



Veranstaltung/Course:	10135-01 Mathematik 1
Semester/Semester:	
Prüfer/Examiner:	Dr. Thomas Zehrt
Datum+Zeit/Date+Time:	
Dauer/Duration:	90 min

Erlaubte Hilfsmittel:

- einfacher Taschenrechner
(nur TI-30 Modelle siehe Liste auf der Fakultätshomepage)
- Wörterbuch für Fremdsprachige
- Formelsammlung (wird gestellt)

Permitted aids:

- simple calculator
(only TI-30 model in accordance with list on the faculty webpage)
- foreign-language dictionary
- formulary (provided)

Hinweis:

Falls eine Studentin oder ein Student eine Leistungsüberprüfung mit unlauteren Mitteln beeinflusst oder zu beeinflussen versucht, gilt die betreffende Leistungsüberprüfung als nicht bestanden und wird mit der Note 1.0 bewertet (gemäß BA-Ordnung §23, MA-Ordnung §23).

Note:

If a student is found to use or to attempt to use dishonest means to influence his or her performance in the exam, the work will be disqualified and graded 1.0 (in accordance with BA-Regulation §23, MA-Regulation §23).

Name/Last name	
Vorname/First name	
Matr.-Nr.	

Mathematik 1

Bemerkungen:

1. Die Prüfung umfasst 12 Aufgaben (1 bis 12). Beantworten Sie ALLE Fragen.
2. Skizzen und Diagramme müssen NICHT massstabsgetreu sein.
3. Die Bewertung der Teilaufgaben erfolgt gemäss den eingerahmten Punktzahlen.
4. Die definitive Lösung darf von jeder Aufgabe nur eine Version enthalten und hat direkt im Anschluss an diese Aufgabe (bzw. auf der Rückseite des Aufgabenblattes) zu erfolgen.
5. Die ausgeteilten Formelsammlungen dürfen nicht beschriftet werden und sind ebenfalls mit der Prüfung abzugeben.
6. Nutzen Sie für provisorische Berechnungen das Umlageblatt.
7. Beantworten Sie die Fragen auf Deutsch oder Englisch.

Remarks:

- The exam consists of 12 questions (1 to 12). Answer ALL the questions.
 - Sketches and diagrams are NOT necessarily drawn to scale.
 - The subquestions are graded according to the framed number of points.
 - The final solution must only contain one version to each question and has to stand directly after this question (or on the back of the corresponding question sheet).
 - The distributed formulary is not allowed to be labeled and has to be submitted with the exam.
 - Use the cover sheet for provisional calculations.
 - Answer the questions in German or English.
-

Aufgabe/Question 1

1. Berechne/Compute

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+3} \right)$ 2

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-3}{n+1} \right)^n$ 2

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5} \right)^k$ 1

2. Geben Sie ein Beispiel für eine streng monoton wachsende und **rekursiv definierte** Zahlenfolge an. 1
- Give an example of a strictly monotonically increasing and recursively defined sequence of numbers.

Lösung/Solution:

Aufgabe/Question 2

1. Bestimmen Sie die Gleichung der Sekante an die Funktion $y = f(x) = \ln(x)$ durch die Punkte $(1, f(1))$ und $(2, f(2))$. Determine the equation of the secant to the function $y = f(x) = \ln(x)$ through the points $(1, f(1))$ and $(2, f(2))$. 2
-

- Ein Projekt erfordert heute einen Aufwand $A_0 = 10'000$ Franken. In zwei Jahren fällt ein Ertrag $E_2 = 6'000$ Franken und in vier Jahren von $E_4 = 7'000$ Franken an.
2. **(a)** Stellen Sie den Barwert $B_0(p)$ des Projektes in Abhängigkeit vom Bewertungszinssatz p dar. A project requires an effort $A_0 = 10,000$ francs today. In two years, it gives an income $E_2 = 6,000$ francs and in four years an income of $E_4 = 7,000$ francs. **(a)** Express the present value $B_0(p)$ of the project as a function of the valuation interest rate p . 2
- (b)** Für welche Zinssätze $p > 0$ lohnt sich die Durchführung des Projektes? **(b)** For which interest rates $p > 0$ is it worthwhile to carry out the project? 2

Lösung/Solution:

Aufgabe/Question 3

1. Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung

Determine all solutions $x \in \mathbb{R}$ of the equation

2

$$\ln(x+1) + \ln(x) = \frac{1}{2} \ln(49).$$

-
- Gegeben sei die Nachfragefunktion $f(p) = 100 - 4p$ für $p \in [0, 25)$, die die Nachfrage $f(p)$ als Funktion des Preises p darstellt.

The demand function is given by $f(p) = 100 - 4p$ for $p \in [0, 25)$, which represents the demand $f(p)$ as a function of the price p .

- (a) Skizzieren Sie den Graphen von f .
(b) Bestimmen Sie die Elastizität $\epsilon_{f,p}$ von f .
(c) In welchem Bereich ist die Nachfragefunktion elastisch?

- (a) Sketch the graph of f .
(b) Determine the elasticity $\epsilon_{f,p}$ of f .
(c) In which range is the demand function elastic?

1

1

2

Lösung/Solution:

Aufgabe/Question 4

Sei/Let

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}.$$

- | | | | |
|---|--|--|---|
| (a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f und deren Typ. | (a) Determine all local extrema of f and their type. | <table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td style="text-align: center;">2</td></tr></table> | 2 |
| 2 | | | |
| (b) Bestimmen Sie die globalen Extrema von f auf dem Intervall $[2, 7]$. | (b) Determine the global extrema of f on the interval $[2, 7]$. | <table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td style="text-align: center;">2</td></tr></table> | 2 |
| 2 | | | |
| (c) Berechnen Sie | (c) Compute | <table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td style="text-align: center;">2</td></tr></table> | 2 |
| 2 | | | |

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \text{ und/and } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).$$

Lösung/Solution:

Aufgabe/Question 5

1. Welche Gleichung $\phi(x, y) = 0$ beschreibt einen Kreis vom Radius 2 mit Mittelpunkt $(0, -1)$? Bestimmen Sie einen Punkt auf diesem Kreis (exakt). Which equation $\phi(x, y) = 0$ describes a circle of radius 2 with center $(0, -1)$? Determine a point on this circle (exactly).

2

-
2. Bestimmen Sie die Niveaulinien $f(x, y) = c$ mit $c = 0, 1, 2$ für die Funktion $f(x, y) = x^2 - y$. Skizzieren Sie die drei Niveaulinien. Determine the level sets $f(x, y) = c$ with $c = 0, 1, 2$ for the function $f(x, y) = x^2 - y$. Sketch the three level sets.

2

-
3. Sei $z = f(x, y)$ eine (differenzierbare) Funktion. Beschreiben Sie in der folgenden Relation die drei gekennzeichneten Terme (A, B und C) und erklären Sie (kurz) die Aussage dieser Relation. Let $z = f(x, y)$ be a (differentiable) function. Describe the three marked terms in the following relation (A, B and C) and explain (briefly) the statement of this relation.

2

$$\underbrace{\frac{\Delta f}{f}}_A \approx \underbrace{\epsilon_{f,x}}_B \cdot \underbrace{\frac{\Delta x}{x}}_C$$

Lösung/Solution:

Aufgabe/Question 6

- | | | | |
|----|--|--|--|
| 1. | Beschreiben Sie in Worten den Unterschied zwischen den beiden Ausdrücken Δf und df . | Describe in words the difference between the two expressions Δf and df . | <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px; display: inline-block;">2</div> |
|----|--|--|--|
-

2. Sei/Let

$$f(x, y) = x + y + \frac{8}{xy} \quad \text{mit/for } x > 0, y > 0.$$

- | | | |
|---|---|--|
| (a) Bestimmen Sie df (allgemein) und im Punkt $(2, 3)$. | (a) Determine df (in general) and at the point $(2, 3)$. | <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px; display: inline-block;">3</div> |
| (b) Bestimmen Sie die Tangentialebene von f im Punkt $(2, 3)$. | (b) Find the tangent plane of f at the point $(2, 3)$. | <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px; display: inline-block;">1</div> |

Lösung/Solution:

Aufgabe/Question 7

1. Warum sind viele Produktionsfunktionen homogen vom Grad 1? Why are many production functions homogeneous of degree 1? 2
-

2. Eine homogene Funktion $z = f(x, y)$ vom Grad $g = 5$ habe auf dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ die Werte $z = 2x$. Welchen Wert hat f an der Stelle $(3, 4)$? A homogeneous function $z = f(x, y)$ of degree $g = 5$ have the values $z = 2x$ on the unit circle $x^2 + y^2 = 1$. What is the value of f at the position $(3, 4)$? 4

Lösung/Solution:

Aufgabe/Question 8

- | | | |
|---|---|---|
| Erläutern Sie kurz den Algorithmus zum Auffinden von globalen Extrema für | Explain briefly the algorithm for finding global extrema for differentiable functions on closed and bounded sets. | 2 |
| 1. differenzierbare Funktionen auf abgeschlossenen und beschränkten Mengen. | | |
-

2. Sei/Let

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 3xy.$$

- | | | |
|--|--|---|
| Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima und alle Sattelpunkte von f . | Determine all local maxima and minima and all saddle points of f . | 4 |
|--|--|---|

Lösung/Solution:

Aufgabe/Question 9

Sei/Let

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2y \quad \text{und/and} \quad \phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Wir suchen alle (lokalen) Extremalstellen von f unter der Nebenbedingung $\phi(x, y) = 0$.

(a) Ist die Reduktionsmethode anwendbar?

Begründung.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Lagrangeverfahrens alle Kandidaten.

We look for all (local) extremal points of f under the constraint $\phi(x, y) = 0$.

(a) Is the reduction method applicable?

Explain why (not).

(b) Determine all candidates using the Lagrangian method.

2

4

Lösung/Solution:

Aufgabe/Question 10

1. Berechne/Compute

(a) $\int_0^1 x e^{2x} dx$ 2

(b) $\frac{1}{2} \int \frac{d}{dx} [(\ln x)^2] dx$ 2

2. Was besagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung? What does the main theorem of differential and integral calculus say? 2

Lösung/Solution:

Aufgabe/Question 11

1. Berechne/Compute

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} dx.$$

2

2. Sei/Let

$$f(x, y) = x \cdot \sin(2y) \text{ und/and } A = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq \pi/4 \}.$$

(a) Skizzieren Sie die Menge A .

(a) Sketch the set A .

1

(b) Berechne $\int_A \int_A dA$.

(b) Compute $\int_A \int_A dA$.

1

(c) Berechne $\int_A \int_A f(x, y) dA$.

(c) Compute $\int_A \int_A f(x, y) dA$.

2

Lösung/Solution:

Aufgabe/Question 12

Sei/Let

$$f(x) = \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{5}{2}}.$$

Bestimmen Sie/Determine

- (a) Definitionsbereich and Nullstellen
- (b) Symmetrien (gerade oder ungerade)
- (c) Verhalten von f für $x \rightarrow \pm\infty$
- (d) lokale Extremalstellen
- (e) Skizze

- (a) Domain of definition and zeros
- (b) Symmetries (even or odd)
- (c) Behavior of f for $x \rightarrow \pm\infty$
- (d) local extremal points
- (e) sketch

1
1
1
2
1

Lösung/Solution:

Lösungen/solutions

1. (a) 2, (b) e^{-4} , (c) $5/4$
2. (a) $y = \ln 2 \cdot x - \ln 2$
 - (b) i. $B_0(p) = -\frac{10'000}{(1+p)^0} + \frac{6'000}{(1+p)^2} + \frac{7'000}{(1+p)^4}$
 - ii. $p < 0.0903$
3. (a) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{29} = 2.1926$ (Probe nicht vergessen!)
 - i. -
 - ii. $\epsilon_{f,p}(p) = \frac{-4p}{100 - 4p}$
 - iii. $p > 12.5$
4. (a) Lokales Minimum in e
 - (b) Globales Minimum in e und globales Maximum in 7
 - (c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$
5. (a) $x^2 + (y + 1)^2 = 4$ und Punkte wären z.B. $(0, 1)$ oder $(0, -3)$
 - (b) $y = x^2$, $y = x^2 - 1$, $y = x^2 - 2$
 - (c) siehe Skript
6. (a) siehe Skript
 - (b) i. $df = \left(1 - \frac{8}{x^2y}\right) dx + \left(1 - \frac{8}{xy^2}\right) dy$ und $df = (1/3)dx + (5/9)dy$
 - ii. $z = (1/3)x + (5/9)y + 4$
7. (a) siehe Skript
 - (b) 3750
8. (a) siehe Skript
 - (b) Sattelpunkt in $(0, 0)$ und lokales Minimum in $(3/2, 9/4)$
9. (a) Heikel, da Nebenbedingung keine eindeutige Auflösung besitzt.
 - (b) Kandidaten $(0, 1)$ und $(0, -1)$
10. (a) siehe Skript
 - (b) 2.0973
 - (c) $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$
11. (a) $1/3$
 - (b) i. -
 - ii. $\pi/4$
 - iii. $1/4$
12. $D(f) = \mathbb{R}$, keine Nullstellen, gerade Funktion, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, lokale (und globale) Maximalstelle $x = 0$, Wendestellen in $x = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$