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & \phi_{x_1} & \phi_{x_2} \\ \phi_{x_1} & f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ \phi_{x_2} & f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{vmatrix}}_{Determinante} = 2\phi_{x_1}\phi_{x_2}f_{x_1x_2} - f_{x_1x_1}\phi_{x_2}^2 - f_{x_2x_2}\phi_{x_1}^2 \quad \begin{cases} > 0 & \textit{Maximum} \\ < 0 & \textit{Minimum} \end{cases}$$

Ergänzung 2 Die Lagrange'sche Multiplikatorregel lässt sich direkt auf Funktionen in mehreren Variablen mit einer Nebenbedingung übertragen:

Satz 3 (Lagrange'sche Multiplikatorregel für n Variablen)
Zur Bestimmung der Extremwerte einer Funktion $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ mit der Nebenbedingung $\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ bildet man die Lagrange-Funktion in $n+1$ Variablen

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \lambda\, \phi(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Aus dem Gleichungssystem ($n+1$ Gleichungen und $n+1$ Unbekannte)

$$\begin{aligned} F_{x_1} &= 0 \\ F_{x_2} &= 0 \\ \cdots & \quad \cdots \\ F_{x_n} &= 0 \\ F_\lambda &= 0 \end{aligned}$$

werden dann die Koordinaten des möglichen Extremwertes sowie der Lagrange-Multiplikator berechnet.

5 Der Einhüllendensatz

In vielen ökonomischen Problemen fällt auf, dass die zu optimierenden Funktionen nicht nur Variablen haben, über die zu maximieren oder minimieren ist, sondern auch (fest gegebene bzw. nicht von mir zu beeinflussende) Parameter wie z.B. Preise und Löhne. Obwohl diese Parameter meist als fest angenommen werden, kann man sich natürlich fragen, wie die berechneten Maxima bzw. Minima von der Wahl dieser Parameter abhängen.

Beispiel 5.1 *Nehmen wir an, dass eine Firma x Einheiten eines Gutes produziert und verkauft. Der Erlös ist dann eine Funktion des Preises p für eine Einheit des Gutes $E(x) = p \cdot x$ und die Kosten seien durch die Kostenfunktion $K(x) = x^2$ beschrieben. Hier ist p der Parameter. Der Gewinn wird dann durch die Funktion*

$$G(x) \;=\; G(x,p) \;=\; E(x) - K(x) \;=\; p \cdot x - x^2$$

gegeben. Die Gewinnfunktion hat für $x^* = p/2$ ein Maximum (prüfen Sie das nach!). Genau genommen ist x^* eine Funktion des Preises p, d.h. wir können $x^* = x^*(p) = p/2$ schreiben. Auch der maximale Gewinn $G^* = G^*(p)$ ist eine Funktion des Parameters p:

$$G^*(p) \;=\; p \cdot x^* - (x^*)^2 \;=\; p \cdot \frac{p}{2} - \frac{p^2}{4} \;=\; \frac{p^2}{4}.$$

Allgemein:

Die Funktion f hänge von der (einzigen) Variablen x und einem Parameter p ab. Natürlich kann man p selbst als Variable betrachten und deshalb schreiben wir einfach $f(x,p)$. In dieser Schreibweise ist ersichtlich, dass uns für die Untersuchung von f alle Möglichkeiten der Differentialrechnung für Funktionen in zwei Veränderlichen zur Verfügung stehen.

Nun soll f bzgl. x maximiert (bzw. minimiert) werden und im Allgemeinen wird der Wert x^*, der f maximiert von p abhängen. Wir bezeichnen das durch $x^* = x^*(p)$.

Setzen wir $x^*(p)$ in $f(x,p)$ ein, so erhalten wir die so gemannte <u>Optimalwertfunktion</u>

$$f^*(p) \;=\; f(x^*(p),p)$$

Was geschieht mit dieser Funktion, wenn sich der Parameter p ändert? Mit der Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp}\, f^*(p) \;&=\; \frac{d}{dp}\, f(x^*(p),p) \\
&=\; f_x(x^*(p),p)\,\frac{dx^*(p)}{dp} + f_p(x^*(p),p)\,\frac{dp}{dp} \\
&=\; f_x(x^*(p),p)\,\frac{dx^*(p)}{dp} + f_p(x^*(p),p)
\end{aligned}$$

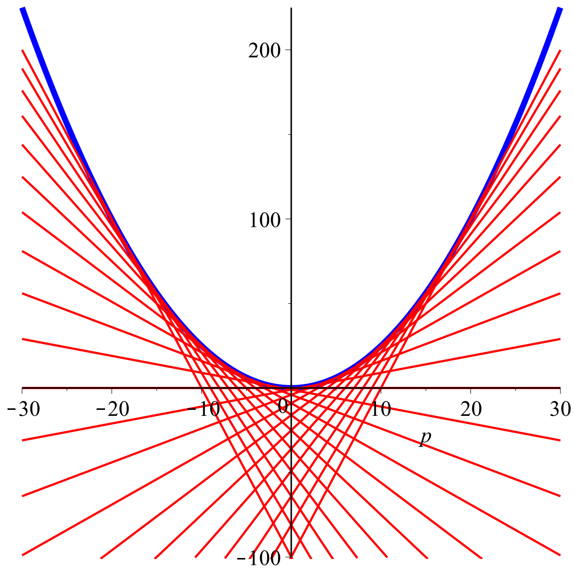
Falls f nun ein (lokales) Extrema in einem inneren Punkt $x^*(p)$ im Definitionsbereich der Variablen x hat, so gilt sicher $f_x(x^*(p),p) = 0$ und es folgt

$$\boxed{\frac{d}{dp}\, f^*(p) \;=\; f_p(x^*(p),p)}$$

Beispiel 5.2 *Warum ,,Einhüllendensatz,,?*
Für feste Stückzahlen x betrachten wir die Funktionen $G(x,p) = px - x^2$. Die Graphen dieser Funktionen (für jede Wahl von x) in der p-G-Ebene sind dann Geraden.

x	*Gerade*
1	$G(x=1,p) = p-1$
2	$G(x=2,p) = 2p-4$
3	$G(x=3,p) = 3p-9$
4	$G(x=4,p) = 4p-16$

Zeichnen wir einige dieser Geraden (die Skizzen enthalten auch Geraden für negative Werte von x, die keine ökonomische Bedeutung haben), so entsteht das folgende Bild:



Man erkennt am Bild, dass alle diese Geraden von einem neuen Funktionsgraphen **eingehüllt** *werden. Dieser Graph gehört zur Optimalwertfunktion $G^*(p) = p^2/4$. Das kann man wie folgt einsehen:*

1. *Für alle x und alle p gilt natürlich*
$$G(x,p) \quad \leq \quad G^*(p)$$
d.h. keine der Geraden wird jemals oberhalb des Graphen von $G^*(p)$ liegen.

2. *Für jeden Preis p muss es weiterhin mindestens einen Wert x^* geben, so dass*
$$G(x^*,p) \quad = \quad G^*(p)$$
gilt. Das ist natürlich der Wert $x^* = x^*(p)$, der das Maximierungsproblem für den gegebenen Preis p löst.

3. *Der Graph von $G(x^*,p)$ wird dann den von $G^*(p)$ gerade im Punkt $(x^*, G(x^*,p)) = (x^*, G^*(p))$ berühren. Beide Graphen haben somit auch die selbe Tangente in diesem Punkt.*

Diese Regel kann direkt verallgemeinert werden.

Satz 4 *Sei $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ eine (stetig differenzierbare) Funktion für $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ (n Variablen) und $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ (m Parameter). Weiterhin seien wieder*

- $\mathbf{x}^*(\mathbf{p})$ *die Lösung des Maximierungsproblems*
- $f^*(\mathbf{p}) = f(\mathbf{x}^*(\mathbf{p}), \mathbf{p})$ *die Optimalwertfunktion.*

Dann gilt für alle $i = 1, \ldots, n$:

$$\boxed{\frac{\partial f^*}{\partial p_i}(\mathbf{p}) \;=\; \frac{\partial f}{\partial p_i}(\mathbf{x}^*(\mathbf{p}), \mathbf{p})}$$

Beispiel 5.3 *Wir betrachten die Gewinnfunktion einer Firma*

$$G(K, A; p_1, p_2, p_3) \;=\; p_1 \cdot K^{3/4} A^{1/4} - p_2 \cdot K - p_3 \cdot A$$

wobei K und A Kapital- bzw. Arbeitsinput, p_1 der Stückpreis des produzierten Gutes und p_2 und p_3 die Preise für Kapital und Arbeit sind. Was besagt der Einhüllendensatz, wenn Sie G bezüglich K und A maximieren?

Lösungsskizze:

- *Optimaler Kapital- und Arbeitseinsatz:*

$$K^* \;=\; K^*(p_1, p_2, p_3) \qquad \textit{und} \qquad A^* \;=\; A^*(p_1, p_2, p_3)$$

- *Optimalwertfunktion:*

$$G^* \;=\; G(K^*, A^*, p_1, p_2, p_3) \;=\; G^*(p_1, p_2, p_3)$$

- *Einhüllendensatz bezüglich p_1:*

$$\frac{\partial G^*}{\partial p_1}(p_1, p_2, p_3) \;=\; (K^*)^{3/4}\,(A^*)^{1/4}$$

- *Einhüllendensatz bezüglich p_2:*

$$\frac{\partial G^*}{\partial p_2}(p_1, p_2, p_3) \;=\; -K^*$$

  Erhöht sich der Preis p_2 um 1 schrumpft der Gewinn um etwa K^*.

- *Einhüllendensatz bezüglich p_3:*

$$\frac{\partial G^*}{\partial p_3}(p_1, p_2, p_3) \;=\; -A^*$$

  Erhöht sich der Preis p_3 um 1 schrumpft der Gewinn um etwa A^*.

6 Deutung des Lagrange-Multiplikators

Wir betrachten wieder das Problem

$$\begin{aligned} \text{Zielfunktion} \quad &: y = f(x_1, x_2) \\ \text{Nebenbedingung} \quad &: g(x_1, x_2) = c \end{aligned}$$

in leicht abgewandelter Form. Dabei bringen wir die additive Konstante in der Funktion ϕ auf die rechte Seite. Wir wollen untersuchen was passiert, wenn wir die Konstante c ändern.

Die Lösung dieses Problems (x_1^*, x_2^*) und auch der zugehörige Lagrange-Multiplikator werden im Allgemeinen von c abhängen. Es gilt also

$$(x_1^*, x_2^*) \;=\; (x_1^*(c), x_2^*(c)) \qquad \text{und} \quad \lambda \;=\; \lambda(c)$$

und die Optimalwertfunktion ist

$$f^*(c) \;=\; f(x_1^*(c), x_2^*(c))$$

Satz 5 *Der Lagrange-Multiplikator ist die Rate, mit der sich der optimale Wert der Zielfunktion bezüglich der Änderung von c in der Nebenbedingung ändert.*

$$\boxed{\frac{df^*(c)}{dc} \;=\; \lambda(c)}$$

Beweis:

Mit der Kettenregel und unter Ausnutzung der Zusammenhänge von Zielfunktion und Nebenbedingung in Optimalpunkten folgt:

$$\begin{aligned} \frac{df^*(c)}{dc} &= f_{x_1}(x_1^*, x_2^*)\,\frac{dx_1^*}{dc} + f_{x_2}(x_1^*, x_2^*)\,\frac{dx_2^*}{dc} \\ &= \lambda \cdot g_{x_1}(x_1^*, x_2^*)\,\frac{dx_1^*}{dc} + \lambda \cdot g_{x_2}(x_1^*, x_2^*)\,\frac{dx_2^*}{dc} \\ &= \lambda\,\frac{dg(x_1^*, x_2^*)}{dc} \\ &= \lambda\,\frac{dc}{dc} \;=\; \lambda \end{aligned}$$

$\square$

Ist nun insbesondere dc eine kleine Änderung von c, dann gilt:

$$\boxed{\Delta f^*(c, dc) \;=\; f^*(c + dc) - f^*(c) \;\approx\; df^*(c, dc) \;=\; \lambda(c)\,dc}$$

Beispiel 6.1 *Wir untersuchen die Funktion* $u(c_1, c_2) = 5\ln(c_1+3) + \ln(c_2+1)$ *unter der Nebenbedingung* $\phi(c_1, c_2) = 2c_1 + c_2 - I = 0$. *Insbesondere wollen wir den Einfluss von* I *auf die optimale Lösung besser verstehen.*

Zunächst lösen wir das Problem mit Hilfe der Methode von Lagrange:

- *Lagrange-Funktion*

$$F(c_1, c_2, \lambda) = 5\ln(c_1+3) + \ln(c_2+1) - \lambda(2c_1 + c_2 - I)$$

- *Partielle Ableitungen der Lagrange-Funktion*

$$\begin{aligned} F_{c_1} &= \frac{5}{c_1+3} - 2\lambda \\ F_{c_2} &= \frac{1}{c_2+1} - \lambda \\ F_\lambda &= -(2c_1 + c_2 - I) \end{aligned}$$

- *Lösen der drei Gleichungen*

$$\begin{aligned} I \qquad 0 &= \frac{5}{c_1+3} - 2\lambda \\ II \qquad 0 &= \frac{1}{c_2+1} - \lambda \\ III \qquad 0 &= 2c_1 + c_2 - I \end{aligned}$$

  Gleichung II in I ergibt $c_2 = \frac{2c_1+1}{5}$ *(Gleichung IV). Setzen wir das in III ein, folgt* $0 = 2c_1 + c_2 - I$ *oder*

$$c_1^* = c_1^*(I) = \frac{5}{12}I - \frac{1}{12}.$$

  Mit IV folgt sofort:

$$c_2^* = c_2^*(I) = \frac{1}{6}I + \frac{1}{6}.$$

  Mit II können wir auch λ *durch* I *ausdrücken:*

$$\lambda = \lambda(I) = \frac{6}{I+7}.$$

- *Die Optimalwertfunktion, die uns den maximalen Nutzen im Falle des optimalen Konsumplans ausgibt, ist dann ebenfalls eine Funktion von* I*:*

$$\begin{aligned} u^*(I) = u(c_1^*, c_2^*) &= 5\ln\left(\frac{5}{12}I - \frac{1}{12} + 3\right) + \ln\left(\frac{1}{6}I + \frac{1}{6} + 1\right) \\ &= 5\ln\left(\frac{5}{12}I + \frac{35}{12}\right) + \ln\left(\frac{1}{6}I + \frac{7}{6}\right) \end{aligned}$$

- *Tatsächlich gilt (Prüfen Sie das!):*

$$\frac{du^*(I)}{dI} = \frac{6}{I+7} = \lambda$$

  und wie immer:

$$\Delta u^*(I, dI) = u^*(I+dI) - u^*(I) \approx \frac{du^*(I)}{dI}\, dI = \frac{6}{I+7}\, dI$$

7 Testfragen zur Vorlesung

Hinweis: Bevor Sie die Übungsaufgaben lösen, sollten Sie den Stoff der Vorlesung verstanden haben. Insbesondere sollten Sie die folgenden einfachen Fragen beantworten können. Diese Fragen werden im Allgemeinen nicht in den Übungen besprochen, können aber prüfungsrelevant sein.

1. Nennen Sie die allgemeine Formulierung eines Extremwertproblems mit Nebenbedingung.
2. Erläutern Sie die Reduktionsmethode. Ist diese Methode immer anwendbar? Begründung!
3. Welche Eigenschaft haben die Kurve $\phi(x_1, x_2) = 0$ und $f(x, y) = f(x_1^*, x_2^*)$ in einem Optimalpunkt $M = (x_1^*, x_2^*)$?
4. Was ist die Lagrange-Funktion und der Lagrange-Multiplikator?
5. Beschreiben Sie die Lagrange-Methode zur Bestimmung von lokalen Extrempunkten unter Nebenbedingung.
6. Was besagt der Einhüllendensatz?
7. Welche Bedeutung hat der Lagrange-Multiplikator?

8 Übungsaufgaben

8.1 Niveau 1 und 2

Gegeben sei eine Produktionsfunktion $P = P(K, A)$ vom Cobb-Douglas-Typ und eine Kostenfunktion $C = C(K, A)$:

$$P(K, A) \;=\; 10\; K^{1/4}\; A^{3/4} \qquad\qquad C(K, A) \;=\; 2K + 6A.$$

1. Für welche Produktionsfaktorkombination (K, A) werden die Kosten $C(K, A)$ minimal, falls 80 Einheiten produziert werden sollen?

2. Es soll eine möglichst grosse Menge P produziert werden, wobei für die Gesamtkosten $C(K, A)$ genau Fr. 1'000.- zur Verfügung stehen.

8.2 Niveau 2

1. Gegeben sei das Optimierungsproblem $f(x, y) = xy^2 - 3e^y$, $x > 0$ unter der Nebenbedingung $\phi(x, y) = y - \ln(x) = 0$.

   (a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Lagrange-Methode die möglichen Extremalstellen.

   (b) Klären Sie mit Hilfe der Reduktionsmethode, ob ein lokales Maximum vorliegt.

2. Bestimmen Sie die globalen Extremwerte der Funktion

   $$f(x, y) \;=\; x^2 - y^2$$

   auf der Kreisscheibe $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$. Können Sie sich den Graphen von f vorstellen und die Lösungen erraten?

   Hinweis: Innere Punkte von B und Randpunkte getrennt untersuchen.

8.3 Niveau 3

Ein Konsument mit der Nutzenfunktion $u(c_1, c_2) = c_1^a \cdot c_2^b$ muss die Budgetrestriktion $p_1c_1 + p_2c_2 = I$, $p_1, p_2 > 0$ einhalten. Sei (c_1^*, c_2^*) ein optimaler Konsumplan, wobei

$$c_1^* \;=\; c_1^*(a, b, p_1, p_2, I) \qquad \text{und} \qquad c_2^* \;=\; c_2^*(a, b, p_1, p_2, I).$$

1. Zeigen Sie die Gültigkeit der notwendigen Bedingung

   $$\frac{2}{3}\frac{c_2^*}{c_1^*} \;=\; \frac{p_1}{p_2}.$$

2. Bestimmen Sie c_1^* und c_2^*.

3. Bestimmen Sie die Optimalwertfunktion u^*.

4. Bestimmen Sie $\dfrac{du^*}{dI}$.

Lösungen der Übungsaufgaben

Niveau 1

1. Hinweis: Zielfunktion ist $C(K, A) = 2K + 6A$ und Nebenbedingung $P(K, A) = 10K^{1/4}A^{3/4} = 80$

   $K = A = 8, \;\; C_{min} = 64$

2. Hinweis: Zielfunktion ist $P(K, A) = 10K^{1/4}A^{3/4}$ und Nebenbedingung $C(K, A) = 2K + 6A = 1000$

   $K = A = 125, \;\; P_{max} = 1250$

Niveau 2

1. Hinweis: Es gilt $y = \ln x \;\leftrightarrow\; e^y = x$

   Lokales Maximum bei $(e^{-3}, -3)$ und lokales Minimum bei $(e, 1)$

2. (Lösungsskizze) Im Inneren der Kreisscheibe muss für ein (lokales) Extema $f_x(x, y) = 2x = 0$ und $f_y(x, y) = -2y = 0$ gelten und das ist nur für den Punkt $(0, 0)$ erfüllt. (Mittels der zweiten partiellen Ableitungen könnte man zeigen, dass dieser Punkt kein Extremwert von f ist. Das ist aber nicht nötig.)

   Auf dem Rand haben wir ein Extremwertproblem (Zielfunktion ist f) mit Nebenbedingung $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Mit der Lagrange-Funktion $F(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ erhält man neben der Kreisgleichung die beiden notwendigen Bedingungen $F_x = 2x - 2x\lambda = 0$ und $F_y = -2y - 2y\lambda = 0$. Lösungspunkte sind $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (0, -1)$, $P_3 = (1, 0)$ und $P_4 = (-1, 0)$, wobei P_1 und P_2 Minima sind und P_3 und P_4 Maxima.

Kandidat (x, y)	$f(x, y)$
$(0, 0)$	
$(0, 1)$	
$(0, -1)$	
$(1, 0)$	
$(-1, 0)$	

Niveau 3

-