WWZ
Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der
Universität Basel

Dr. Thomas Zehrt

Bitte in Druckbuchstaben ausfüllen:

Name	
Vorname	

Mathematik 1
Probeprüfung 1

- Zeit: 90 Minuten, Maximale Punktzahl: 72
- Zur Orientierung: mit 36 Punkten haben Sie **sicher** bestanden.
- Die Prüfung umfasst 12 Aufgaben (1 bis 12) und die Bewertung der Teilaufgaben erfolgt gemäss den eingerahmten Punktzahlen.
- Provisorische Berechnungen sind auf separaten Blättern auszuführen. Diese Blätter sind -als Entwurf gekennzeichnet- ebenfalls abzugeben.
- Manche Aufgaben können auf verschiedene Arten gelöst werden. Eventuell gibt es einen sehr einfachen Weg. Überlegen Sie (kurz), bevor Sie drauf los rechnen!
- Die definitive Lösung darf von jeder Aufgabe nur eine Version enthalten und hat direkt im Anschluss an diese Aufgabe (bzw. auf der Rückseite des entsprechenden Aufgabenblattes) zu erfolgen. Dabei sollten alle Rechenschritte klar ersichtlich sein, denn die ,,Qualität" Ihrer Fehler wird bewertet. Ist die Antwort auf die Frage richtig und vollständig, erhalten Sie stets die volle Punktzahl.
- Bei den folgenden Fehlern erhalten Sie keine Punkte für die Aufgabe bzw. den Aufgabenteil:
  - eine Wahrscheinlichkeit < 0 oder > 1 oder eine negative Varianz (natürlich falsch) berechnet und nicht kommentiert;
  - Unabhängigkeit von Ereignissen bzw. Zufallsvariablen grundlos angenommen;
  - ein Summenzeichen bzw. Betragstriche (grundlos) weggelassen;
  - eine Gleichung durch eine Variable teilen, die Null sein könnte.
- Die ausgeteilten Formelsammlungen dürfen nicht beschriftet werden und sind ebenfalls mit der Prüfung abzugeben.

1. (a) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n+1}-\dfrac{n^2}{n+3}\right)$ $\boxed{2}$

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-3}{n+1}\right)^n$ $\boxed{2}$

(c) Berechnen Sie $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{5}\right)^k$ $\boxed{1}$

(d) Geben Sie ein Beispiel für eine streng monoton wachsende und **rekursiv definierte** Zahlenfolge an. $\boxed{1}$

Lösung:

2. (a) Bestimmen Sie die Gleichung der Sekante an die Funktion $y = f(x) = \ln(x)$ durch die Punkte $(1, f(1))$ und $(2, f(2))$. $\boxed{2}$

(b) Ein Projekt erfordert heute einen Aufwand $A_0 = 10'000$ Franken. In zwei Jahren fällt ein Ertrag $E_2 = 6'000$ Franken und in vier Jahren ein Ertrag von $E_4 = 7'000$ Franken an.

i. Stellen Sie den Barwert $B_0(p)$ des Projektes in Abhängigkeit vom Bewertungszinssatz p dar. $\boxed{1}$

ii. Für welche Zinssätze $p > 0$ lohnt sich die Durchführung des Projektes? $\boxed{3}$

Lösung:

3. (a) Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $\boxed{2}$

$$\ln(x+1) + \ln(x) = \frac{1}{2}\ln(49).$$

(b) Gegeben sei die Nachfragefunktion $f(p) = 100 - 4p$ für $p \in [0, 25)$, die die Nachfrage $f(p)$ als Funktion des Preises p darstellt.

i. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f. $\boxed{1}$

ii. Bestimmen Sie die Elastizität $\epsilon_{f,p}$ von f. $\boxed{1}$

iii. In welchem Bereich ist die Nachfragefunktion elastisch? $\boxed{2}$

Lösung:

4. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$.

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f und deren Typ. $\boxed{2}$

(b) Bestimmen Sie die globalen Extrema von f auf dem Intervall $[2, 7]$. $\boxed{2}$

(c) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to 1+} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to 1-} f(x)$. $\boxed{2}$

Lösung:

5. (a) Welche Gleichung $\phi(x, y) = 0$ beschreibt einen Kreis vom Radius 2 mit Mittelpunkt $(0, -1)$? Bestimmen Sie einen Punkt auf diesem Kreis (exakt). $\boxed{2}$

(b) Bestimmen Sie die Niveaulinien $f(x, y) = c$ mit $c = 0, 1, 2$ für die Funktion $f(x, y) = x^2 - y$. Skizzieren Sie die drei Niveaulinien. $\boxed{2}$

(c) Sei $z = f(x, y)$ eine (differenzierbare) Funktion. Beschreiben Sie in der folgenden Relation die drei gekennzeichneten Terme (A, B und C) und erklären Sie (kurz) die Aussage dieser Relation. $\boxed{2}$

$$\underbrace{\frac{\Delta f}{f}}_{\text{A}} \approx \underbrace{\epsilon_{f,x}}_{\text{B}} \cdot \underbrace{\frac{\Delta x}{x}}_{\text{C}}$$

<u>Lösung:</u>

6. (a) Beschreiben Sie (kurz) in Worten den Unterschied zwischen den beiden Ausdrücken Δf und df. $\boxed{2}$

(b) Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x + y + \dfrac{8}{xy}$ mit $x > 0$ und $y > 0$.

i. Bestimmen Sie df (allgemein) und im Punkt $(2, 3)$. $\boxed{3}$

ii. Bestimmen Sie die Tangentialebene der Funktion f im Punkt $(2, 3)$. $\boxed{1}$

Lösung:

7. (a) Warum sind viele Produktionsfunktionen homogen vom Grad 1? $\boxed{2}$

(b) Eine homogene Funktion $z = f(x, y)$ vom Grad $g = 5$ habe auf dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ die Werte $z = 2x$. Welchen Wert hat f an der Stelle $(3, 4)$? $\boxed{4}$

Lösung:

8. (a) Erläutern Sie kurz den Algorithmus zum Auffinden von globalen Extrema für differenzierbare Funktionen auf abgeschlossenen und beschränkten Mengen. $\boxed{2}$

   (b) Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima und alle Sattelpunkte der Funktion $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3xy$. $\boxed{4}$

Lösung:

9. Wir suchen alle möglichen (lokalen) Extremalstellen der Funktion $f(x, y) = x^2+2y^2+2y$ unter der Nebenbedingung $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

   (a) Ist die Reduktionsmethode anwendbar? Begründung. $\boxed{2}$

   (b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Lagrangeverfahrens alle Kandidaten. $\boxed{4}$

   Lösung:

10. (a) Was besagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung? $\boxed{2}$

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 x\, e^{2x}\, dx$ $\boxed{2}$

(c) Berechnen Sie $\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{d}{dx}\left[(\ln x)^2\right]\, dx$ $\boxed{2}$

Lösung:

11. (a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$. $\boxed{2}$

(b) Sei $f(x,y) = x \cdot \sin(2y)$ und $A = \{\,(x,y) \mid 0 \le x \le 1 \text{ und } 0 \le y \le \pi/4\,\}$.

i. Skizzieren Sie die Menge A. $\boxed{1}$

ii. Berechnen Sie $\boxed{1}$

$$\iint_A dA.$$

iii. Berechnen Sie $\boxed{2}$

$$\iint_A f(x,y)\,dA.$$

<u>Lösung:</u>

12. Führen Sie eine Kurvendiskussion (Definitionsbereich, Nullstellen, Symmetrien, Verhalten für $x \to \pm\infty$, lokale Extremalstellen, Wendestellen, Skizze) für die folgende Funktion durch: $\boxed{6}$

$$f(x) \quad = \quad \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{5}{2}}.$$

Lösung:

Lösungen

1. (a) 2, (b) e^{-4}, (c) 5/4
2. (a) $y = \ln 2 \cdot x - \ln 2$
   (b) i. $B_0(p) = -\dfrac{10'000}{(1+p)^0} + \dfrac{6'000}{(1+p)^2} + \dfrac{7'000}{(1+p)^4}$
   ii. $p < 0.0903$
3. (a) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{29} = 2.1926$ (Probe nicht vergessen!)
   i. -
   ii. $\epsilon_{f,p}(p) = \dfrac{-4p}{100-4p}$
   iii. $p > 12.5$
4. (a) Lokales Minimum in e
   (b) Globales Minimum in e und globales Maximum in 7
   (c) $\lim_{x \to 1+} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty$
5. (a) $x^2 + (y+1)^2 = 4$ und Punkte wären z.B. $(0,1)$ oder $(0,-3)$
   (b) $y = x^2$, $y = x^2 - 1$, $y = x^2 - 2$
   (c) siehe Skript
6. (a) siehe Skript
   (b) i. $df = \left(1 - \dfrac{8}{x^2 y}\right) dx + \left(1 - \dfrac{8}{xy^2}\right) dy$ und $df = (1/3)dx + (5/9)dy$
   ii. $z = (1/3)x + (5/9)y + 4$
7. (a) siehe Skript
   (b) 3750
8. (a) siehe Skript
   (b) Sattelpunkt in $(0,0)$ und lokales Minimum in $(3/2, 9/4)$
9. (a) Heikel, da Nebenbedingung keine eindeutige Auflösung besitzt.
   (b) Kandidaten $(0,1)$ und $(0,-1)$
10. (a) siehe Skript
    (b) 2.0973
    (c) $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2 + c$
11. (a) 1/3
    (b) i. -
    ii. $\pi/4$
    iii. 1/4
12. $D(f) = \mathbb{R}$, keine Nullstellen, gerade Funktion, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, lokale (und globale) Maximalstelle $x = 0$, Wendestellen in $x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$