Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

Mathematik 1

Dr. Thomas Zehrt

Integration II

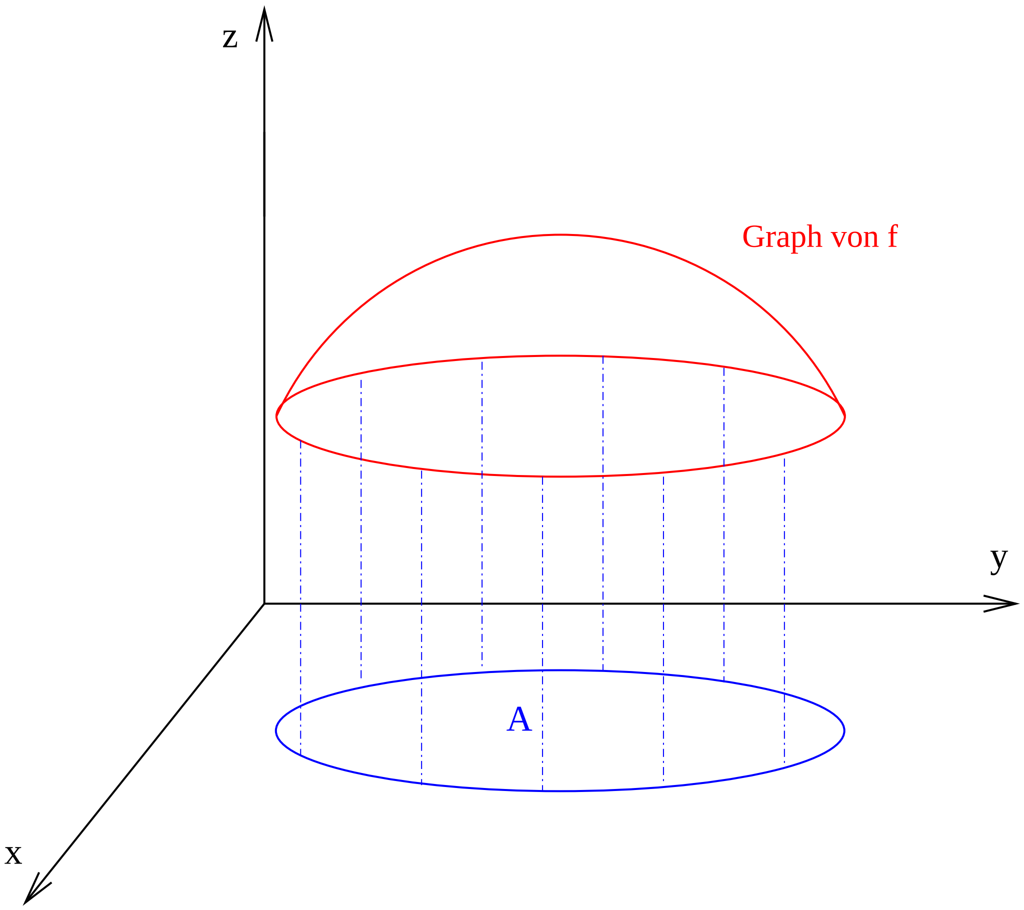
Inhaltsverzeichnis

1 Doppelintegrale

1.1 Herleitung

Wir wollen das Doppelintegral in anschaulicher Weise anhand eines geometrischen Problems einführen. Wir werden erkennen, dass das Doppelintegral, analog zum einfachen (bestimmten) Integral, (Raum)Inhalte von Gebieten zwischen der Grundebene und dem Graphen einer Funktion $z = f(x, y)$ bestimmt.

Sei $z = f(x, y)$ eine auf A definierte und stetige Funktion mit $f(x, y) \geq 0$. Wir betrachten den im folgenden Bild dargestellten, zylindrischen Körper.



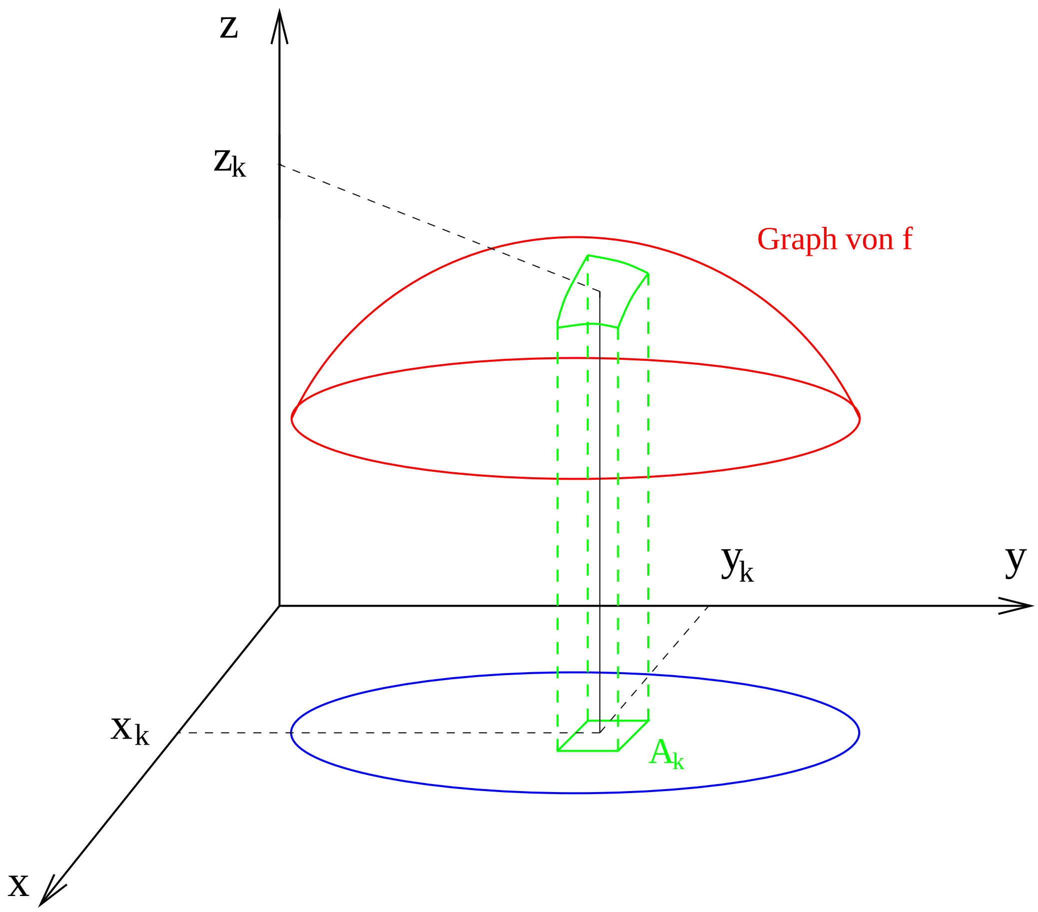
- „Boden" $= A$
- „Deckel" $=$ Graph von f über A
- „Mantel" $=$ auf dem Rand von A errichtete senkrechte Strecken

Wir wollen das Volumen V dieses zylindrischen Körpers bestimmen.

Vorgehen

1. Der Bereich A wird in n Teilbereiche $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mit den zugehörigen Flächeninhalten $\Delta A_1, \Delta A_2, \ldots, \Delta A_n$ zerlegt. Ausserdem wählen wir in jedem Teilbereich A_k irgendeinen Punkt $(x_k, y_k) \in A_k$. Der zylindrische Körper zerfällte dann in n Röhren.

2. Wir betrachten nun (irgend)eine dieser Röhren, z.B. die k-te Röhre.



- Ihr Boden ist eben mit dem Flächeninhalt ΔA_k.
- Ihr Deckel ist Teil des Graphen von f, also gekrümmt.
- Das Volumen V_k dieser Röhre ist ungefähr so gross wie

$$V_k \approx f(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k = z_k \cdot \Delta A_k$$

- Mit den übrigen Röhren verfahren wir in gleicher Art und erhalten:

$$V = \sum_{k=1}^{n} V_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k$$

- Dieser Näherungswert kann verbessert werden, wenn die Anzahl der Röhren erhöht wird. Im Grenzfall $n \to \infty$ strebt die Fläche jedes Teilbereichs A_k gegen 0.

Definition 1.1 *Der Grenzwert*

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta A_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\cdot \Delta A_k$$

heisst (falls er existiert) Doppelintegral und wird bezeichnet durch

$$\iint\limits_A f(x,y)\, dA.$$

1.2 Eigenschaften des Doppelintegrals

Volumen Ist $f(x,y) \geq 0$ für alle $(x,y) \in A$, dann stellt

$$\iint\limits_A f(x,y)\, dA$$

das Volumen des senkrecht auf der Grundebene stehenden Zylinderabschnittes mit Grundfläche A und Deckfläche $z = f(x,y)$ dar.

Flächeninhalt Mit $f(x,y) = 1$ ist

$$\iint\limits_A dA$$

der Flächeninhalt von A. (Oder: Das Volumen des senkrecht auf der Grundebene stehenden Zylinderabschnittes mit Grundfläche A und Deckfläche $z = 1$)

Linearität

$$\iint\limits_A (a\cdot f + b\cdot g)\, dA \;=\; a\cdot \iint\limits_A f\, dA \;+\; b\cdot \iint\limits_A g\, dA$$

Monotonie Falls für die beiden Funktionen f und g die Relation $f(x,y) \leq g(x,y)$ für alle $(x,y) \in A$ gilt, so gilt auch

$$\iint\limits_A f\, dA \;\leq\; \iint\limits_A g\, dA$$

Additivität Falls sich A durch eine (stückweise reguläre) Kurve in zwei Teilbereiche A_1 und A_2 zerlegen lässt, gilt

$$\iint\limits_A f\, dA \;=\; \iint\limits_{A_1} f\, dA + \iint\limits_{A_2} f\, dA$$

1.3 Berechnung eines Doppelintegrals für Rechtecke

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass das Doppelintegral

$$\iint\limits_A f(x,y)\, dA.$$

durch zwei nacheinander auszuführende, gewöhnliche Integrationen berechnet werden kann, falls der Integrationsbereich

$$A \;=\; [a,b]\times[c,d] \;=\; \{\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b \text{ und } c\le y\le d\ \}$$

ein Rechteck ist. Das Problem der Berechnung des Doppelintegrals wird durch den folgenden Satz gelöst, bzw. auf zwei Integrationen bzgl. einer Variablen zurückgeführt.

Satz 1 (Satz von Fubini) *Sei* $A = [a,b]\times[c,d]$ *ein Rechteck und* $z = f(x,y)$ *stetig auf* A*. Dann ist die Integralfunktion*

$$F(x) \;:=\; \int_c^d f(x,y)\, dy \;=\; \int_c^d f(x,t)\, dt$$

stetig auf $[a,b]$ *und*

$$\boxed{\iint\limits_A f(x,y)\, dA \;=\; \int_a^b F(x)\, dx \;=\; \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy\right) dx \;=\; \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx\right) dy}$$

Beispiel 1.1 *Sei* $f(x,y) = x + y^2$ *und* $a = 1$*,* $b = 2$*,* $c = 0$ *und* $d = 3$ *also*

$$A \;=\; \{\ (x,y) \mid 1\le x\le 2 \text{ und } 0\le y\le 3\ \}.$$

$$\begin{aligned}
\iint\limits_A x + y^2\, dA \;&=\; \int_1^2 \left(\int_0^3 \left(x+y^2\right) dy\right) dx \\
&=\; \int_1^2 \left(\left[\ xy + \frac{1}{3}y^3\ \right]_{y=0}^{y=3} \right) dx \\
&=\; \int_1^2 (3x+9\ )\ dx \;=\; \frac{27}{2}
\end{aligned}$$

1.4 Berechnung eines Doppelintegrals für Normalbereiche

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass das Doppelintegral

$$\int\!\!\int_A f(x,y)\, dA.$$

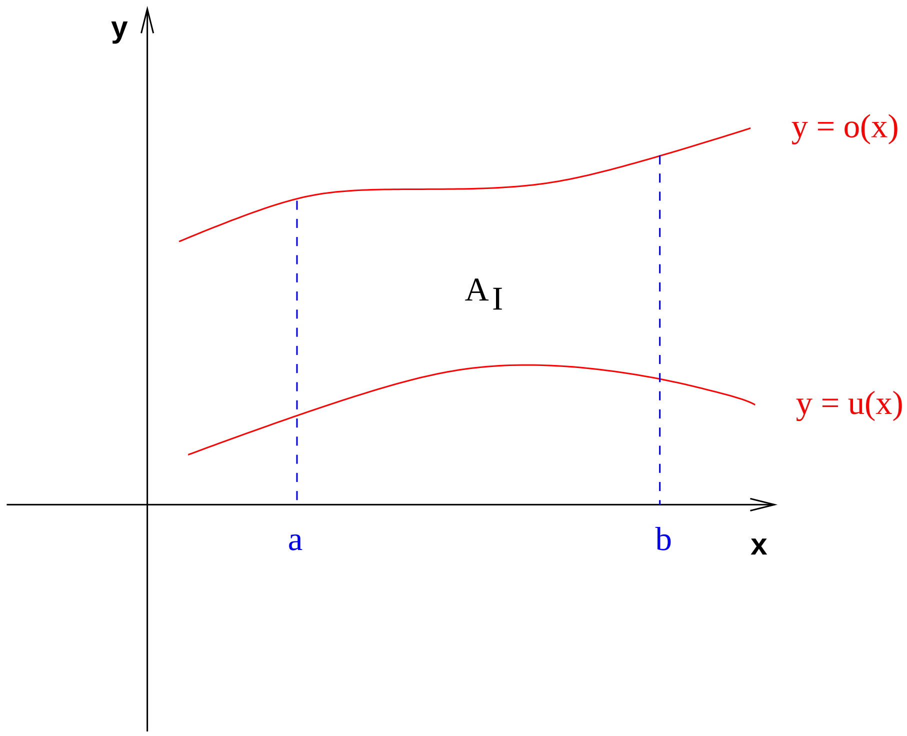
auch für allgemeinere Bereiche A durch zwei nacheinander auszuführende, gewöhnliche Integrationen berechnet werden kann. Dabei soll der Integrationsbereich A stets ein so genannter Normalbereich sein.

Definition 1.2 *Wir nennen eine Teilmenge $A_I \in \mathbb{R}^2$ einen Normalbereich vom Typ I, wenn es $a, b \in \mathbb{R}$ und stetig differenzierbare Funktionen*

$$\begin{aligned} u : [a,b] &\to \mathbb{R} \\ o : [a,b] &\to \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit $u(x) \leq o(x)$ gibt, so dass

$$A_I = \{ (x,y) \mid a \leq x \leq b \text{ und } u(x) \leq y \leq o(x) \}$$



Satz 2 (Integration über Normalbereiche vom Typ I) *Für stetige Funktionen f auf einem Normalbereich A_I vom Typ I gilt*

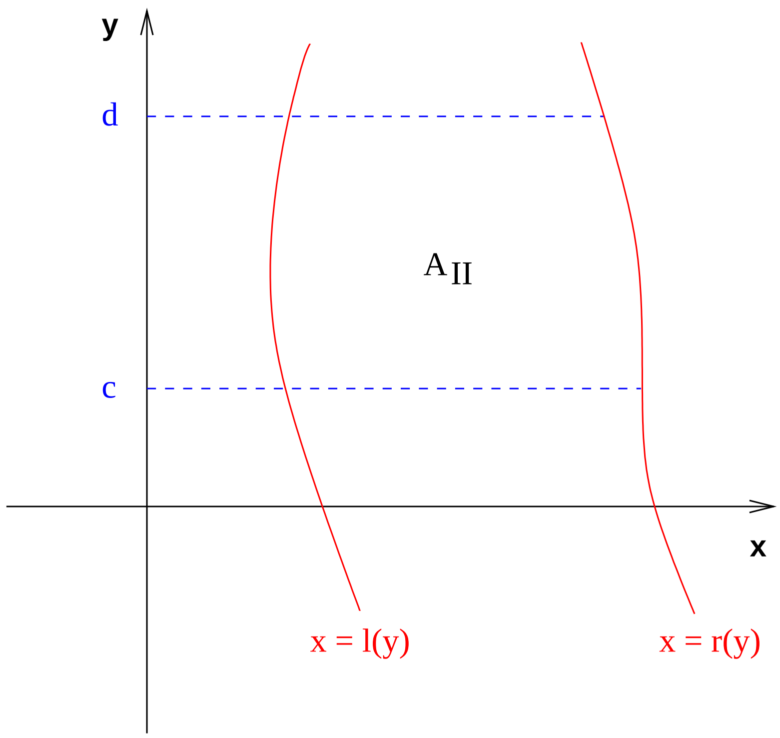
$$\int\!\!\int_{A_I} f(x,y)\, dA = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{o(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$

Wir nennen eine Teilmenge $A_{II} \in \mathbb{R}^2$ einen Normalbereich vom Typ II, wenn es $c, d \in \mathbb{R}$ und stetig differenzierbare Funktionen

$$\begin{aligned} l : [c,d] &\to \mathbb{R} \\ r : [c,d] &\to \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit $l(x) \leq r(x)$ gibt, so dass

$$A_{II} = \{ (x,y) \mid l(y) \leq x \leq r(y) \text{ und } c \leq y \leq d \}$$

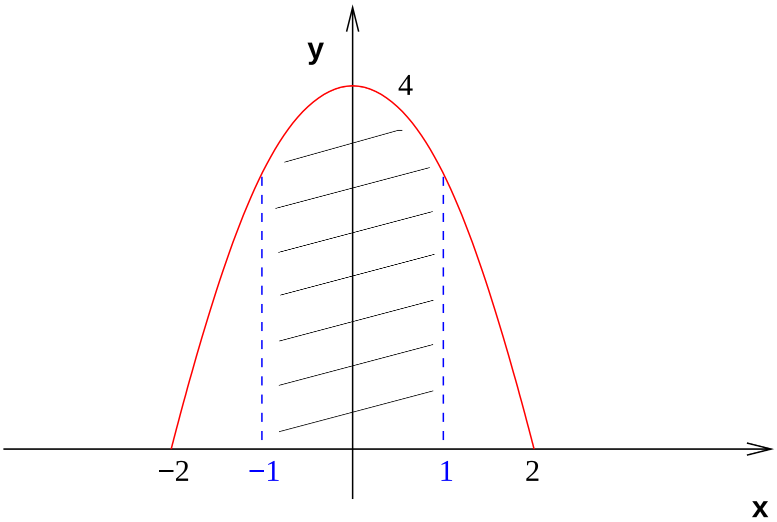


Satz 3 (Integration über Normalbereiche vom Typ II) *Für stetige Funktionen f auf einem Normalbereich A_{II} vom Typ II gilt*

$$\int\int_{A_{II}} f(x,y)\, dA = \int_c^d \left(\int_{l(y)}^{r(y)} f(x,y)\, dx \right) dy$$

Beispiel 1.2 *Sei $a = -1$, $b = 1$, $u(x) = 0$ und $o(x) = -x^2 + 4$ und $A = A_I$ der Normalbereich vom Typ I*

$$A = \{ (x,y) \mid -1 \le x \le 1 \text{ und } 0 \le y \le -x^2 + 4 \}$$



Der Flächeninhalt von A ist

$$\begin{aligned}
\iint_A dA &= \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{-x^2+4} dy \right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left([\, y \,]_{y=0}^{y=-x^2+4} \right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} (-x^2 + 4\,)\ dx \;=\; \frac{22}{3} \;\approx\; 7.3333
\end{aligned}$$

Nach der 1. Integration erhalten wir die wohlbekannte Formel zur Flächenberechnung unter Graphen von Funktionen in einer Veränderlichen.

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
\iint_A (x+y)\, dA &= \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{-x^2+4} (x+y)\, dy \right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\left[xy + \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=-x^2+4} \right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(x(-x^2+4) + \frac{1}{2}(-x^2+4)^2 - (0+0) \right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 8 \right) dx \\
&= \left[\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + 8x \right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{10} - \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + 2 + 8 - \left(-\frac{1}{10} - \frac{1}{4} + \frac{4}{3} + 2 - 8 \right) \;=\; \frac{406}{30} \;\approx\; 13.5333
\end{aligned}$$

2 Die Leibniz-Formel

2.1 Endliche Intervalle

Sei $z = f(x, y)$ eine Funktion und

$$F(x) \;=\; \int_c^d f(x,y)\,dy \;=\; \int_c^d f(x,t)\,dt.$$

Manchmal ist es nötig, Änderungen $\Delta F(x, \Delta x)$ dieser Funktion zu untersuchen. Hilfreich ist hier natürlich die Ableitung $F'(x)$. Sicher gilt

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \int_c^d \frac{f(x+\Delta x, t) - f(x,t)}{\Delta x}\,dt \\
&= \int_c^d \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, t) - f(x,t)}{\Delta x} \right) dt \\
&= \int_c^d f_x(x,t)\,dt
\end{aligned}$$

Im Allgemeineren Fall könnten auch die beiden Integrationsgrenzen Funktionen von x sein, also $c = c(x)$ und $d = d(x)$. Auch hier könnten wir daran interessiert sein, den Effekt der Variablenänderung Δx auf die Änderung der Funktion

$$F(x) \;=\; \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \;=\; \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,t)\,dt$$

zu untersuchen. Die Bestimmung der Ableitung F' gestaltet sich aber hier etwas komplizierter, denn auch die Integrationsgrenzen sind abhängig von x.

Satz 4 (Leibniz-Formel) *Seien*

- f *und* f_x *stetige Funktionen auf dem Rechteck* $[a, b] \times [c, d]$,
- $c = c(x)$ *und* $d = d(x)$ *differenzierbare Funktionen* $c, d : [a, b] \to [c, d]$ *und*
- $F(x) \;=\; \displaystyle\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,t)\,dt.$

Dann gilt

$$\boxed{F'(x) \;=\; f(x, d(x)) \cdot d'(x) - f(x, c(x)) \cdot c'(x) + \int_{c(x)}^{d(x)} f_x(x,t)\,dt.}$$

Beispiel 2.1 *Sei* $F(x) \;=\; \displaystyle\int_x^{x^2} \underbrace{\frac{1}{2}xt^2}_{=f(x,t)}\,dt$. *Dann gilt:*

$$F'(x) \;=\; \frac{1}{2}x(x^2)^2 \cdot 2x - \frac{1}{2}x(x)^2 \cdot 1 + \int_x^{x^2} \frac{1}{2}t^2\,dt \;=\; \frac{7}{6}x^6 - \frac{2}{3}x^3.$$

2.2 Unendliche Intervalle

Seien $f(x,t)$ und $f_x(x,t)$ stetige Funktionen für alle $x \in [a,b]$ und alle $t \geq c$. Weiterhin wollen wir annehmen, dass das Integral $\int_c^\infty f(x,t)\; dt$ für jedes $x \in [a,b]$ konvergiert, also endlich ist.

Weiterhin existiere eine Funktion $p(t)$ mit $\int_c^\infty p(t)\; dt < \infty$ und $|f_x(x,t)| \leq p(t)$ für alle $t \geq c$ und alle $x \in [a,b]$. Dann gilt

$$\frac{d}{dx} \int_c^\infty f(x,t)\; dt \quad = \quad \int_c^\infty f_x(x,t)\; dt.$$

Beispiel 2.2 *Sei* $\Gamma(x) \;=\; \displaystyle\int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1}\; dt.$

Tatsächlich konvergiert das Integral für jedes $x > 0$ *und auch die Funktion* f_x *hat die oben geforderten Eigenschaften. Somit folgt:*

$$\frac{d}{dx}\,\Gamma(x) \quad = \quad \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} \cdot \ln t\; dt.$$

3 Testfragen zur Vorlesung

Hinweis: Bevor Sie die Übungsaufgaben lösen, sollten Sie den Stoff der Vorlesung verstanden haben. Insbesondere sollten Sie die folgenden einfachen Fragen beantworten können. Diese Fragen werden im Allgemeinen nicht in den Übungen besprochen, können aber prüfungsrelevant sein.

1. Wie könnte man vorgehen, um das Volumen eines Bereichs näherungsweise zu berechnen, der vom Graphen einer Funktion $z = f(x, y)$ und eines Teils der Grundebene eingeschlossen wird?
2. Was ist ein Normalbereich?
3. Wie werden Doppelintegrale über Normalbereichen berechnet?
4. Was besagt die Leibniz-Formel?

4 Übungsaufgaben

4.1 Niveau 1

Sei $f(x, y) = x + 2y$ und $A = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 2 \leq y \leq 3 \}$.

1. Skizzieren Sie die Menge A.
2. Berechnen Sie
$$\iint_A dA.$$
3. Berechnen Sie
$$\iint_A f(x, y)\, dA.$$

4.2 Niveau 2

Sei $f(x, y) = x \cdot \cos(2y)$ und $A = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq \pi/4 \}$.

1. Skizzieren Sie die Menge A.
2. Berechnen Sie
$$\iint_A dA.$$
3. Berechnen Sie
$$\iint_A f(x, y)\, dA.$$

4.3 Niveau 3

Sei $f(x, y) = x \cdot y$ und $A = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ und } x \leq y \leq \sqrt{x} \}$.

1. Skizzieren Sie die Menge A.
2. Berechnen Sie
$$\iint_A dA.$$
3. Berechnen Sie
$$\iint_A f(x, y)\, dA.$$
4. Bestimmen Sie
$$\frac{d}{dx} \int_x^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy$$

Lösungen der Übungsaufgaben

Niveau 1

Fläche 1 und Volumen:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_A f(x,y)\,dA &= \int_2^3 \left(\int_0^1 (x+2y)dx\right) dy \\
&= \int_2^3 \left(\left[\frac{1}{2}x^2 + 2xy\right]_{x=0}^{x=1}\right) dy \\
&= \int_2^3 \left(\frac{1}{2} + 2y\right) dy \\
&= 5.5
\end{aligned}$$

Niveau 2

Fläche $\pi/4$ und Volumen $1/4$

Niveau 3

Fläche $1/6$ und Volumen $1/24$