Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Universität Basel

Mathematik 1

Dr. Thomas Zehrt

Differenzengleichungen

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Beobachtet man bestimmte Zahlenfolgen die z.B. das Wachstum irgendwelcher ökonomischer Grössen im Laufe der Zeit beschreiben (Zeitreihen), so erkennt man manchmal bestimmte rückbezogene (rekursive) Bildungsgesetze, die jedes Glied der Folge als Funktion seines (seiner) Vorgängers (Vorgänger) darstellt. Ein Beispiel ist die Zahlenfolge

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$\cdots$
0	1	3	7	15	31	...

Man kann erkennen, dass man jedes Glied dieser Zahlenfolge berechnen kann, indem man den direkten Vorgänger nimmt, diesen verdoppelt und dann 1 addiert, also z.B.

$$\begin{aligned} 1 = y_1 &= 2 \cdot y_0 + 1 = 2 \cdot 0 + 1 \\ 3 = y_2 &= 2 \cdot y_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 \\ 7 = y_3 &= 2 \cdot y_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 \end{aligned}$$

Wir könnten also das (rekursive) Bildungsgesetz dieser Zahlenfolge durch **zwei** Angaben darstellen.

1. Anfangswert: $y_0 = 0$ und
2. Differenzengleichung: für alle $k \geq 1$ gilt: $y_k = 2 \cdot y_{k-1} + 1$.

Durch diese beiden Festlegungen ist die gesamte Zahlenfolge eindeutig bestimmt. Ändert man mindestens eine der beiden Angaben, ändert sich (im allgemeinen) auch die Zahlenfolge.

Ein ganz wesentliches Problem beim Umgang mit Differenzengleichungen wird die Suche nach Lösungen sein. Dazu versuchen wir ein (direktes, nicht rekursives) Rezept zur Konstruktion der Zahlenfolge zu finden. Für unser obiges Beispiel könnte eine solche Lösung durch $y_k = 2^k - 1$ gegeben sein. Einen ganz wesentlichen Vorteil dieser direkten Darstellung der Zahlenfolge gegenüber der Differenzengleichung können Sie erkennen, wenn Sie z.B. y_{50} berechnen wollen. Welchen Rechenweg sollte man einschlagen?

1.1 Vermögenswachstum

gegeben:

- Anfangsvermögen V_0
- Zins p
- Konsumausgaben (pro Jahr) C

gesucht: Vermögen V_k im Jahr k für alle $k = 1, 2, \ldots$
Lösung 1 (rekursiv, Differenzengleichung):

$$V_{k+1} \quad = \quad (1+p)\, V_k - C$$

Lösung 2 (direkt):

$$V_k \quad = \quad (1+p)^k \left(V_0 - \frac{C}{p} \right) + \frac{C}{p}$$

Beweis: Wir wollen durch eine Probe beweisen, dass die Zahlenfolge tatsächlich eine Lösung der Differenzengleichung ist. Das ist nicht offensichtlich. Es ist schwierig oder sogar unmöglich die Lösung einer Differenzengleichung zu finden, aber eine angebliche Lösung durch eine Probe zu überprüfen ist immer möglich! Aus

$$V_k \quad = \quad (1+p)^k \left(V_0 - \frac{C}{p} \right) + \frac{C}{p}$$

folgt sofort (durch Erhöhung des Indizes k um 1)

$$V_{k+1} \quad = \quad (1+p)^{k+1} \left(V_0 - \frac{C}{p} \right) + \frac{C}{p}.$$

Diese beiden Darstellungen für V_k und V_{k+1} setzen wir dann in die Differenzengleichung ein und prüfen, ob die entstandenen Gleichung wahr ist:

$$V_{k+1} \quad = \quad (1+p)\, V_k - C$$

$$(1+p)^{k+1} \left(V_0 - \frac{C}{p} \right) + \frac{C}{p} \quad ?=? \quad (1+p) \left((1+p)^k \left(V_0 - \frac{C}{p} \right) + \frac{C}{p} \right) - C$$

Tatsächlich ist diese Relation für alle $k \geq 0$ wahr. Prüfen Sie das! $\square$

1.2 Unbeschränktes Bevölkerungswachstum

gegeben:

- Anfangsbevölkerung N_0
- Geburtenrate α
- Sterberate β

gesucht: Anzahl Individuen N_k im Jahr k für alle $k = 1, 2, \ldots$

Lösung (rekursiv, Differenzengleichung):

$$\begin{aligned} N_k &= N_{k-1} - \text{ Todesfälle } + \text{ Geburten} \\ &\approx N_{k-1} + \alpha N_{k-1} - \beta N_{k-1} \\ &= N_{k-1} + \underbrace{(\alpha - \beta)}_{=:r} N_{k-1} \;=\; (1+r)N_{k-1} \end{aligned}$$

Die reelle Zahl $r = \alpha - \beta$ kann hier als Wachstumsrate angesehen werden und sicher gilt $-1 \leq r \leq 1$. Die Lösung ist leicht durch Abwärtszählen zu finden:

$$N_k \;=\; (1+r)N_{k-1} \;=\; (1+r)(1+r)N_{k-2} \;=\; \ldots \;=\; (1+r)^k N_0$$

1.3 Beschränktes (Bevölkerungs)wachstum

Modellansatz:

Wir starten mit der Modellgleichung für das unbeschränkte Bevölkerungswachstum $N_k = N_{k-1} + rN_{k-1}$, ersetzten aber die konstante Wachstums r durch eine Funktion $R = R(N_{k-1})$

$$\boxed{N_k = N_{k-1} + R(N_{k-1})\; N_{k-1}}$$

Forderungen an die Funktion $R = R(N_{k-1})$: $(\star)$

1. mit steigendem N_{k-1} (Überbevölkerung) soll $R(N_{k-1})$ abnehmen
2. ist eine <u>Obergrenze</u> K erreicht (d.h. gilt $N_{k-1} = K$), so soll $R(N_{k-1}) = 0$ gelten (Bevölkerung im Gleichgewicht)
3. für $N_{k-1} \to 0$ (Überbevölkerungseffekte nehmen ab) nähert sich die Wachstumsrate $R(N_{k-1})$ einem festen Wert r, der <u>unbeschränkten</u> Wachstumsrate an

$$\lim_{N_{k-1} \to 0} R(N_{k-1}) \;=\; R(0) \;=\; r$$

Die logistische Gleichung:

Ein einfaches Modell

$$R(N_{k-1}) \;=\; -\frac{r}{K}\,N_{k-1} + r \;=\; r\left(1 - \frac{1}{K}\,N_{k-1}\right)$$

führt zur so genannten <u>diskreten logistischen Differenzengleichung</u>

$$\boxed{N_k = N_{k-1} + r\,N_{k-1}\left(1 - \frac{1}{K}\,N_{k-1}\right)}$$

Bemerkung 1.1 *Wir wollen kurz untersuchen, ob die Funktion R die obigen drei Eigenschaften hat. Der Einfachheit halber schreiben wir x statt N_{k-1}.*

$$R(\underbrace{N_{k-1}}_{x}) \;=\; r\left(1 - \frac{1}{K}\,\underbrace{N_{k-1}}_{x}\right) \;=\; r\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

1. *R ist monoton fallend (in x)*
2. *Falls $x = K$ ist, so folgt $R(K) = 0$*
3. $\lim_{x\to 0}\; R(0) \;=\; r$

Die diskrete logistische Differenzengleichung vereinfacht sich weiter, wenn wir die Bevölkerung nicht absolut sondern relativ zur Obergrenze K darstellen und mit dem konstanten Faktor $\dfrac{r}{1+r}$ multiplizieren. Dazu setzen wir

$$M_k \;=\; \frac{r}{1+r}\,\frac{N_k}{K} \qquad \text{bzw.} \qquad N_k \;=\; \frac{1+r}{r}\,K\,M_k$$

für alle k.

Das führt dann zur so genannten <u>relativen diskreten logistischen Differenzengleichung</u>

$$\boxed{M_k \;=\; (1+r)\,M_{k-1}\,(1 - M_{k-1})}$$

Sei M_0 ein (relativer) Startwert ($0 \le M_0 \le 1$), d.h. wir starten mit $M_0 \cdot 100\%$ der Maximalbevölkerung.

Wir wollen die Zahlenfolgen für verschiedene Wahlen der Grösse r untersuchen und tatsächlich können diese sehr unterschiedliche Eigenschaften haben. Vergessen Sie dabei bitte nicht, dass diese Folgen das (relative) Wachstum einer Population in einem Gebiet mit beschränkten Resourcen beschreiben (möchten). Deshalb kann man jede dieser Zahlenfolgen als eine Prognose für die Bevölkerungsentwicklung (in Abhängigkeit von r) ansehen.

1. $-1 < r < 0$

   Ist die (unbeschränkte) Wachstumsrate kleiner als 0, so sagt uns die Differenzengleichung ein Aussterben der Population voraus. Testen Sie das für verschiedene Startwerte! Das stimmt mit unserer Anschauung überein.

2. $0 < r < 2$

   In diesem Fall konvergiert die Zahlenfolge gegen einen eindeutig bestimmten Grenzwert

   $$\frac{r}{1+r}.$$

   Auch das scheint realistisch zu sein. Testen Sie das für verschiedene Startwerte und untersuchen Sie auch das Verhalten in den Bereichen $0 < r < 1$ und $1 < r < 2$! Fällt Ihnen etwas auf?

3. $2 < r < 2.44$

   Hier treten neue Effekte auf. Die Zahlenfolge springt zwischen zwei so genannten Häufungspunkten hin und her. Also gibt es nur noch jede zweite Zeitperiode eine ähnliche Anzahl von Individuen. Testen Sie das für verschiedene Startwerte. Auch diese Situation könnte für verschiedene Tierarten realistisch sein.

4. $r = 2.45$

   Hier tritt wieder eine Verzweigung auf und die Zahlenfolge springt zwischen vier Häufungspunkten hin und her. Testen Sie das für verschiedene Startwerte. Ist das eine realistische Vorhersage? Eventuell.

5. Wächst der Wert von r noch weiter, so verdoppelt sich die Anzahl der Verzweigungen in immer kürzer werdenden Abständen. Für den Wert

   $$r \quad = \quad 2.5699456\ldots$$

   gibt es sogar unendlich viele.

6. Für $r = 3$ tritt ein neuer Effekt auf, der sogenannte Schmetterlingseffekt. Eine minimale Änderung des Anfangswertes kann völlig andere Endergebnisse hervorbringen. Finden Sie ein möglichst eindrucksvolles Beispiel dieser Situation.

2 Wichtige Begriffe

Definition 2.1 *Eine Differenzengleichung gibt Gesetzmässigkeiten in der zeitlichen Entwicklung einer (unbekannten) Funktion y_t an:*

- *Die Zeit wird dabei als diskret betrachtet ($t = 0, 1, 2, \ldots$) d.h. y_t wird nur an* **regelmässig aufeinanderfolgenden** *Zeitpunkten betrachtet.*

  Bezeichnung: k statt t

- *Die Differenzengleichung verknüpft die Werte der Funktion an zwei, drei oder mehr Zeitpunkten.*

$$\boxed{y_k \;=\; f(y_{k-1}, y_{k-2}, y_{k-3}, \ldots)}$$

Beispiel 2.1

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= 3\,y_k - 5 \\ y_{k+2} + 5y_{k+1} - 7y_k &= 9 \\ y_k - k(y_{k-1})^3 + y_{k-2} &= 3^k \\ \sin(y_k) - k\,y_{k-1} + \ln(y_{k-4}) &= 3^k \end{aligned}$$

2.1 Die Ordnung einer Differenzengleichungen

Definition 2.2 *Eine Differenzengleichung heisst von n-ter Ordnung wenn sie die unbekannte Funktion y_k an $(n+1)$ aufeinanderfolgenden Zeitpunkten verknüpft, d.h.*

$$\boxed{y_k \;=\; f(y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots, y_{k-n})}$$

Beispiel 2.2

1. Ordnung: $y_k \;=\; 3y_{k-1} + 8$

2. Ordnung: $y_k \;=\; y_{k-1} + y_{k-1} \cdot y_{k-2}$

3. Ordnung: $y_k \;=\; y_{k-1} \cdot y_{k-2} \cdot y_{k-3}$

2.2 Linear-Nichtlinear

Definition 2.3 *Eine lineare Differenzengleichung (mit konstanten Koeffizienten) ist von der Form*

$$\boxed{y_k \;=\; A\, y_{k-1} + B\, y_{k-2} + C\, y_{k-3} \ldots}$$

mit reellen Zahlen $A, B, C, \ldots$

Beispiel 2.3

Linear: $y_k \;=\; y_{k-1} + 6y_{k-2}$

Nichtlinear: $y_k \;=\; y_{k-1} \cdot y_{k-2} \cdot y_{k-3}$

2.3 Die Lösung einer Differenzengleichung

Definition 2.4

1. *Die allgemeine Lösung einer Differenzengleichung ist die Menge aller Funktionen (Folgen), die die angegebene Gesetzmässigkeit erfüllt.*

   Beispiel 2.4 *Allgemeine Lösung von $y_{k+1} \;=\; 2y_k$ sind alle Folgen $y_k \;=\; C \cdot 2^k$ mit einer beliebigen reellen Zahl $C \in \mathbb{R}$. Hier sind drei dieser Zahlenfolgen aufgeführt ($C \;=\; 1, 2$ und -1). Alle haben die Eigenschaft, dass ein Folgenglied genau das Doppelte des Vorgängers ist.*

C	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$\ldots$
1	1	2	4	8	16	32	$\ldots$
2	2	4	8	16	32	64	$\ldots$
-1	-1	-2	-4	-8	-16	-32	$\ldots$
3							

2. *Die Lösung eines Anfangswertproblems (AWP) ist das Element aus der allgemeinen Lösung, das eine (oder zwei, ...) Anfangsbedingung(en) erfüllt d.h. das Element, das zu einem festgelegten Zeitpunkt einen gegebenen Wert annimmt.*

   Beispiel 2.5 *Das AWP $y_{k+1} = 2y_k,\ y_0 = 3$ hat die Lösung $y_k \;=\; 3 \cdot 2^k$.*

Im Allgemeinen ist es sehr schwer oder sogar unmöglich Lösungen für beliebige Differenzengleichungen anzugeben. Deshalb beschränken wir uns im weiteren auf die einfache (aber interessante) Klasse von linearen Differenzengleichungen.

3 Lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung

3.1 Die Normalform

Die Normalform einer linearen Differenzengleichung 1. Ordnung (mit konstanten Koeffizienten) ist

$$\boxed{y_k \;=\; A \cdot y_{k-1} + B}$$

mit reellen Zahlen A, B mit $A \neq 0$.

Satz 1 *Die allgemeine Lösung ist*

$$\boxed{y_k = \begin{cases} A^k \cdot y_0 + B\,\dfrac{1-A^k}{1-A} & A \neq 1 \\ y_0 + Bk & A = 1 \end{cases}}$$

oder auch

$$\boxed{y_k = \quad A^k\,(y_0 - y^*) + y^* \;\textit{mit}\; y^* = \frac{B}{1-A},\; A \neq 1}$$

Beweisidee (falls $A \neq 1$) (Summenformel für geometrische Reihen)

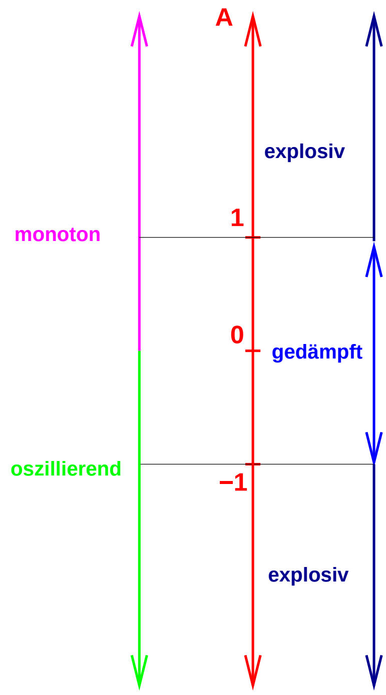
$$\begin{aligned}
y_k &= A \cdot y_{k-1} + B \qquad\qquad = A(A \cdot y_{k-2} + B) + B \\
&= A^2 \cdot y_{k-2} + AB + B \qquad = A^2 \cdot (A \cdot y_{k-3} + B) + AB + B \\
&= A^3 \cdot y_{k-3} + A^2B + AB + B \\
&= \ldots \\
&= A^k \cdot y_0 + A^{k-1}B + A^{k-2}B + \ldots + A^2B + AB + B \\
&= A^k \cdot y_0 + B \sum_{i=0}^{k-1} A^i \\
&= A^k \cdot y_0 + B\,\frac{1-A^k}{1-A} \\
&= A^k \cdot y_0 + \frac{B}{1-A} - \frac{BA^k}{1-A} \;=\; A^k\left(y_0 - \frac{B}{1-A}\right) + \frac{B}{1-A}
\end{aligned}$$

□

3.2 Untersuchung des Lösungsverhaltens

- Fall 1: $A \neq 1$ und $y_k - y^* = A^k(y_0 - y^*)$

Fall	$y_k - y^*$	y_k
$A > 0$	$y_k - y^*$ monoton	y_k monoton
$A < 0$	$y_k - y^*$ alternierend	y_k oszillierend
$\|A\| > 1$	$\|y_k - y^*\| = \|A\|^k \|y_0 - y^*\|$ $\lim \|A\|^k = +\infty$	y_k explosiv
$\|A\| < 1$	$\|y_k - y^*\| = \|A\|^k \|y_0 - y^*\|$ $\lim \|A\|^k = 0$	y_k gedämpft $\lim y_k = y^*$



- Fall 2: $A = 1$

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} y_k &= \lim_{k\to\infty}(y_0 + Bk) \\
&= y_0 + B \lim_{k\to\infty} k \\
&= \begin{cases} +\infty & B > 0 \\ -\infty & B < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

4 Lineare Differenzengleichungen 2. Ordnung

Definition 4.1 *Eine Differenzengleichung der Gestalt*

$$\boxed{y_{k+2} + a_1\, y_{k+1} + a_2\, y_k = 0}$$

heisst homogene, eine solche der Gestalt

$$\boxed{y_{k+2} + a_1\, y_{k+1} + a_2\, y_k = r}$$

heisst inhomogene lineare Differenzengleichung 2. Ordnung (mit konstanten Koeffizienten). Die reelle Zahl r heisst Störglied.

4.1 Lösung der homogenen Gleichung

$$\boxed{y_{k+2} + a_1\, y_{k+1} + a_2\, y_k = 0}$$

Ansatz: $y_k = m^k$, $m \neq 0$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} 0 &= y_{k+2} + a_1\, y_{k+1} + a_2\, y_k \\ &= m^{k+2} + a_1\, m^{k+1} + a_2\, m^k \\ &= m^2 + a_1\, m + a_2 \end{aligned}$$

Lösung der charakteristischen Gleichung:

$$m_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

Nun gibt es drei Möglichkeiten:

1. $\boxed{a_1^2 - 4a_2 > 0}$
   Die charakteristische Gleichung hat zwei verschiedene reelle Lösungen m_1 und m_2.

   $$y_k^{(1)} = m_1^k \qquad \text{und} \qquad y_k^{(2)} = m_2^k$$

   sind zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen Differenzengleichung.
   Allgemeine Lösung:

   $$y_k = c_1\, m_1^k + c_2\, m_2^k$$

2. $\boxed{a_1^2 - 4a_2 = 0}$
   Die charakteristische Gleichung hat eine reelle Lösung $m_1 = m_2 = m = -\frac{a_1}{2}$ und

   $$y_k^{(1)} = m^k$$

   ist eine Lösung der homogenen Differenzengleichung. Aber auch (Beweis durch Probe) $y_k^{(2)} = k\, m^k$ ist eine Lösung der homogenen Differenzengleichung.
   Allgemeine Lösung:

   $$y_k = c_1\, m^k + c_2\, k\, m^k = (c_1 + c_2\, k)\, m^k$$

3. $\boxed{a_1^2 - 4a_2 < 0}$ Die charakteristische Gleichung hat keine reelle Lösungen.
   Allgemeine Lösung:

   $$y_k = R^k (c_1\, \sin(k\phi) + c_2\, \cos(k\phi))$$

   wobei

   - $R = \sqrt{a_2}$
   - $\cos(\phi) = -\dfrac{a_1}{2\sqrt{a_2}}, \quad 0 \le \phi < \pi$

4.2 Lösung der inhomogenen Gleichung

Superpositionsprinzip Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\boxed{y_{k+2} + a_1\, y_{k+1} + a_2\, y_k = r}$$

ist gleich der Summe aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $y_{k+2} + a_1\, y_{k+1} + a_2\, y_k = 0$ und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$\boxed{y_k = c_1\, y_k^{(1)} + c_2\, y_k^{(2)} + y_k^*}$$

- $y_k^{(1)}$, $y_k^{(2)}$ zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung
- y_k^* eine Lösung der inhomogenen Gleichung

Bestimmung einer (speziellen) Lösung y_k^* der inhomogenen Gleichung

$$y_{k+2} + a_1\, y_{k+1} + a_2\, y_k = r$$

1. $\boxed{1 + a_1 + a_2 \neq 0}$
   Spezielle Lösung:
   $$y_k^* = \frac{r}{1 + a_1 + a_2} = konstant$$
2. $\boxed{1 + a_1 + a_2 = 0, \quad a_1 \neq -2}$
   Spezielle Lösung:
   $$y_k^* = \frac{r}{2 + a_1} \cdot k$$
3. $\boxed{1 + a_1 + a_2 = 0, \quad a_1 = -2}$
   Spezielle Lösung:
   $$y_k^* = \frac{r}{2} \cdot k^2$$

Aufgabe 4.1 *Lösen Sie die folgenden Differenzengleichungen:*

1. $y_k + 2y_{k-1} - 15y_{k-2} \;=\; 4$ *mit* $y_0 = 0,\; y_1 = 2$
2. $y_{k+2} + 10y_{k+1} + 25y_k \;=\; 10$ *mit* $y_0 = 1,\; y_1 = 4$
3. $y_{k+2} - y_{k+1} + y_k \;=\; 2$ *allgemeine Lösung*

Lösungen

a) $y_k = \frac{1}{2} \cdot 3^k - \frac{1}{6} \cdot (-5)^k - \frac{1}{3}$

b) $y_k = \left(\frac{13}{18} - \frac{22}{15}\,k\right) \cdot (-5)^k + \frac{5}{18}$

c) $y_k = c_1 \cdot \sin(k \cdot \frac{\pi}{3}) + c_2 \cdot \cos(k \cdot \frac{\pi}{3}) + 2$

5 *Systeme von linearen Differenzengleichungen*

Wir hatten bereist gesehen, dass ökonomische Wachstumsprobeme durch Systeme von Differenzengleichungen beschrieben werden können. Sicher ist es vernünftiger zu glauben, dass die zeitliche Entwicklung eines ökonomischen Parameters nicht nur von der Grösse dieses Parameters alleine abhängt.

Definition 5.1 *Seien $y_1 = y_{1,t}, \ldots, y_n = y_{n,t}$ Funktionen der Zeit. Dann ist ein lineares System von Differenzengleichungen gegeben durch*

$$\begin{aligned} y_{1,t+1} &= a_{11}(t)y_{1,t} + \ldots + a_{1n}(t)y_{n,t} + b_1(t) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ y_{n,t+1} &= a_{n1}(t)y_{1,t} + \ldots + a_{nn}(t)y_{n,t} + b_n(t) \end{aligned}$$

Dabei sind alle a_{ij} und b_i Funktionen der Zeit. Wir definieren folgende Matrizen

$$\mathbf{y}_t = \begin{pmatrix} y_{1,t} \\ \vdots \\ y_{n,t} \end{pmatrix}, \ A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b}_t = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Dann kann man das obige System auch wie folgt schreiben:

$$\mathbf{y}_{t+1} = A(t)\,\mathbf{y}_t + \mathbf{b}_t$$

Interessante Spezialfälle

- Ist $A(t) = A$ konstant, so reduziert sich das System zu

  $$\mathbf{y}_{t+1} = A\,\mathbf{y}_t + \mathbf{b}_t$$

  und wir können folgendes erkennen:

  $$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= A\,\mathbf{y}_0 + \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{y}_2 &= A\,\mathbf{y}_1 + \mathbf{b}_1 = A\,(A\,\mathbf{y}_0 + \mathbf{b}_0) + \mathbf{b}_1 = A^2\,\mathbf{y}_0 + A\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{y}_3 &= A^3\,\mathbf{y}_0 + A^2\mathbf{b}_0 + A\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \mathbf{y}_t &= A^t\,\mathbf{y}_0 + \sum_{k=1}^{t} A^{t-k}\,\mathbf{b}_{k-1} \end{aligned}$$

- Ist $A(t) = A$ und $\mathbf{b}_t = \mathbf{b}$ konstant, so gilt sogar

  $$\mathbf{y}_t = A^t\,\mathbf{y}_0 + (A^{t-1} + A^{t-2} + \ldots + A + I)\,\mathbf{b}$$

  Daraus folgt nach direkter Rechnung:

  $$(A^{t-1} + A^{t-2} + \ldots + A + I)\,(I - A) = I - A^t$$

und falls $\det(I-A) \neq 0$ ($\lambda = 1$ ist kein Eigenwert von A), dann existiert die Inverse $(I-A)^{-1}$ und somit

$$(A^{t-1} + A^{t-2} + \ldots + A + I) \;=\; (I - A^t)(I-A)^{-1}$$

und die Lösung des System kann wie folgt geschrieben werden:

$$\mathbf{y}_t \;=\; A^t\,\mathbf{y}_0 + (I - A^t)(I-A)^{-1}\,\mathbf{b}$$

Beispiel 5.1 *Wie starten mit dem System*

$$\begin{aligned} y_{1,t+1} &= y_{1,t} + \frac{1}{2}y_{2,t} + 1 \\ y_{2,t+1} &= \frac{1}{2}y_{1,t} - \frac{1}{2}y_{2,t} - 1 \end{aligned}$$

Wieder gilt:

$$\mathbf{y}_t \;=\; \begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix},\; A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \; \textit{und}\; \mathbf{b} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und die allgemeine Lösung ist

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t \;=\; & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^t \mathbf{y}_0 \\ & + \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^t \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Ist $\underline{A(t) = A \text{ and } \mathbf{b}_t = \mathbf{0}}$ folgt

$$\mathbf{y}_t \;=\; A^t\,\mathbf{y}_0$$

6 Übungsaufgaben

1. **Eine Probe geht immer!!**

   Wir betrachten die Differenzengleichung 2. Ordnung $y_k = -y_{k-1} + 6y_{k-2}$. Welche Zahlenfolgen sind Lösung dieser Differenzengleichung:

   (a) $y_k = 0$,

   (b) $y_k = 9$,

   (c) $y_k = (-3)^k$,

   (d) $y_k = 5 \cdot 2^k$,

   (e) $y_k = 3 \cdot k$ und

   (f) $y_k = (-3)^k + 3 \cdot 2^k$?

   Begründen Sie Ihre Behauptung und schreiben Sie jeweils die ersten 5 Glieder jeder dieser Zahlenfolgen auf.

2. Für eine beliebige reelle Zahl $a \neq 0$ betrachten wir die **nichtlineare** (d.h. dass wir keinen unserer bekannten Lösungsalgorithmen anwenden können) Differenzengleichung 1. Ordnung

   $$y_{k+1} = 7\, y_k + a\, 7^{k+1}.$$

   Zeigen Sie, dass $y_k = a\, k\, 7^k$ eine Lösung ist.

3. Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der Differenzengleichungen

   $$a)\quad y_{k+1} + 2y_k = 2 \qquad\qquad b)\quad 3y_k = y_{k-1} + 6$$

4. Gegeben ist das folgende lineare Anfangswertproblem

   $$2y_{k+1} + 3y_k = 5 \qquad \text{mit} \qquad y_0 = 2.$$

   Bestimmen Sie y_1, y_2 und y_{50}.

5. Ein Preisanpassungsmodell postuliert die folgenden Zusammenhänge zwischen nachgefragter Menge $Q_{d,t}$, Angebot $Q_{s,t}$ und Preis P_t:

   i) $Q_{d,t} = \alpha - \beta P_t \qquad (\alpha, \beta > 0)$

   ii) $Q_{s,t} = -\gamma + \delta P_t \qquad (\gamma, \delta > 0)$

   iii) $P_{t+1} = P_t - \sigma(Q_{s,t} - Q_{d,t}) \qquad (\sigma > 0)$

   Leiten Sie eine Differenzengleichung für P_t her und lösen Sie diese

   (a) allgemein

   (b) für $\alpha = 21,\ \beta = 2,\ \gamma = 3,\ \delta = 6,\ \sigma = 0.3$

Lösungen einiger Übungsaufgaben

1. -

2. -

3. *a)* $y_k = (-2)^k \cdot (y_0 - 2/3) + 2/3$ *b)* $y_k = (1/3)^k \cdot (y_0 - 3) + 3$

4. **Musterlösung**

   Natürlich könnten wir diese Aufgabe direkt lösen indem wir die Differenzengleichung nach y_{k+1} auflösen, also $y_{k+1} = -\frac{3}{2}y_k + \frac{5}{2}$. Dann folgt (für $k = 0$) $y_1 = -\frac{3}{2}y_0 + \frac{5}{2} = -3 + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$ und dann (für $k = 1$) $y_2 = -\frac{3}{2}y_1 + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} = \frac{13}{4}$. So könnte man weiter machen, bis man das gewünschte Glied erhält. Natürlich sollte man den folgenden eleganten Weg wählen.

   Eine lineare Differenzengleichung 1. Ordnung wir schrittweise gelöst:

   (a) Herstellen der Normalform

   $$2y_{k+1} + 3y_k = 5 \iff 2y_{k+1} = -3y_k + 5$$
   $$\iff y_{k+1} = \underbrace{-\frac{3}{2}}_{A}\, y_k + \underbrace{\frac{5}{2}}_{B}$$

   (b) A und B ablesen und y^* berechnen

   $$\begin{aligned} A &= -\frac{3}{2} \\ B &= \frac{5}{2} \\ y^* &= \frac{B}{1-A} = \frac{\frac{5}{2}}{1-(-\frac{3}{2})} = 1 \end{aligned}$$

   (c) Allgemeine Lösung bestimmen
   Nach der Lösungsformel für lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung gilt:

   $$y_k = A^k(y_0 - y^*) + y^* = \left(-\frac{3}{2}\right)^k (y_0 - 1) + 1$$

   (d) Lösung des Anfangswertproblems
   Wir setzen die gegebene Anfangsbedingung $y_0 = 2$ in die allgemeine Lösung ein und erhalten

   $$y_k = \left(-\frac{3}{2}\right)^k (y_0 - 1) + 1 = \left(-\frac{3}{2}\right)^k (2 - 1) + 1 = \left(-\frac{3}{2}\right)^k + 1.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also $y_k = \left(-\frac{3}{2}\right)^k + 1$ und wir können die gesuchten Glieder der Folge schnelle berechnen: $y_1 = \left(-\frac{3}{2}\right)^1 + 1$, $y_2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 1$ und $y_{50} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{50} + 1$.

5. *a)* $$P_t = (1 - \sigma(\beta + \delta))^t \left(P_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}\right) + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

   b) $$P_t = (-1.4)^t (P_0 - 3) + 3$$