Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

Mathematik 1

Dr. Thomas Zehrt

Integration I

Inhaltsverzeichnis

1 Bestimmte Integrale

1.1 Herleitung

Gegeben sei eine auf dem Intervall $[a, b]$ nicht-negative und beschränkte Funktion f, d.h. es gibt reelle Zahlen m und M, so dass für alle $x \in [a, b]$ die folgende Ungleichung gilt: $0 < m \leq f(x) \leq M$.

Frage: Welche Fläche ist zwischen der x-Achse, den vertikalen Grenzen $x = a$ und $x = b$ und der Kurve $y = f(x)$ eingeschlossen?

Antwort: Wir teilen das Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle gleicher Länge $l = \dfrac{b-a}{n}$ ein, indem wir $n - 1$ Zwischenpunkte einfügen:

$$\underbrace{a = a + 0 \cdot l}_{=x_0} < \underbrace{a + 1 \cdot l}_{x_1} < \underbrace{a + 2 \cdot l}_{x_2} < \ldots < \underbrace{a + (n-1) \cdot l}_{x_{n-1}} < \underbrace{b = a + n \cdot l}_{x_n}.$$

Das Intervall wird also in die n Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ für $i = 1, \ldots, n$ zerlegt.

Wir bemerken, dass es nicht notwendig ist, hier nur in Teilintervalle gleicher Länge zu zerlegen. Wichtig ist nur, dass die maximale Teilintervalllänge gegen Null konvergiert, falls $n \to \infty$.

Für jedes dieser Teilintervalle definieren wir das Minimum und das Maximum der Funktion f auf diesem Intervall

$$\begin{aligned} m_i &= \text{Minimum von } f \text{ auf } [x_{i-1}, x_i] \\ M_i &= \text{Maximum von } f \text{ auf } [x_{i-1}, x_i] \end{aligned}$$

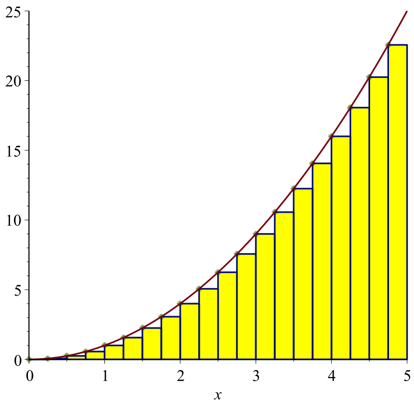
und wir definieren die folgenden beiden Summen, die Näherungslösungen für die gesuchte Fläche sind.

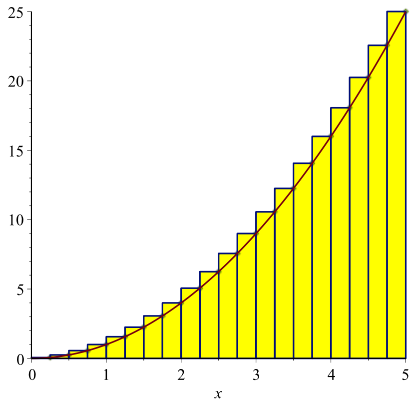
<u>Untersumme</u>

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=l}$$

<u>Obersumme</u>

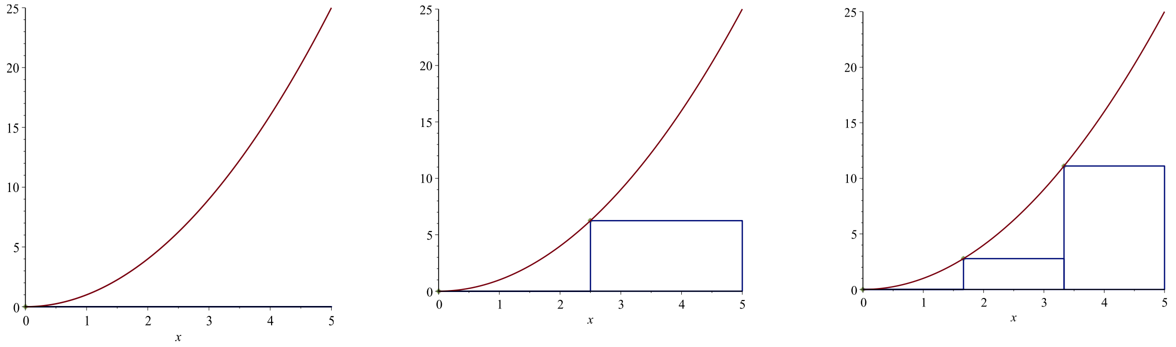
$$O_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=l}$$





Beispiel 1.1 *Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[0, 5]$.*

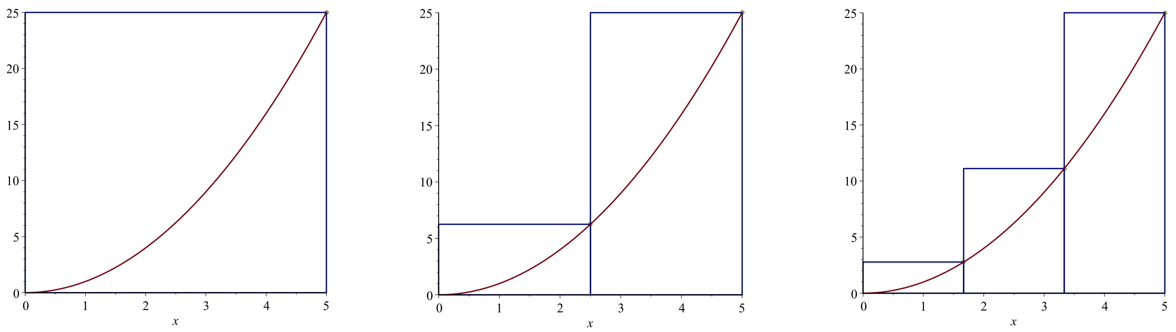
Hier sehen Sie die Untersummen U_1, U_2 und U_3:



Es gilt:

$$
\begin{aligned}
U_1 &= 0^2 \cdot 5 \\
U_2 &= 0^2 \cdot 2.5 + 2.5^2 \cdot 2.5 \\
U_3 &= 0^2 \cdot 1.\bar{6} + 1.\bar{6}^2 \cdot 1.\bar{6} + 3.\bar{3}^2 \cdot 1.\bar{6}
\end{aligned}
$$

Hier sehen Sie die Obersummen O_1, O_2 und O_3:



Es gilt:

$$
\begin{aligned}
O_1 &= 1^2 \cdot 5 \\
O_2 &= 2.5^2 \cdot 2.5 + 5^2 \cdot 2.5 \\
O_3 &= 1.\bar{6}^2 \cdot 1.\bar{6} + 3.\bar{3}^2 \cdot 1.\bar{6} + 5^2 \cdot 1.\bar{6}
\end{aligned}
$$

Mit dem globalen Maximum M und dem globalen Minimum m von f gilt somit

$$m(b-a) \;\leq\; U_n \;\leq\; F \;\leq\; O_n \;\leq\; M(b-a)$$

die beiden Folgen $(U_n)_{n\geq 1}$ und $(O_n)_{n\geq 1}$ sind also beschränkt. Ausserdem sind beide monoton, genauer gesagt ist $(U_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend und $(O_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend. Beide Folgen sind somit konvergent, müssen aber im Allgemeinen nicht den gleichen Grenzwert haben!

Definition 1.1 *Falls*

$$\lim_{n\to\infty} U_n \;=\; \lim_{n\to\infty} O_n$$

gilt, so heisst dieser gemeinsame Grenzwert (der dann die Masszahl der gesuchten Fläche ist) das bestimmte Integral und wir schreiben:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Von zentraler Bedeutung ist in diesem Zusammenhang das folgende Resultat:

Satz 1 *Ist die Funktion f stetig, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} U_n \;=\; \lim_{n\to\infty} O_n \;=\; \int_a^b f(x)dx.$$

Insbesondere existieren alle vorkommenden Grenzwerte.

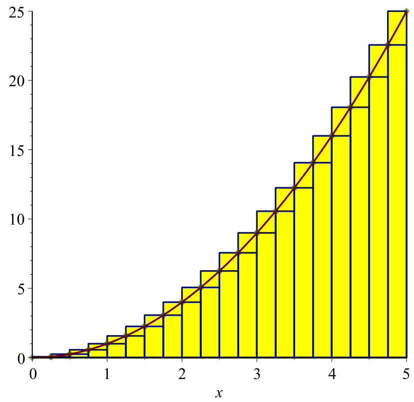
Bemerkung: Um die Grenzwerte der Unter- bzw. Obersummen zu berechnen wäre es extrem hilfreich, wenn man diese langen Summen kompakter schreiben bzw. zu einfacheren Ausdrücken umformen könnte. Hilfreich sind dabei die folgenden Formeln, die man in der Schule gerne durch Induktion beweist:

$$\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+n &= \frac{n(n+1)}{2}\\
1+2^2+3^2+\cdots+n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
1+q+q^2+\ldots+q^n &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{für } q\neq 1
\end{aligned}$$

Beispiel 1.2 *Wir betrachten die Funktion $y = x^2$ und berechnen die Ober- und Untersumme der Funktion auf dem Intervall $[0, b]$. Es gilt*

$$\begin{aligned}
U_n &= \frac{b}{n}\left(\frac{0 \cdot b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n}\left(\frac{1 \cdot b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n}\left(\frac{2 \cdot b}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{b}{n}\left(\frac{(n-1) \cdot b}{n}\right)^2 \\
&= \frac{b^3}{n^3}\left(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2\right) \\
&= \frac{b^3}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&= \frac{b^3}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \qquad \textit{also} \lim_{n\to\infty} U_n = \frac{b^3}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O_n &= \frac{b}{n}\left(\frac{b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n}\left(\frac{2b}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{b}{n}\left(\frac{nb}{n}\right)^2 \\
&= \frac{b^3}{n^3}\left(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right) \\
&= \frac{b^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{b^3}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \qquad \textit{also} \lim_{n\to\infty} O_n = \frac{b^3}{3}
\end{aligned}$$



Beide Grenzwerte sind gleich und man folgert leicht:

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3} \qquad \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} \qquad \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

1.2 Eigenschaften des bestimmten Integrals

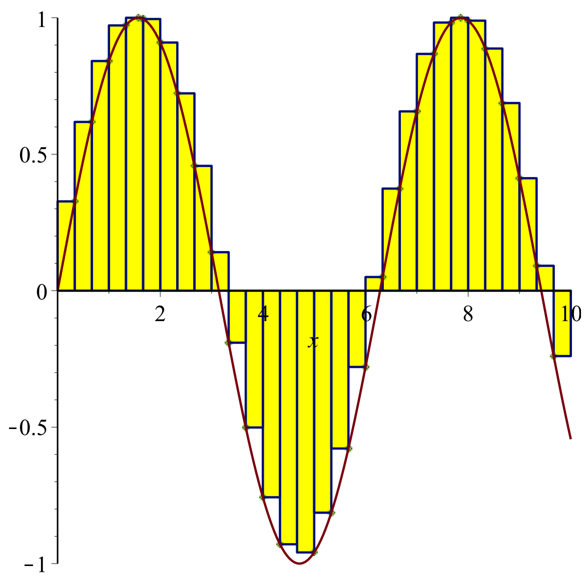
1. Es genügt vorauszusetzen, dass f stückweise stetig ist:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

2. Nimmt die Funktion auch negative Werte an, so ist der folgende Sachverhalt zu beachten: Das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

ist die Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse, **wobei Flächenstücke unterhalb der x-Achse negativ gezählt werden**. Die Maxima bzw. Minima der Funktion auf den entsprechenden Teilintervallen sind negativ, damit geht der Flächeninhalt der ensprechenden Rechtecke auch negativ in die Unter- bzw. Obersummen ein.



3.

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$$

4.

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

5.

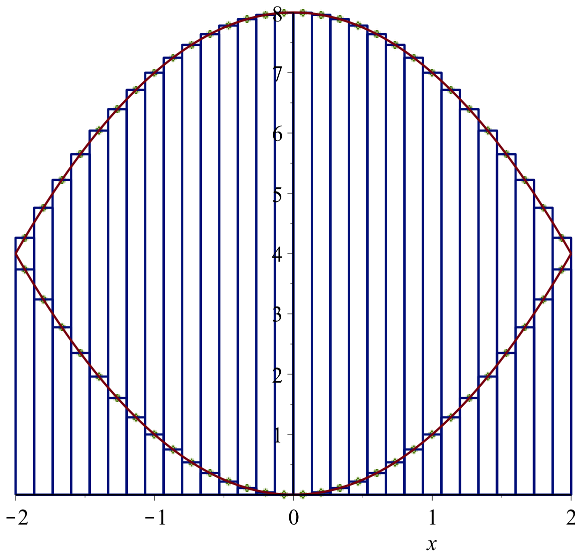
$$\int_a^a f(x)dx \quad = \quad 0.$$

6.

$$\int_a^b f(x)dx \quad = \quad -\int_b^a f(x)dx$$

7. Für den Inhalt der Fläche F, die von den Graphen der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossen wird, gilt

$$area(F) \quad = \quad \left| \int_a^b (f(x) - g(x))dx \right|.$$



2 Das unbestimmte Integral

Definition 2.1 *Eine Funktion $y = F(x)$ heisst* <u>*Stammfunktion*</u> *der Funktion $y = f(x)$, falls $F'(x) = f(x)$ gilt.*

Beispiel 2.1 *Man findet schnell eine Stammfunktion F für die Funktion $f(x) = x$, denn es gilt*

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{2x}{2} = x,$$

also ist $\frac{x^2}{2}$ eine Stammfunktion von f. Ebenfalls gilt für jede Zahl (Konstante) c

$$\left(\frac{x^2}{2} + c\right)' = \frac{2x}{2} = x,$$

also ist auch jede Funktion der Gestalt $\frac{x^2}{2} + c$ eine Stammfunktion von f.

Verschiedene Stammfunktionen einer Funktion $y = f(x)$ unterscheiden sich nur um eine additive Konstante. Die Menge aller Stammfunktionen von $y = f(x)$ nennt man <u>unbestimmtes Integral</u> und schreibt

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Beispiel 2.2

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln(|x|) + c$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$$

3 Zusammenhang zwischen bestimmten und unbestimmten Integral

3.1 Integralfunktionen

Der Zahlenwert $\int_a^b f(x)\,dx$ lässt sich als (Netto)flächeninhalt der Fläche zwischen x-Achse und Funktionsgraph zwischen den beiden Grenzen $x = a$ und $x = b$ interpretieren. Hält man die untere Integrationsgrenze a fest und variiert die obere Integrationsgrenze b, so erhält man für jeden Wert b genau einen (Netto)flächeninhalt $\int_a^b f(x)\,dx$. Um diese Variation besser verdeutlichen zu können ersetzt man b durch die Variable x und ersetzt die Integrationsvariable (was eigentlich nicht nötig ist, aber hoffentlich Missverständnissen vorbeugt) durch einen anderen Buchstaben, hier t.

Definition 3.1 *Die Funktion f sei auf einem Intervall I stetig und $a, x \in I$. Dann heisst die Funktion*

$$I_a(x) \quad = \quad \int_a^x f(t)\,dt \qquad \longleftarrow \textit{bestimmtes Integral}$$

Integralfunktion zu f (und a).

Bemerkungen

- Für positives f und $x > a$ lässt sich $I_a(x)$ als variabler Flächeninhalt unter dem Graphen von f ansehen.
- Je nach Festlegung der unteren Integrationsgrenze gibt es verschiedene Integralfunktionen für f.

Beispiel 3.1 *Sei $f(x) = x^2$ (oder $f(t) = t^2$). Wir wissen bereits aus der Einführung des bestimmten Integrals, dass folgendes gilt:*

$$\int_a^b x^2 dx \quad = \quad \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Damit folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned} I_3(x) \quad &= \quad \int_3^x t^2\,dt \;=\; \frac{1}{3}x^3 - 9 \\ I_0(x) \quad &= \quad \int_0^x t^2\,dt \;=\; \frac{1}{3}x^3 \\ I_a(x) \quad &= \quad \int_a^x t^2\,dt \;=\; \frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{3} \end{aligned}$$

Bemerkungen

An diesem Beispiel kann man folgendes erkennen:

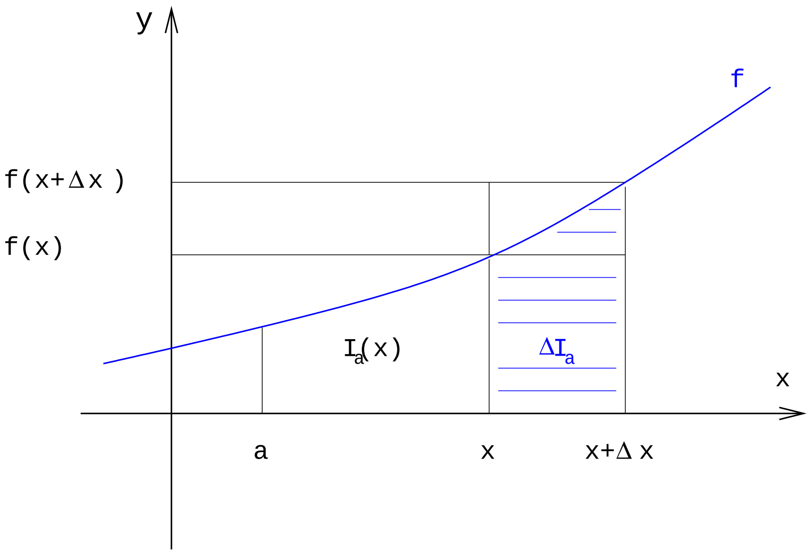
- Alle Integralfunktionen unterscheiden sich nur um eine additive Konstante.
- Die Ableitungen liefern die Ausgangsfunktion x^2 zurück.

3.2 Der Hauptsatz der Integralrechnung

Sei $y = f(x)$ eine stetige Funktion und a ein Punkt im Definitionsbereich. Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass f monoton wachsend ist. Wir definieren wieder die Integralfunktion

$$I_a(x) \;=\; I(x) \;=\; \int_a^x f(t)dt$$

d.h. die obere Grenze der Integration wird als Variable angesehen. Geometrisch misst $I_a(x)$ immernoch den Flächeninhalt zwischen der Kurve und der x-Achse.



Gesucht: Wir wollen nun die Ableitung der Funktion $I_a(x)$ bestimmen, d.h. wir suchen

$$I_a'(x) \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I_a}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{I_a(x+\Delta x) - I_a(x)}{\Delta x}.$$

Lösung: Es gelten zunächst die Ungleichungen (vergleiche Skizze)

$$f(x)\Delta x \;\leq\; \Delta I_a \;\leq\; f(x+\Delta x)\Delta x \qquad \text{oder} \qquad f(x) \;\leq \frac{\Delta I_a}{\Delta x} \leq\; f(x+\Delta x)$$

Wegen der Stetigkeit von f ist ausserdem

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) \;=\; f(x)$$

und somit folgt $f(x) \;\leq I_a'(x) \leq\; f(x)$ also

Satz 2 (Hauptsatz der Integralrechnung)

$$\boxed{\frac{dI_a(x)}{dx} \;=\; I_a'(x) \;=\; f(x).}$$

Das bedeutet, dass $I_a(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist und das für jede reelle Zahl a. Dieser Satz gibt uns ein einfaches Mittel, bestimmte Integrale zu berechnen. Natürlich vorausgesetzt, wir kennen eine Stammfunktion von f.

Es sei $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $y = f(x)$, also ist

$$F(x) \;=\; I_a(x) + c \;=\; \int_a^x f(t)dt + c$$

Damit folgt:

$$F(b) - F(a) \;=\; I_a(b) + c - (\underbrace{I_a(a)}_{=0} + c) \;=\; I_a(b) \;=\; \int_a^b f(t)dt$$

Satz 3 *Für das bestimmte Integral gilt*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \;=\; \int_a^b f(t)dt \;=\; F(b) - F(a).}$$

für eine beliebige Stammfunktion F von f.

Beispiel 3.2

1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx \;=\; -\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \;=\; -\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(0) \;=\; 1.$$

2. Was halten Sie von der folgenden Rechnung

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}dx \;=\; -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{2} \;=\; -\frac{1}{2} + 1 \;=\; \frac{1}{2} \;\;???$$

4 Uneigentliche Integrale

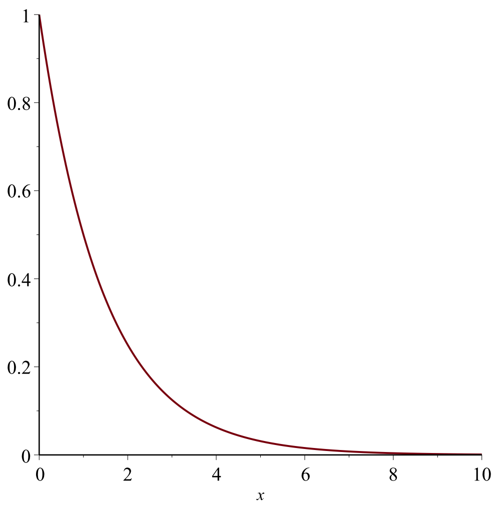
4.1 Fragestellung

Gegeben sei eine auf dem rechts (bzw. links) offenen Intervall $[a, b)$ (resp. $(a, b]$) erklärte und stetige Funktion $y = f(x)$. Wir wollen zunächst den Begriff des bestimmten Integrals erweitern, um eine Möglichkeit zu haben

- Funktionen, deren Integrand $f(x)$ bei der Annäherung $x \to b$ (resp. $x \to a$) nicht beschränkt ist, und
- Funktionen über unbeschränkte Integrationsintervalle $[a, \infty)$ (resp. $(-\infty, b]$)

zu integrieren.

Beispiel 4.1 *Ist es sinnvoll, nach dem Integral* $\int_0^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^x \, dx$ *zu fragen? Wir fragen also, wie gross der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von* $f(x) = 2^{-x}$ *und der gesamten nicht-negativen* x*-Achse ist.*



Sicher ist dieses Gebiet unbeschränkt (es endet rechts nie), allerdings werden die Flächenzuwächse, wenn wir Schritt für Schritt auf der x*-Achse nach rechts schreiten, immer kleiner. Ein notwendiges (aber nicht hinreichendes) Kriterium dafür, dass das obige Integral (einer strikt positiven Funktion) endlich ist, sollte*

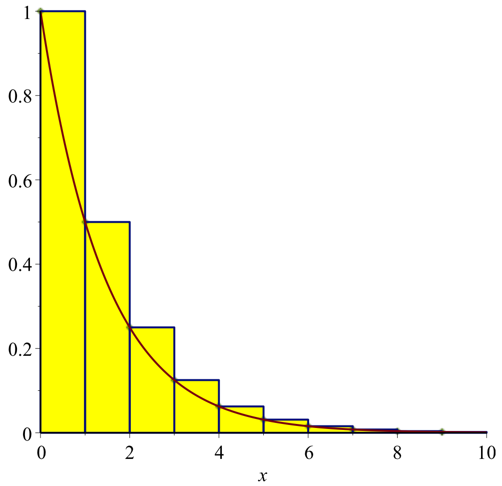
$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad = \quad 0$$

sein. Ist das so?

Mit gutem Gewissen können wir also nur sagen, dass

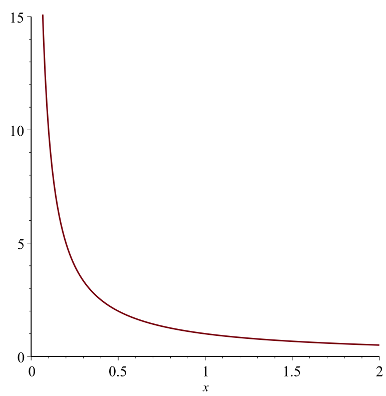
$$0 \; < \; \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^x dx \; \leq \; \infty.$$

Folgende Überlegung, bei der wir eine spezielle Obersumme konstruieren und die Summenformel der geometrischen Reihe nutzen zeigt aber, dass das obige Integral recht klein ist:



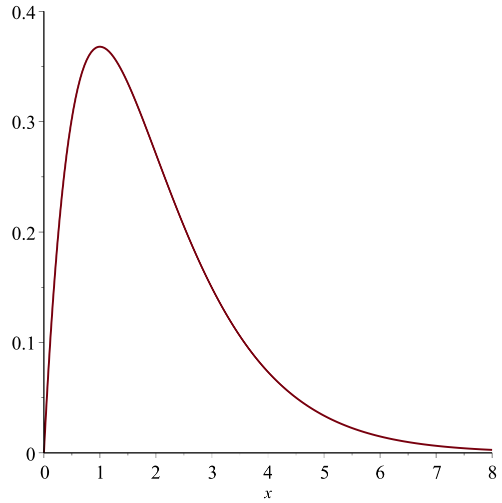
$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^x dx \; < \; \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 + \ldots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - 1/2} = 2.$$

Beispiel 4.2 *Welchen Wert hat das Integral* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$*?*



Zunächst ist nicht klar, wie man diese Frage überhaupt verstehen soll. Geometrisch misst das Integral den Fächeninhalt unter der Kurve der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$*, welche allerdings im Nullpunkt eine Polstelle hat. Intuitiv könnten hier zwei Dinge passieren: entweder der Flächeninhalt ist unendlich gross (da die Funktion unendlich wächst) oder der Flächeninhalt ist endlich (da das zwar unendliche Wachstum der Funktion durch die schnelle Annäherung an die y-Achse kompensiert wird).*

Beispiel 4.3 *Welchen Wert hat das Integral* $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$*?*



Intuitiv könnten auch hier zwei Dinge passieren: entweder der Flächeninhalt ist unendlich gross (da das Intervall unendlich lang ist) oder der Flächeninhalt ist endlich (da die unendliche Intervalllänge durch die schnelle Annäherung an die x*-Achse kompensiert wird). Zumindest gilt auch hier*

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} \quad = \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \quad = \quad 0$$

Definition 4.1 *Die folgenden Ausdrücke werden als uneigentliche Integrale bezeichnet:*

$f(x)$ *für* $x \to b$ *nicht beschränkt:*	$\int_a^b f(x)\,dx$	$=$	$\lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx$
$f(x)$ *für* $x \to a$ *nicht beschränkt:*	$\int_a^b f(x)\,dx$	$=$	$\lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,dx$
unbeschränktes Intervall $[a,\infty)$*:*	$\int_a^\infty f(x)\,dx$	$=$	$\lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)\,dx$
unbeschränktes Intervall $(-\infty,b]$*:*	$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$	$=$	$\lim_{c\to-\infty} \int_c^b f(x)\,dx$

Ein uneigentliches Integral konvergiert (bzw. divergiert), wenn der zugehörige Grenzwert existiert (bzw. nicht existiert).

4.2 Die Vergleichsfunktionen

Die Funktionen der Gestalt

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$ sind in der Theorie der uneigentlichen Integrale von besonderer Bedeutung. Ihr Konvergenzverhalten lässt sich schnell bestimmen und sie werden gerne als Vergleichsfunktionen genutzt. Eine direkte Rechnung führt zu den folgenden Resultaten.

1. $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to\infty} \ln(c) = \infty \\ \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{c\to 0+} \int_c^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0+} (-\ln(c)) = \infty \end{aligned}$$

2. $\alpha < 1$

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx &= \lim_{c\to\infty} \frac{1}{\alpha-1}\left[1 - \frac{1}{c^{\alpha-1}}\right] = \infty \\ \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx &= \lim_{c\to 0+} \frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{c^{\alpha-1}} - 1\right] = \frac{1}{1-\alpha} \end{aligned}$$

3. $\alpha > 1$

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx &= \lim_{c\to\infty} \frac{1}{\alpha-1}\left[1 - \frac{1}{c^{\alpha-1}}\right] = \frac{1}{\alpha-1} \\ \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx &= \lim_{c\to 0+} \frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{c^{\alpha-1}} - 1\right] = \infty \end{aligned}$$

Beispiel 4.4

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \lim_{c\to\infty}\left(2\cdot x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^c\right) = \lim_{c\to\infty}(2\cdot\sqrt{c} - 2) = \infty$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \lim_{c\to 0+}\left(2\cdot x^{\frac{1}{2}}\Big|_c^1\right) = \lim_{c\to 0+}(2 - 2\cdot\sqrt{c}) = 2.$

5 *Integrationstechniken*

Man sagt:

„die Differentiation gehört zum Handwerk, die Integration zur Kunst".

Die Ableitung einer Funktion, die sich aus den „elementaren" Funktionen (Polynome, rationale Funktionen, Winkelfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen) zusammensetzt, kann man mit den bekannten Regeln direkt berechnen. Anders verhält es sich bei der Integration. Man kann zwar mit geschickten Ansätzen (einige davon werden wir im Folgenden kennenlernen) neben den Grundintegralen noch zahlreiche weitere Integrale berechnen, doch sehr viele Integranden wiedersetzen sich allen Tricks. Sie besitzen nachweislich **keine aus den elementaren Funktionen zusammengesetzte Stammfunktion**!

In diesen Fällen liefert das Integral

$$F(x) = \int_a^x f(u)du$$

neue, noch nicht bekannte Funktionen.

Einige Beispiele:

- Der Integralsinus $(0 \leq x < \infty)$

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(u)}{u} du$$

- Die Fehlerfunktion $(0 \leq x < \infty)$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

- Die elliptischen Integrale und die elliptischen Funktionen $(0 \leq x < \infty)$

$$F(x,k) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2(u)}} \, du$$

$$E(x,k) = \int_0^x \sqrt{1-k^2\sin^2(u)} \, du$$

5.1 Partielle Integration

Es sei $f(x) = u(x) \cdot v(x)$. Aus der Produktregel folgt:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} = f'(x) &= u'(x)\ v(x) + u(x)\ v'(x) \\ df &= u'(x)\ v(x)dx + u(x)\ v'(x)dx \end{aligned}$$

Integrieren wir diese Gleichung, so ergibt sich

$$f = \int u'(x)\ v(x)dx + \int u(x)\ v'(x)dx$$

oder

Satz 4

$$\boxed{\int u'(x)\ v(x)dx = u(x)\ v(x) - \int u(x)\ v'(x)dx}$$

Interpretation: Um ein Integral $\int g(x)dx$ zu bestimmen, zerlege man $g(x)$ so in Faktoren $u'(x)$ und $v(x)$, dass $u(x)\ v'(x)$ leichter zu integrieren ist als $u'(x)\ v(x)$.

Praktisches Vorgehen am Beispiel
Wir wollen das unbestimmte Integral

$$\int \underbrace{x}_{v(x)} \underbrace{\sin(x)}_{u'(x)} dx$$

berechnen. Wir setzen also

$$\begin{aligned} u'(x) &= \sin(x) \quad \text{und somit} \quad u(x) = -\cos(x) \\ v(x) &= x \quad \text{und somit} \quad v'(x) = 1 \end{aligned}$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} \int x\ \sin(x)dx &= u(x)\ v(x) - \int u(x)\ v'(x)dx \\ &= -\cos(x)x + \int \cos(x)dx \\ &= -\cos(x)x + \sin(x) + c. \end{aligned}$$

5.2 Integration durch Substitution

Es sei $F(g(x))$ eine verkettete Funktion wobei $F(x)$ eine Stammfunktion der Funktion $f(x)$ sei, d.h. es gilt $F'(x) = f(x)$. Aus der Kettenregel folgt:

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) \;=\; F'(g(x))\,g'(x) \;=\; f(g(x))\,g'(x)$$

und nach Integration dieser Gleichung ergibt sich

Satz 5
Unbestimmtes Integral:

$$\boxed{\int f(g(x))\,g'(x)dx \;=\; \int \frac{d}{dx}F(g(x))dx \;=\; F(g(x)) + c.}$$

Interpretation: Zu integrieren ist ein Produkt zweier Funktionen, von denen die eine die Ableitung der inneren Funktion der anderen ist.
Bestimmtes Integral:

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))\,g'(x)dx \;=\; F(g(b)) - F(g(a)) \;=\; \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.}$$

Praktisches Vorgehen am Beispiel
Wir wollen das unbestimmte Integral

$$\int \underbrace{2x}_{g'(x)}\underbrace{\cos(x^2)}_{f(g(x))}\,dx$$

berechnen. Also

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 = u \quad \text{und} \quad f(u) \;=\; \cos(u) \\ F(u) &= \sin(u) \quad (\text{Stammfunktion von } f(u)) \end{aligned}$$

und mit dem obigen Satz ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int 2x\cos(x^2)dx &= F(g(x)) + c \;=\; \sin(x^2) + c \\ \int_a^b 2x\cos(x^2)dx &= F(g(b)) - F(g(a)) \;=\; \sin(b^2) - \sin(a^2) \end{aligned}$$

6 Testfragen zur Vorlesung

Hinweis: Bevor Sie die Übungsaufgaben lösen, sollten Sie den Stoff der Vorlesung verstanden haben. Insbesondere sollten Sie die folgenden einfachen Fragen beantworten können. Diese Fragen werden im Allgemeinen nicht in den Übungen besprochen, können aber prüfungsrelevant sein.

1. Erklären Sie die Begriffe bestimmtes Integral, Ober- und Untersumme.
2. Nennen Sie Eigenschaften des bestimmten Integrals.
3. Erklären Sie die Begriffe unbestimmtes Integral und Stammfunktion.
4. Was ist eine Integralfunktion?
5. Was besagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung? Können Sie diesen Satz für monotone Funktionen beweisen?
6. Was versteht man unter einem uneigentlichen Integral?
7. Sei f eine strikt positive Funktion. Warum muss $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ gelten, damit $\int_0^\infty f(x)dx$ endlich ist?
8. Ist es sinnvoll nach $\int_0^\infty \sin(x)dx$ zu fragen?

7 Übungsaufgaben

7.1 Niveau 1

1. Gegeben sind die drei Funktionen $y = \frac{1}{2}x,\ y = -\frac{1}{2}x$ und $y = \frac{1}{16}x^2 + 1$.

   (a) Skizzieren Sie alle drei Funktionsgraphen. Insbesondere sollte man an der Skizze erkennen könne, wo sich die einzelnen Graphen schneiden bzw. berühren.

   (b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von den drei Graphen eingeschlossen wird.

2. $\int_0^{\pi/2} \sin(2t)\, dt$

   Skizzieren Sie den Graphen des Integranden. Berechnen Sie dann das bestimmte Integral.

3. $\int_0^{\pi} |\cos(x)|\, dx$

   Skizzieren Sie den Graphen des Integranden (Betrag beachten!). Berechnen Sie dann das bestimmte Integral.

4. Welche der folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren? Berechnen Sie deren Wert.

   (a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$

   (b) $\int_0^{1} \frac{1}{x^3}\, dx$

   (c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2/3}}\, dx$

   (d) $\int_0^{1} \frac{1}{x^{1/3}}\, dx$

   (e) $\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx$

7.2 Niveau 2

1. Die Grenzkosten $c(x)$ sind als Funktion des Outputs x gegeben $c(x) = 2e^{0.2x}$. Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion $C(x)$ bei vorgegebenen Fixkosten $C_F = 90$.

2. Gegeben sei die Grenzkostenfunktion $K'(x) = 5x^2 - 10.5x + 17$. Bei einer produzierten Menge von $x = 10$ Einheiten entstehen Kosten in Höhe von $2000.-$.

   (a) Bestimmen Sie die Gesamt- sowie die Durchschnittskostenfunktion.

   (b) Wie gross sind die Fixkosten?

7.3 Niveau 3

1. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale. Versuchen Sie eine Stammfunktion zu erraten (durch Ableiten bestätigen!), falls die gesuchte Funktion nicht in der Formelsammlung zu finden ist.

   (a) $\displaystyle\int_0^2 2xe^{2x}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_1^e \ln(x)\,dx$

2. In einer theoretischen Abhandlung zur Investitionsrechnung wird die Funktion

$$W(T) \;=\; \frac{K}{T}\int_0^T e^{-\rho t}\,dt$$

   für $T > 0$ (K und ρ sind positive Konstanten) verwendet. Berechnen Sie das Integral und beweisen Sie dann, dass $W(T)$ Werte im Intervall $(0, K)$ annimmt und streng monoton fallend ist.

Lösungen der Übungsaufgaben

Niveau 1

1. (a) -
   (b) 8/3
2. 1
3. 2
4. $1/2, \quad \infty, \quad \infty, \quad 3/2, \quad 1$

Niveau 2

1. $C(x) = 10e^{0.2x} + 80$
2. Gesamtkosten: $K(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{21}{4}x^2 + 17x + \frac{2065}{3}$
   Durchschnittskosten: $k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{5}{3}x^2 - \frac{21}{4}x + 17 + \frac{2065}{3x}$
   Fixkosten: $\frac{2065}{3}$

Niveau 3

1. $a)$ $0.5(1+3e^4)$, $b)$ 1
2. Die ersten 10 richtigen und vollständigen Lösungen dieser Aufgabe erhalten einen Buchpreis. Einsendungen (pdf, jpeg,...) an thomas.zehrt@unibas.ch.