Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

Wichtige **Formeln** zu den Prüfungen

- **Statistik**,
- **Mathematik 1** und
- **Mathematik 2**

1 Eindimensionale Häufigkeitsverteilung

1.1 Unklassiert

Statistische Masse: $\{1, 2, \ldots, n\}$

$x_i :=$ Ausprägung des Merkmals X bei Element i

m $(\leq n)$ die Anzahl der verschiedenen Merkmalsausprägungen von X

$$\begin{aligned} a_j &:= j\text{-te Ausprägung des Merkmals } X, \\ h_j &:= \text{ Anzahl der } x_i \text{ mit der Ausprägung } a_j \text{ (\underline{absolute Häufigkeit})} \\ f_j &:= \frac{h_j}{n} \text{ (\underline{relative Häufigkeit}).} \end{aligned}$$

1.2 Klassiert

X stetiges Merkmal mit Werten in $[a, b)$

$a = a_1 < a_2 < \ldots < a_m < a_{m+1} = b$

$$\begin{aligned} K_j &:= [a_j, a_{j+1}) \\ h_j &:= \text{ Anzahl der Ausprägungen } x \text{ mit } x \in K_j = [a_j, a_{j+1}) \\ f_j &:= \frac{h_j}{n} \\ d_j &:= a_{j+1} - a_j \text{ (\underline{Klassenbreite})} \\ m_j &:= a_j + \frac{d_j}{2} = \frac{a_{j+1} + a_j}{2} \text{ (\underline{Klassenmitte})} \\ h_j^* &:= \frac{h_j}{d_j} \text{ (\underline{Klassendichte}).} \end{aligned}$$

2 Mittelwerte, Varianz, Schiefe und Wölbung

x_i: Ausprägung von X beim Element i

$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$ die geordneten Merkmalsausprägungen

Arithmetisches Mittel $\quad \bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

Gewichtetes arithmetisches Mittel $\quad \bar{x}_{\mathbf{p}} := \sum_{i=1}^{n} p_i \, x_i \quad$ $\mathbf{p}$ Wahrscheinlichkeitsvektor

Zentralwert $\quad$ mittlere Wert der nach Grösse geordneten x_i

Geometrisches Mittel $\quad G := \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \quad$ alle x_i positiv

(empirische) Varianz $\quad var(X) := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

(empirische) Schiefe

$$g_1 := \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^3}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2\right)^3}}$$

(empirische) Exzess

$$g_2 := \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2\right)^2} - 3$$

p-Quantil für $0 \leq p \leq 1$

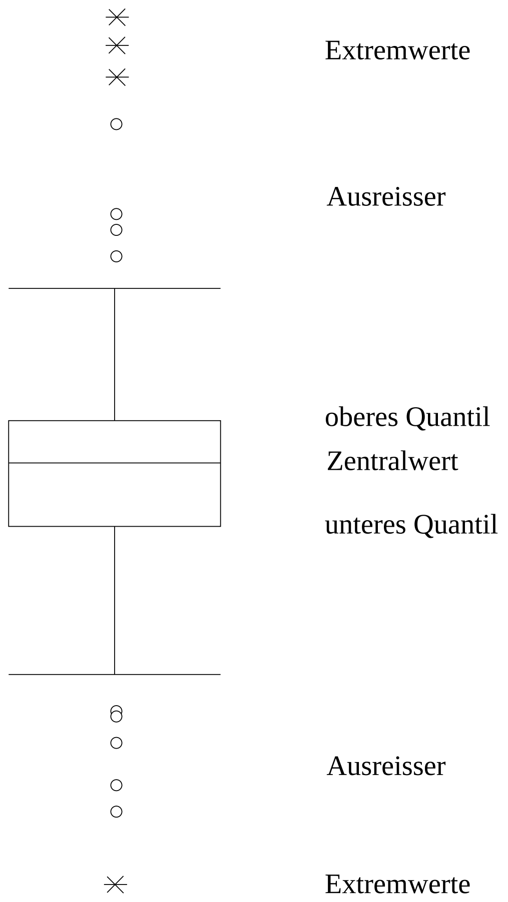
$$\tilde{x}_p := \begin{cases} x_{(k)} & \text{falls } n \cdot p \notin \mathbb{Z} \text{ ist } k \text{ die kleinste ganze Zahl mit } k > n \cdot p \\ \frac{1}{2}\left(x_{(n \cdot p)} + x_{(n \cdot p + 1)}\right) & \text{falls } n \cdot p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

3 Der Boxplot

- **innerhalb der Box**

  untere Boxgrenze $\tilde{x}_{0.25}$
  obere Boxgrenze $\tilde{x}_{0.75}$
  Linie in der Box $\tilde{x}_{0.5}$

- **ausserhalb der Box**
  - **Extremwerte**: mehr als 3 Boxlängen vom unteren bzw. oberen Boxrand entfernt, wiedergegeben durch „$*$“
  - **Ausreisser**: zwischen 1.5 und 3 Boxlängen vom oberen bzw. unteren Boxrand entfernt, wiedergegeben durch „$\circ$“
  - Der kleinste und der grösste Wert, der jeweils nicht als Ausreisser eingestuft wird, ist durch eine horizontale Strecke darzustellen.



4 Lorenzkurve und Ginikoeffizient

Merkmalsausprägungen, der Grösse nach geordnet: $0 \leq x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$.

$$u_i = \frac{i}{n} \quad \text{für } i = 0, 1, \ldots, n \quad \text{sowie} \quad v_0 = 0$$

$$v_i = \frac{\sum_{j=1}^{i} x_{(j)}}{\sum_{j=1}^{n} x_{(j)}} \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

Die Lorenzkurve ist der Streckenzug, der durch die Punkte $(u_0, v_0), (u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)$ verläuft.

Der Ginikoeffizient G ist definiert durch $G = 2 \cdot F$, wobei F die Fläche zwischen der Diagonalen und der Lorenzkurve ist Für den Ginikoeffizienten G gilt

$$G = \frac{2\sum_{i=1}^{n} i \cdot x_{(i)} - (n+1)\sum_{i=1}^{n} x_{(i)}}{n\sum_{i=1}^{n} x_{(i)}} = 1 - \frac{1}{n}\left(2\sum_{i=1}^{n-1} v_i + 1\right)$$

5 Zweidimensionale Häufigkeitsverteilung

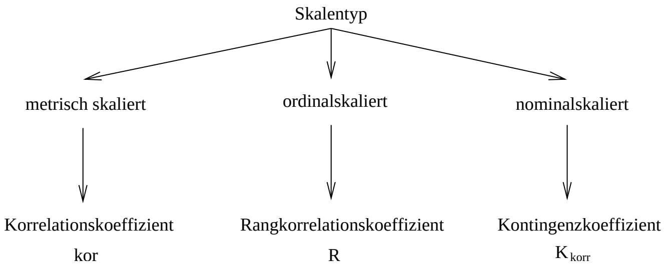
5.1 Kontingenztafel

Seien $a_1, \dots, a_l$ die Ausprägungen von X und $b_1, \dots, b_m$ die Ausprägungen von Y:

		Y						Vert.
		b_1	b_2	$\dots$	b_k	$\dots$	b_m	von X
	a_1	h_{11}	h_{12}	$\dots$	h_{1k}	$\dots$	h_{1m}	$h_{1\bullet}$
	a_2	h_{21}	h_{22}	$\dots$	h_{2k}	$\dots$	h_{2m}	$h_{2\bullet}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
X	a_j	h_{j1}	h_{j2}	$\dots$	h_{jk}	$\dots$	h_{jm}	$h_{j\bullet}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
	a_l	h_{l1}	h_{l2}	$\dots$	h_{lk}	$\dots$	h_{lm}	$h_{l\bullet}$
Vert. von Y		$h_{\bullet 1}$	$h_{\bullet 2}$	$\dots$	$h_{\bullet k}$	$\dots$	$h_{\bullet m}$	n

- h_{jk} = Anzahl Elemente mit $(X = a_j)$ und $(Y = b_k)$
- $h_{j\bullet}$ = Anzahl Elemente mit $(X = a_j)$
- $h_{\bullet k}$ = Anzahl Elemente mit $(Y = b_k)$

6 Zusammenhänge



6.1 Zusammenhang zw. metrischskalierten Merkmalen

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ Wertepaare

(empirische) Kovarianz: $$cov(X,Y) := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

(empirischer) Korrelationkoeffizient: $$kor(X,Y) := \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)} \cdot \sqrt{var(Y)}}$$

6.2 Zusammenhang zw. ordinalskalierten Merkmalen

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ Wertepaare
R_i bzw. R'_i Rangzahlen bezüglich $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bzw. $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$
Rangkorrelationskoeffizient (von Spearmann) ohne Bindung:

$$R = R(X,Y) := 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{n} (R_i - R'_i)^2}{n(n^2-1)}.$$

6.3 Zusammenhang zw. nominalskalierten Merkmalen

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ Wertepaare
Chi-Quadrat-Koeffizient:

$$\chi^2 := \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{m} \frac{\left(h_{jk} - \frac{h_{j\bullet} \cdot h_{\bullet k}}{n}\right)^2}{\frac{h_{j\bullet} \cdot h_{\bullet k}}{n}}.$$

Kontingenzkoeffizient:

$$K := \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}}$$

normierte Kontingenzkoeffizient:

$$K_{korr} := \frac{K}{K_{max}} \qquad \text{mit} \qquad K_{max} := \sqrt{\frac{\min(l,m) - 1}{\min(l,m)}}$$

7 Regressionsrechnung

7.1 Allgemein

gegeben: Modellgleichung $y = f(x; a, b, c, \ldots)$ zwischen den Merkmalen X und Y und n Messwertpaare $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$

gesucht: Welche Modellkurve approximiert die Messwertpaare am Besten?

Methode der kleinsten Quadrate: Bestimme die $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \ldots$, die die Straffunktion S minimieren:

$$\boxed{S(a, b, c, \ldots) := \sum_{i=1}^{n} \left(\, y_i - f(x_i; a, b, c, \ldots) \, \right)^2}$$

7.2 Lineare Regression

Regressionsgerade: $y = f(x) = \hat{a}x + \hat{b}$

Lösung:

- $$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \; = \; \hat{a} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \hat{b} \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i \; = \; \hat{a} \sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{b}n$$

  bzw.

  $$\begin{pmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \end{pmatrix}$$

- oder

  $$\hat{a} = \frac{cov(X, Y)}{var(X)} \qquad \text{und} \qquad \hat{b} = \bar{y} - \frac{cov(X, Y)}{var(X)} \, \bar{x}.$$

8 Zeitreihen

8.1 Additives Zeitreihenmodell

$$\boxed{y(t_i) \;=\; G(t_i) + S(t_i) + R(t_i) \quad \text{für } i = 1, 2, 3, \ldots}$$

wobei die einzelnen Summanden die folgenden Bedeutungen haben:

1. G die <u>glatte Komponente</u>
2. S die <u>Saisonkomponente</u>
3. R die <u>reguläre Komponente</u>

8.2 Trendbereinigte Zeitreihe

.

$$y^*(t_i) \;=\; y(t_i) - \hat{G}(t_i)$$

8.3 Zyklische Komponente

n sei die Anzahl der Beobachtungen, k die Zykluslänge und $m = \dfrac{n}{k}$

$$\hat{S}(t_i) \;=\; \hat{S}(t_{i+k}) \;=\; \hat{S}(t_{i+2\cdot k}) \;=\; \ldots \;=\; \hat{S}(t_{i+(m-1)\cdot k}) \;=\; \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} y^*(t_{i+j\cdot k})$$

9 Mengen und Kombinatorik

9.1 Mengenoperationen

Seien $A, B \subset \Omega$ Mengen bzw. Ereignisse.

A^c	$=$	$\{\, \omega \in \Omega \,:\, \omega \notin A \,\}$	Komplement bzw. zu A komplementäres Ereignis
$A \cap B$	$=$	$\{\, \omega \in \Omega \,:\, \omega \in A$ und $\omega \in B \,\}$	Durchschnitt bzw. logisches Produkt
$A \cup B$	$=$	$\{\, \omega \in \Omega \,:\, \omega \in A$ oder $\omega \in B \,\}$	Vereinigung bzw. logische Summe
$B - A$	$=$	$\{\, \omega \in \Omega \,:\, \omega \in B$ und $\omega \notin A \,\}$	Differenz
$A \times B$	$=$	$\{\, (a,b) \,:\, a \in A$ und $b \in B \,\}$	kartesisches Produkt
$\mathcal{P}(\Omega)$	$=$	$\{\, A \,:\, A \subset \Omega \,\}$	Potenzmenge

Beachte: $\emptyset \subset M$.

9.2 Rechenregeln

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= B \cup A \\
A \cap B &= B \cap A \\
A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \\
A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \\
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
(A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\
(A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \,.
\end{aligned}
$$

9.3 Endliche Mengen und Kombinatorik

Permutation	$N!$	$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots N$
Binomialkoeffizient	$\binom{N}{n}$	$= \dfrac{N!}{(N-n)!\, n!}$

Ziehung von n Kugeln aus einer Urne mit N Kugeln $\{1, \ldots, N\}$	Kardinalität des Raumes
in Reihenfolge mit Zurücklegen	$\lvert\Omega_I\rvert = N^n$
in Reihenfolge ohne Zurücklegen	$\lvert\Omega_{II}\rvert = N \cdot (N-1) \cdots (N-n+1) = \binom{N}{n} n!$
ohne Reihenfolge ohne Zurücklegen	$\lvert\Omega_{III}\rvert = \binom{N}{n}$
ohne Reihenfolge mit Zurücklegen	$\lvert\Omega_{IV}\rvert = \binom{N+n-1}{n} = \dfrac{(N+n-1)!}{(N-1)!\, n!}$

10 Wahrscheinlichkeitsräume (Ω, P)

10.1 Grundlegende Eigenschaften

$$
\begin{array}{lcll}
P(\Omega) & = & 1 & \\
P(A) & \geq & 0 & \text{für alle } A \subset \Omega \\
P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) & = & \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) & A_1, A_2, \ldots \text{ paarweise unvereinbare Ereignisse}
\end{array}
$$

10.2 Folgerungen

$$
\boxed{
\begin{array}{lcll}
P(A^c) & = & 1 - P(A) & \\
A \subset B & \Rightarrow & P(A) \leq P(B) & \\
P(A - B) & = & P(A) - P(A \cap B) & \\
P(\cup_{i=1}^{n} A_i) & \leq & \sum_{i=1}^{n} P(A_i) & \\
P(A \cup B) & = & P(A) + P(B) - P(A \cap B) & \\
P(A) & = & \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) & \{B_i\} \text{ vollständige Zerlegung von } \Omega
\end{array}
}
$$

10.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

$$
\begin{array}{lcll}
P(A \cap B) & = & P(A) \cdot P(B|A) & \\
 & = & P(B) \cdot P(A|B) & \text{allgemein} \\
P(A \cap B) & = & P(A) \cdot P(B) & \text{falls } A, B \text{ \underline{unabhängig} sind} \\
P(A) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A|B_i) & \{B_i\} \text{ vollständige Zerlegung von } \Omega \\
P(B_k|A) & = & \dfrac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{P(A)} & \{B_i\} \text{ vollständige Zerlegung von } \Omega
\end{array}
$$

11 Zufallsvariablen X

Rechenregeln für Verteilungsfunktionen $F(x) = P(X \le x)$

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt:

$$\begin{aligned}
P(X < a) &= P(X \le a) - P(X = a) \;=\; F(a) - P(X = a) \\
P(X > a) &= 1 - F(a) \\
P(X \ge a) &= 1 - F(a) + P(X = a) \\
P(a < X \le b) &= F(b) - F(a) \\
P(a < X < b) &= F(b) - F(a) - P(X = b) \\
P(a \le X < b) &= F(b) - F(a) - P(X = b) + P(X = a)
\end{aligned}$$

Diskrete Zufallsvariablen

Wertebereich	$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$
Verteilungsfunktion	$F(x) = P(X \le x) = \sum\limits_{x_i \le x} P(X = x_i)$
Erwartungswert	$\mu = E(X) = \sum\limits_{x_i} x_i \; P(X = x_i)$
Varianz	$\sigma^2 = Var(X) = \sum\limits_{x_i} (x_i - \mu)^2 \; P(X = x_i)$

Stetige Zufallsvariablen

Wertebereich	ein Intervall in $(-\infty, \infty)$
Verteilungsfunktion	$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \; dt$
Erwartungswert	$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \; f(t) dt$
Varianz	$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (\; t - E(X) \;)^2 \; f(t) dt$

Besachte:

- f ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte, d.h.
  - $f(t) \ge 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$,
  - $f(t)$ ist stetig bis auf abzählbar viele Punkte,
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \; dt = 1.$
- Flächen = Wahrscheinlichkeiten
- $P(X = x_0) = 0$ für jedes Ergebnis x_0

12 Zufallsvariablen X und Y

Kovarianz von X und Y:

$$Cov(X,Y) \quad := \quad E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

Korrelationskoeffizient von X und Y:

$$\rho_{XY} \quad = \quad \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}}$$

Für alle Zufallsvariablen X, Y und alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
E(aX + bY + c) &= aE(X) + bE(Y) + c \\
Var(aX + b) &= a^2 Var(X) \\
Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
Var(X \pm Y) &= Var(X) + Var(Y) \pm 2\, Cov(X,Y) \\
Cov(X,Y) &= 0 \quad \text{falls } X, Y \text{ unkorreliert}
\end{aligned}$$

Bemerkung:

$$\begin{aligned}
X, Y \text{ unabhängig} \quad &\Rightarrow \quad X, Y \text{ unkorreliert} \\
X, Y \text{ unkorreliert} \quad &\not\Rightarrow \quad X, Y \text{ unabhängig}
\end{aligned}$$

13 Ungleichung von Tschebyschev

$$P(\,|X - E(X)| \geq c\,) \;\leq\; \frac{Var(X)}{c^2} \qquad \text{oder} \qquad P(\,|X - E(X)| < c\,) \;\geq\; 1 - \frac{Var(X)}{c^2}$$

14 Spezielle diskrete Verteilungen

14.1 Binomialverteilung

- Ein Experiment hat **zwei** mögliche Ergebnisse: E (Erfolg) und E^c (Misserfolg).
- Das Experiment wird eine feste Anzahl n mal durchgeführt.
- Die Durchführungen erfolgen unabhängig voneinander.
- Die Erfolgswahrscheinlichkeit p ist **konstant**.

Es sei X = Anzahl Erfolge in den n Versuchen.
Dann ist **X binomialverteilt** (kurz: $X \sim B(n;p)$) und

$$\boxed{\begin{aligned} P(X=x) &= f_{Bi}(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x\,(1-p)^{n-x} \quad \text{für } x = 0,1,2,\ldots,n \\ E(X) &= np \\ Var(X) &= np(1-p) \end{aligned}}$$

14.2 Geometrische Verteilung

- Ein Experiment hat **zwei** mögliche Ergebnisse: E (Erfolg) und E^c (Misserfolg).
- Das Experiment wird durchgeführt, bis erstmals ein Erfolg eintritt.
- Die Durchführungen erfolgen unabhängig voneinander.
- Die Erfolgswahrscheinlichkeit p ist **konstant**.

Es sei X = Anzahl der Versuche **vor** dem ersten Erfolg.
Dann ist **X geometrisch verteilt** und

$$\boxed{\begin{aligned} P(X=x) &= (1-p)^x\,p \quad \text{für } x = 0,1,2,\ldots \\ E(X) &= \frac{1-p}{p} \\ Var(X) &= \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}}$$

14.3 Hypergeometrische Verteilung

Von N Elementen seien S vom Typ E und $W = N - S$ vom Typ E^c. Eine Stichprobe vom Umfang n wird gezogen (ohne zurücklegen).

Es sei X = Anzahl Elemente vom Typ E in dieser Stichprobe.

Dann ist **X hypergeometrisch verteilt** und

$$\boxed{\begin{aligned} P(X=x) &= \frac{\binom{S}{x}\binom{N-S}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{für } 0 \le x \le n \\ E(X) &= n\frac{S}{N} \\ Var(X) &= n\frac{S}{N}\left(1-\frac{S}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \end{aligned}}$$

14.4 Poisson-Verteilung

Ausgehend von zufälligen Ereignissen, die innerhalb eines Kontinuums mit der **Intensitätsrate** $\lambda > 0$ auftreten sei

X = Anzahl der Ereignisse innerhalb eines Kontinuums

Dann ist **X poissonverteilt** mit dem Parameter $\lambda > 0$ (kurz: $X \sim Po(\lambda)$) und

$$\boxed{\begin{aligned} P(X=x) &= \frac{\lambda^x}{x!}\, e^{-\lambda} \quad \text{für } x = 0, 1, 2, \ldots \\ E(X) &= \lambda \\ Var(X) &= \lambda \end{aligned}}$$

15 Spezielle stetige Verteilungen

15.1 Gleichverteilungen

Dichtefunktion	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
Verteilungsfunktion	$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a < x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$
Erwartungswert	$E(X) = \frac{a+b}{2}$
Varianz	$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

15.2 Exponentialverteilungen

Dichtefunktion	$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
Verteilungsfunktion	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
Erwartungswert	$E(X) = \frac{1}{\alpha}$
Varianz	$Var(X) = \frac{1}{\alpha^2}$

15.3 Normalverteilungen

Dichtefunktion	$\phi(t; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$
Verteilungsfunktion	$\Phi(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt$
Erwartungswert	$E(X) = \mu$
Varianz	$Var(X) = \sigma^2$

Standardnormalverteilung

Normalverteilung mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma = 1$, Abkürzungen: $\phi(x) = \phi(x; 0, 1)$ und $\Phi(x) = \Phi(x; 0, 1)$

Zusammenhang

$$X \text{ normalverteilt} \quad \rightsquigarrow \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \text{standardnormalverteilt}$$

$$\boxed{P(a \leq X \leq b) = \Phi(b; \mu, \sigma) - \Phi(a; \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)}$$

Lokaler Grenzwertsatz von de Moivre und Laplace

Für $X \sim B(n; p)$, $\mu = np$, $\sigma = \sqrt{np(1 - p)}$ und $n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$ gilt:

$$f_{Bi}(x; n, p) \quad \approx \phi\,(x; \mu, \sigma) \quad \text{und} \quad P(a \leq X \leq b) \quad \approx \Phi\left(\frac{b - \mu + 0.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu - 0.5}{\sigma}\right)$$

16 Punktschätzung

16.1 Stichproben

Grundgesamtheit: Zufallsvariable X, Erwartungswert μ, Varianz σ^2

Eine Stichprobe vom Umfang n ist eine Realisierung von n unabhängigen und wie X identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$

<u>konkrete Stichprobe</u>: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

<u>Mittelwert der Stichprobe</u>: $\hat{\mu} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ (Schätzwert für μ)

<u>Varianz der Stichprobe</u>: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu})^2$ (Schätzwert für σ^2)

16.2 Die Maximum-Likelihood-Methode

X Zufallsvariable, deren Verteilung $P(X = x) = P(x; \theta)$ bis auf den Parameter θ bekannten sei.

<u>Likelihood-Funktion</u> zur konkreten Stichprobe $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\boxed{L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) \;:=\; \prod_{i=1}^{n} P(x_i; \theta) \;=\; P(x_1; \theta) \cdot P(x_2; \theta) \cdots P(x_n; \theta)}$$

Ein Parameterwert $\theta_{ML} = \hat{\theta}$ mit

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta_{ML}) \;\geq\; L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$$

für **alle** erlaubten θ heisst <u>Maximum-Likelihood-Schätzer</u>.

17 Konfidenzintervalle für μ einer normalverteilten Grundgesamtheit (Konfidenzniveau $1 - \alpha$)

	zweiseitig	einseitig	
$\sigma^2 = \sigma_0^2$ bekannt	$\left[\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$	$\left(-\infty,\ \overline{x} + z_{1-\alpha} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$	$\left[\overline{x} - z_{1-\alpha} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \infty\right)$
σ^2 unbekannt	$\left[\overline{x} - t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$	$\left(-\infty,\ \overline{x} + t_{n-1;1-\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$	$\left[\overline{x} - t_{n-1;1-\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}}, \infty\right)$

18 Testen

18.1 Grundlagen

Mit einer konkreten Stichprobe $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ soll eine Hypothese über einen unbekannten Parameter einer Grundgesamtheit geprüft werden.

Nullhypothese H_0, Alternativhypothese H_1, Verwerfungsbereich R

Entscheidung:	Ist der aufgrund der Stichprobe ermittelte Wert ein Element von R, so wird H_0 abgelehnt (verworfen), andernfalls wird H_0 beibehalten.
Fehler 1. Art:	H_0 wird verworfen, obwohl H_0 in Wirklichkeit richtig ist. $P(H_0 \text{ verwerfen } \mid H_0 \text{ richtig }) = \alpha$
Fehler 2. Art:	H_0 wird beibehalten, obwohl H_0 in Wirklichkeit falsch ist. $P(H_0 \text{ beibehalten } \mid H_0 \text{ falsch }) = \beta$

18.2 Signifikanztests für p

Ein Zufallsexperiment, bei dem ein Ereignis E mit einer unbekannten Wahrscheinlichkeit p eintritt, wird n-mal durchgeführt. Die Zufallsvariable X zähle die Anzahl der Durchführungen, bei denen das Ereignis E eingetreten ist.

Zweiseitiger Test

gegeben:	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$ α	
Verwerfungsbereich:	$R = \underbrace{\{0, 1, \ldots, x_l\}}_{R_l} \cup \underbrace{\{x_r, x_r + 1, \ldots, n\}}_{R_r}$	
x_l grösste Zahl s.d.	$\sum_{k=0}^{x_l} \binom{n}{k} p_0^k \, (1 - p_0)^{n-k}$	$\leq \frac{\alpha}{2}$
x_r kleinste Zahl s.d	$\sum_{k=0}^{x_r - 1} \binom{n}{k} p_0^k \, (1 - p_0)^{n-k}$	$\geq 1 - \frac{\alpha}{2}$

Linksseitiger Test

gegeben:	$H_0 : p \geq p_0$ $H_1 : p < p_0$ α
Verwerfungsbereich:	$R = \{0, 1, \ldots, x\}$
x grösste Zahl s.d.	$\sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p_0^k \, (1 - p_0)^{n-k} \quad \leq \alpha$

Rechtsseitiger Test

gegeben:	$H_0 : p \leq p_0$ $H_1 : p > p_0$ α
Verwerfungsbereich:	$R = \{x, x+1, \ldots, n\}$
x kleinste Zahl s.d.	$\sum_{k=0}^{x-1} \binom{n}{k} p_0^k \, (1 - p_0)^{n-k} \quad \geq 1 - \alpha$

18.3 Signifikanztests für μ und σ einer normalverteilten Grundgesamtheit (Signifikanzniveau α)

Hypothesen H_0 H_1	Voraussetzungen	Testgrösse T	Verteilung von T	Kritischer Bereich
Gauß-Test				
$\mu = \mu_0$ $\quad \mu \neq \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$ $\quad \mu > \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$ $\quad \mu < \mu_0$	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ bekannt	$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$	$N(0,1)$-Verteilung	$\lvert t \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $t > z_{1-\alpha}$ $t < -z_{1-\alpha}$
Einfacher t-Test				
$\mu = \mu_0$ $\quad \mu \neq \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$ $\quad \mu > \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$ $\quad \mu < \mu_0$	σ^2 unbekannt	$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S_X}\sqrt{n}$	t_{n-1}-Verteilung	$\lvert t \rvert > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ $t > t_{n-1;1-\alpha}$ $t < -t_{n-1;1-\alpha}$
χ^2-Streuungstest				
$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\quad \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\quad \sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $\quad \sigma^2 < \sigma_0^2$	μ unbekannt	$\frac{(n-1) \cdot S_X^2}{\sigma_0^2}$	χ^2_{n-1}-Verteilung	$t > \chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ oder $t < \chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}$ $t > \chi^2_{n-1;1-\alpha}$ $t < \chi^2_{n-1;\alpha}$
Ergänzung (**nicht prüfungsrelevant**)				
$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\quad \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\quad \sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $\quad \sigma^2 < \sigma_0^2$	μ bekannt	$\frac{n \cdot S_X^{*2}}{\sigma_0^2}$	χ^2_n-Verteilung	$t > \chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}$ oder $t < \chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}}$ $t > \chi^2_{n;1-\alpha}$ $t < \chi^2_{n;\alpha}$

18.4 Signifikanztests zum Vergleich zweier Erwartungswerte μ_X und μ_Y und Varianzen σ_X^2 und σ_Y^2 von normalverteilten Grundgesamtheiten (Signifikanzniveau α)

Hypothesen H_0	H_1	Voraussetzungen	Testgrösse T	Verteilung von T	Kritischer Bereich
Doppelter t-Test					
$\mu_X = \mu_Y$	$\mu_X \neq \mu_Y$	$(X_1, \ldots, X_{n_1})$, $(Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ unabhängige Stichproben	$\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$ mit		$\lvert t \rvert > t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}}$
$\mu_X \leq \mu_Y$	$\mu_X > \mu_Y$	$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$	$S =$	$t_{n_1+n_2-2}$-Verteilung	$t > t_{n_1+n_2-2;1-\alpha}$
$\mu_X \geq \mu_Y$	$\mu_X < \mu_Y$	$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$	$\sqrt{\frac{(n_1-1)S_X^2 + (n_2-1)S_Y^2}{n_1+n_2-2}}$		$t < -t_{n_1+n_2-2;1-\alpha}$
Welch-Test					
$\mu_X = \mu_Y$	$\mu_X \neq \mu_Y$	$(X_1, \ldots, X_{n_1})$, $(Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ unabhängige Stichproben	$\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_1} + \frac{S_Y^2}{n_2}}}$	t_m-Verteilung $m =$	$\lvert t \rvert > t_{m;1-\frac{\alpha}{2}}$
$\mu_X \leq \mu_Y$	$\mu_X > \mu_Y$	$\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$		$\frac{\left(S_X^2/n_1 + S_Y^2/n_2\right)^2}{\left(\frac{(S_X^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(S_Y^2/n_2)^2}{n_2-1}\right)}$	$t > t_{m;1-\alpha}$
$\mu_X \geq \mu_Y$	$\mu_X < \mu_Y$	$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$		ganzzahlig gerundet	$t < -t_{m;1-\alpha}$
F-Test					
$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$	$\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$	$(X_1, \ldots, X_{n_1})$, $(Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ unabhängige Stichproben	S_X^2/S_Y^2	F_{n_1-1,n_2-1}-Verteilung	$t > F_{n_1-1,n_2-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ oder $t < F_{n_1-1,n_2-1;\frac{\alpha}{2}}$
$\sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2$	$\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$	μ_X, μ_Y unbekannt	S_X^2/S_Y^2	F_{n_1-1,n_2-1}-Verteilung	$t > F_{n_1-1,n_2-1;1-\alpha}$
$\sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2$	$\sigma_X^2 < \sigma_Y^2$	$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$	S_Y^2/S_X^2	F_{n_2-1,n_1-1}-Verteilung	$t > F_{n_2-1,n_1-1;1-\alpha}$

Beachte: Gilt $X \sim F_{m,n}$ so ist $1/X \sim F_{n,m}$ und für die Quantile folgt $F_{m,n;\alpha} = \dfrac{1}{F_{n,m;1-\alpha}}$.

Hypothesen H_0 H_1	Voraussetzungen	Testgrösse T	Verteilung von T	Kritischer Bereich
paired t-Test				
$\mu_X = \mu_Y$ $\quad \mu_X \neq \mu_Y$	$(X_1, \ldots, X_n)$, $(Y_1, \ldots, Y_n)$ (verbundene) Stichproben	$\frac{\overline{D}}{S_D}\sqrt{n}$ mit		$\lvert t\rvert > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$
$\mu_X \leq \mu_Y$ $\quad \mu_X > \mu_Y$	$D = X - Y \sim N(0, \sigma_D^2)$	$S_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2$	t_{n-1}-Verteilung	$t > t_{n-1;1-\alpha}$
$\mu_X \geq \mu_Y$ $\quad \mu_X < \mu_Y$				$t < -t_{n-1;1-\alpha}$

Standardnormalverteilung: Werte von $\Phi(x) = \Phi(x; 0, 1)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.1	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.0	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.1	0.864	0.866	0.869	0.871	0.873	0.875	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.885	0.887	0.889	0.891	0.893	0.894	0.896	0.898	0.900	0.901
1.3	0.903	0.905	0.907	0.908	0.910	0.911	0.913	0.915	0.916	0.918
1.4	0.919	0.921	0.922	0.924	0.925	0.926	0.928	0.929	0.931	0.932
1.5	0.933	0.934	0.936	0.937	0.938	0.939	0.941	0.942	0.943	0.944
1.6	0.945	0.946	0.947	0.948	0.949	0.951	0.952	0.953	0.954	0.954
1.7	0.955	0.956	0.957	0.958	0.959	0.960	0.961	0.962	0.962	0.963
1.8	0.964	0.965	0.966	0.966	0.967	0.968	0.969	0.969	0.970	0.971
1.9	0.971	0.972	0.973	0.973	0.974	0.974	0.975	0.976	0.976	0.977
2.0	0.977	0.978	0.978	0.979	0.979	0.980	0.980	0.981	0.981	0.982
2.1	0.982	0.983	0.983	0.983	0.984	0.984	0.985	0.985	0.985	0.986
2.2	0.986	0.986	0.987	0.987	0.987	0.988	0.988	0.988	0.989	0.989
2.3	0.989	0.990	0.990	0.990	0.990	0.991	0.991	0.991	0.991	0.992
2.4	0.992	0.992	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.994
2.5	0.994	0.994	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995
2.6	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
2.7	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997
2.8	0.997	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
2.9	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999

t-Verteilung: Quantile $t_{n;p}$

	p					
n	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
1	3.08	6.31	12.70	31.82	63.70	318.30
2	1.89	2.92	4.30	6.97	9.92	22.33
3	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	10.22
4	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17
5	1.48	2.01	2.57	3.37	4.03	5.89
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21
7	1.42	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79
8	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50
9	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30
10	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14
11	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	4.03
12	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05	3.93
13	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85
14	1.35	1.76	2.14	2.62	2.98	3.79
15	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73
16	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69
17	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65
18	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61
19	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58
20	1.33	1.73	2.09	2.53	2.85	3.55
21	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53
22	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.51
23	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	3.49
24	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47
25	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79	3.45
26	1.32	1.71	2.06	2.48	2.78	3.44
27	1.31	1.71	2.05	2.47	2.77	3.42
28	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40
29	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40
30	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39
40	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31
60	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23
120	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62	3.17
∞	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09

χ^2-Verteilung: Quantile $\chi^2_{n;p}$

	p									
n	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	0.00004	0.00016	0.00098	0.0039	0.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.020	0.051	0.103	0.210	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.580	6.25	7.81	9.53	11.35	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.060	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.150	1.610	9.24	11.07	12.83	15.08	16.75
6	0.676	0.872	1.240	1.640	2.200	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.240	1.690	2.170	2.830	12.02	14.07	16.01	18.47	20.28
8	1.340	1.650	2.180	2.730	3.490	13.36	15.51	17.53	20.09	22.96
9	1.730	2.090	2.700	3.330	4.170	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.160	2.560	3.250	3.940	4.870	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.600	3.050	3.820	4.570	5.580	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.070	3.570	4.400	5.230	6.300	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.570	4.110	5.010	5.890	7.040	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.070	4.660	5.630	6.570	7.790	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.600	5.230	6.260	7.260	8.550	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.140	5.810	6.910	7.960	9.310	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.700	6.410	7.560	8.670	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.260	7.010	8.230	9.390	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.840	7.630	8.910	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.430	8.260	9.590	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.030	8.900	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.640	9.540	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.260	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.890	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	47.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.51	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.42	104.21
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.57	113.15	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17

F-Verteilung: Quantile $F_{n_1,n_2;p}$ für $p = 0.95$

n_2	n_1: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	20	50	100	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	245	246	248	252	253	254
2	19.0	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.71	8.69	8.66	8.58	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.87	5.84	5.80	5.70	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.64	4.60	4.56	4.44	4.41	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.96	3.92	3.87	3.75	3.71	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.53	3.49	3.44	3.32	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.24	3.20	3.15	3.02	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.03	2.99	2.93	2.80	2.76	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.86	2.83	2.77	2.64	2.59	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.74	2.70	2.65	2.51	2.46	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.64	2.60	2.54	2.40	2.35	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.55	2.51	2.46	2.31	2.26	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.48	2.44	2.39	2.24	2.19	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.38	2.42	2.38	2.33	2.18	2.12	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.37	2.33	2.28	2.12	2.07	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.33	2.29	2.23	2.08	2.02	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.29	2.25	2.19	2.04	1.98	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.26	2.21	2.15	2.00	1.94	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.22	2.18	2.21	1.97	1.91	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.20	2.16	2.10	1.94	1.88	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.17	2.13	2.07	1.91	1.85	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.15	2.11	2.05	1.88	1.82	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.13	2.09	2.03	1.86	1.80	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.11	2.07	2.01	1.84	1.78	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.10	2.05	1.99	1.82	1.76	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.08	2.04	1.97	1.81	1.74	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.06	2.02	1.96	1.79	1.73	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.05	2.01	1.94	1.77	1.71	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.04	1.99	1.93	1.76	1.70	1.62
32	4.15	3.29	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19	2.14	2.07	2.01	1.97	1.91	1.74	1.67	1.59
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17	2.12	2.05	1.99	1.95	1.89	1.71	1.65	1.57
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	2.11	2.03	1.98	1.93	1.87	1.69	1.62	1.55
38	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.09	2.02	1.96	1.92	1.85	1.68	1.61	1.53
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.95	1.90	1.84	1.66	1.59	1.51
42	4.07	3.22	2.83	2.59	2.44	2.32	2.24	2.17	2.11	2.06	1.99	1.93	1.89	1.83	1.65	1.57	1.49
44	4.06	3.21	2.82	2.58	2.43	2.31	2.23	2.16	2.10	2.05	1.98	1.92	1.88	1.81	1.63	1.56	1.48
46	4.05	3.20	2.81	2.57	2.42	2.30	2.22	2.15	2.09	2.04	1.97	1.91	1.87	1.80	1.62	1.55	1.46
48	4.04	3.19	2.80	2.57	2.41	2.30	2.21	2.14	2.08	2.03	1.96	1.90	1.86	1.79	1.61	1.54	1.45
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.95	1.89	1.85	1.78	1.60	1.52	1.44
55	4.02	3.16	2.78	2.54	2.38	2.27	2.18	2.11	2.06	2.01	1.93	1.88	1.83	1.76	1.58	1.50	1.41
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.86	1.82	1.75	1.56	1.48	1.39
65	3.99	3.14	2.75	2.51	2.36	2.24	2.15	2.08	2.03	1.98	1.90	1.85	1.80	1.73	1.54	1.46	1.37
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97	1.89	1.84	1.79	1.72	1.53	1.45	1.35
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.88	1.82	1.77	1.70	1.51	1.43	1.32
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.85	1.79	1.75	1.68	1.48	1.39	1.28
125	3.92	3.07	2.68	2.44	2.29	2.17	2.08	2.01	1.96	1.91	1.83	1.77	1.72	1.65	1.45	1.36	1.25
150	3.90	3.06	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89	1.82	1.76	1.71	1.64	1.44	1.34	1.22
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88	1.80	1.74	1.69	1.62	1.41	1.32	1.19
400	3.86	3.02	2.62	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85	1.78	1.72	1.67	1.60	1.38	1.28	1.13
1000	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89	1.84	1.76	1.70	1.65	1.58	1.36	1.26	1.08
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.69	1.64	1.57	1.35	1.24	1.00

19 Quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad\qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

20 Grenzwertsätze

- $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ Zahlenfolgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) &= a \pm b \\
\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) &= a \cdot b \\
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{a}{b} \quad \text{falls } b_n \neq 0 \text{ und } b \neq 0.
\end{aligned}$$

- Jede beschränkte monotone Zahlenfolge ist konvergent.
- Jede konvergente Zahlenfolge ist beschränkt.
- Das Produkt aus einer beschränkten Folge und einer Nullfolge ist eine Nullfolge.

21 Summenformel der geometrischen Reihe

- endliche geometrische Reihe

$$s_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} aq^k = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

- unendliche geometrische Reihe:

$$s = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q} \qquad \text{falls } |q| < 1$$

22 Die Eulersche Zahl

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{p}{1!} + \frac{p^2}{2!} + \ldots + \frac{p^n}{n!}\right) = e^p$$

23 Finanzmathematik

Zinseszinsformel	Barwert	(nachschüssige) Rentenformel
$K_n = K_0(1+p)^n$	$K_0 = K_n \dfrac{1}{(1+p)^n}$	$K_n = K_0(1+p)^n + E\dfrac{(1+p)^n - 1}{p}$

24 Trigonometrische Funktionen

$\sin(x)$	$\in$	$[-1, 1]$	$\cos(x)$	$\in$	$[-1, 1]$
$\sin(x + 2\pi)$	$=$	$\sin(x)$	$\cos(x + 2\pi)$	$=$	$\cos(x)$
$\sin^2(x) + \cos^2(x)$	$=$	1			
$\sin(-x)$	$=$	$-\sin(x)$	$\cos(-x)$	$=$	$\cos(x)$
$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	$=$	$\cos(x)$	$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	$=$	$-\sin(x)$
$\sin(\pi - x)$	$=$	$\sin(x)$	$\cos(\pi - x)$	$=$	$-\cos(x)$

25 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Sei $a > 0$ und $a \neq 1$, r, s beliebig und $u, v > 0$

$a^r \cdot a^s$	$=$	a^{r+s}	$\log_a(u \cdot v)$	$=$	$\log_a(u) + \log_a(v)$
$\frac{a^r}{a^s}$	$=$	a^{r-s}	$\log_a\left(\frac{u}{v}\right)$	$=$	$\log_a(u) - \log_a(v)$
$(a^r)^s$	$=$	$(a^s)^r = a^{r \cdot s}$	$\log_a(u^w)$	$=$	$w \cdot \log_a(u)$

26 Stetigkeit

f heisst an der Stelle x_0 stetig, falls

(1) $f(x_0)$ definiert ist und (2) $\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$

27 Grenzwerte bei Funktionen

1.	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^a}$	$=$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-a}$	$=$	0	für $a > 0$
2.	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k}$	$=$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^{-k}$	$=$	0	für $k \in \mathbb{N}$
3.	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x}$	$=$	$\lim\limits_{x\to+\infty} a^{-x}$	$=$	0	für $a > 1$
4.	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{a^x}$	$=$	$\lim\limits_{x\to-\infty} a^{-x}$	$=$	$+\infty$	für $a > 1$
5.	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\log_a(x)}$	$=$		$=$	0	für $a > 1$
6.	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x}$	$=$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^a e^{-x}$	$=$	0	für $a > 0$
7.	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a}$	$=$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-a} \cdot \ln(x)$	$=$	0	für $a > 0$

28 Differentiationsregeln

1.	$y = k$ konstant	$y' = 0$	
2.	$y = a \cdot f(x)$ mit $a \in \mathbb{R}$	$y' = a \cdot f'(x)$	Konstantenregel
3.	$y = f(x) \pm g(x)$	$y' = f'(x) \pm g'(x)$	Summenregel
4.	$y = x^a$ mit $a \in \mathbb{R}$	$y' = a \cdot x^{a-1}$	Potenzregel
5.	$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	Produktregel
6.	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $g(x) \neq 0$	$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$	Quotientenregel
7.	$y = f(g(x))$	$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	Kettenregel

29 Ableitungen spezieller Funktionen

$y = k = \text{konstant}$	$y' = 0$	
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$n \neq 0$, beliebige reelle Zahl
$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$	
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$	
$y = \tan(x)$	$y' = \frac{1}{\cos^2(x)}$	
$y = \ln(x)$	$y' = \frac{1}{x}$	
$y = e^x$	$y' = e^x$	
$y = a^x$	$y' = \ln(a) \cdot a^x$	
$y = \log_a(x)$	$y' = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x}$	

30 Ökonomische Funktionen

marginale Funktion von $y = f(x)$	Elastizität von $y = f(x)$	Wachstumsrate von $y = f(t)$
$f'(x)$	$\epsilon_{f,x} = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}$	$r(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{d}{dt} \ln(f(t))$

31 Das Taylorpolynom

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}$$

32 Partielle Elastizitäten

$$\epsilon_{f,x} = \frac{f_x(x,y)\cdot x}{f(x,y)} \quad \text{partielle Elastizität bezüglich } x$$

$$\epsilon_{f,y} = \frac{f_y(x,y)\cdot y}{f(x,y)} \quad \text{partielle Elastizität bezüglich } y$$

33 Tangentialebene

$$T(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

34 Totales Differential

$$df(x_0,y_0,dx,dy) = f_x(x_0,y_0)\cdot dx + f_y(x_0,y_0)\cdot dy = T(x_0+dx, y_0+dy) - T(x_0,y_0)$$

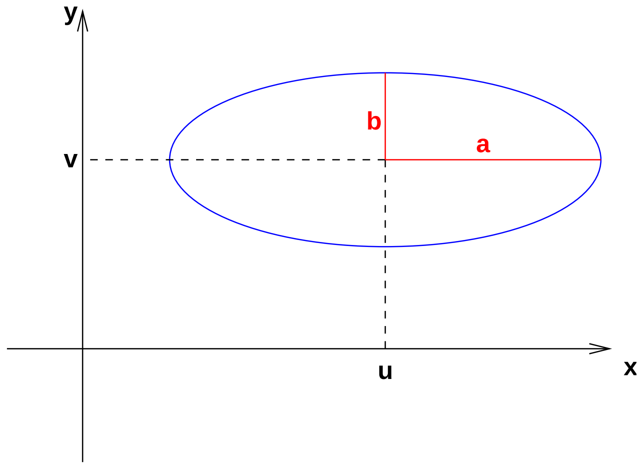
35 Verallgemeinerte Kettenregel

$$z(t) = f(h(t),g(t)) \quad \Rightarrow \quad z'(t) = f_x(x,y)\,\frac{dx}{dt} + f_y(x,y)\,\frac{dy}{dt}$$

36 Kegelschnitte

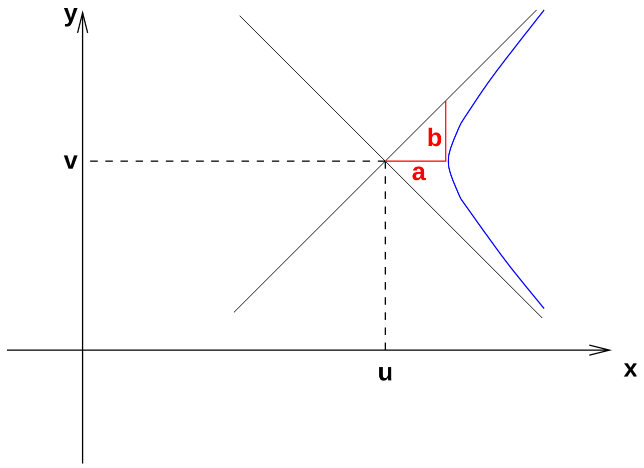
1. Ellipse mit dem Mittelpunkt (u, v) und den Halbachsen a und b

$$\phi(x, y) = \frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} - 1 = 0$$



2. Hyperbel mit dem Zentrum (u, v) und den Achsen a und b

$$\phi(x, y) = \frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} - 1 = 0$$



3. Parabel mit dem Zentrum (u, v) und dem Parameter a

$$\phi(x, y) = a(x-u)^2 - (y-v) = 0$$

37 Implizite Differentiation

$$\phi(x,y) \;=\; 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} \;=\; -\frac{\phi_x(x_0,y_0)}{\phi_y(x_0,y_0)}$$

38 Eulersche Relation

$z \;=\; f(x,y)$ homogen vom Grad $g \qquad \Rightarrow \qquad g \cdot f(x,y) = x \cdot f_x(x,y) + y \cdot f_y(x,y).$

39 Lokale Extremalstellen ohne Nebenbedingung

	Maximum	Minimum	Sattelpunkt
notwendige Bedingung	$f_x = f_y = 0$	$f_x = f_y = 0$	$f_x = f_y = 0$
hinreichende Bedingung	$f_{xx} < 0, f_{yy} < 0$ $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$	$f_{xx} > 0, f_{yy} > 0$ $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$	$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$

40 Lokale Extrema mit Nebenbedingung

Zielfunktion	$z \;=\; f(x,y)$
Nebenbedingung	$\phi(x,y) \;=\; 0$
Lagrange Funktion	$F(x,y,\lambda) \;=\; f(x,y) \;+\; \lambda \cdot \phi(x,y)$
Optimalitätsbedingung	$F_x \;=\; 0, \qquad F_y \;=\; 0, \qquad F_\lambda \;=\; 0$

41 Integration

Partielle Integration

$$\int u'(x)\, v(x)dx \;=\; u(x)\, v(x) - \int u(x)\, v'(x)dx$$

Substitution

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx \;=\; \int f(g)\, dg$$

Spezielle Stammfunktionen

$f(x)$	$\int f(x)\,dx \;=\; F(x) + C$	
x^n	$\dfrac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$	$n \neq -1$, beliebige reelle Zahl
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x) + C$	
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	
e^x	$e^x + C$	
$e^{\lambda x}$	$\dfrac{1}{\lambda} \cdot e^{\lambda x} + C$	
a^x	$\dfrac{1}{\ln(a)} \cdot a^x + C$	
$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x + C$	

42 Matrizenrechnung

Addition und Multiplikation

1a.	$A+B=B+A$	1b.	Im Allgemeinen: $AB \neq BA$
2a.	$(A+B)+C=A+(B+C)$	2b.	$(AB)C=A(BC)$
3a.	$A+0=A$	3b.	$AI=IA=A$, falls A quadratisch

Beachte

4. $AB=0 \quad \not\Rightarrow \quad A=0$ oder $B=0$
5. $AB=AC \quad \not\Rightarrow \quad B=C$

Distributivgesetze

6. $\lambda(A+B) = \lambda A+\lambda B \qquad \lambda \in \mathbb{R}$
7. $A(B+C) = AB+AC$
8. $(A+B)C = AC+BC$

Inverse und Transponierte

Definition von A^{-1}: $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

9. $(A^{-1})^{-1} = A$
10. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
11. $(A^T)^T = A$
12. $(A+B)^T = A^T+B^T$
13. $(AB)^T = B^TA^T$
14. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Für $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $ad-bc \neq 0$ gilt $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Determinanten

15. $\det(A) = a_{11}\det(A_{11})-a_{12}\det(A_{12})+\cdots+(-1)^{n+1}a_{1n}\det(A_{1n})$
16. $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$
17. $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
18. $\det(A^T) = \det(A)$

Beachte

19. A^{-1} existiert $\quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0$
20. $|\det(A)|$ ist das Volumen des von den Spaltenvektoren aufgespannten Parallelepipeds.

43 Gradient und Hesse-Matrix

$$\mathbf{grad} f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\mathbf{x}) \\ f_{x_2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \qquad Hf(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}) & f_{x_1x_2}(\mathbf{x}) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{x}) & f_{x_2x_2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Eigenschaften des Gradienten: Steht senkrecht zur Tangente an die Niveaulinie und stellt die Richtung der stärksten (lokalen) Funktionszunahme dar.

44 Quadratische Approximation von $z = f(x_1, x_2)$ bei a

$$P(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + (f_{x_1}(\mathbf{a}), f_{x_2}(\mathbf{a}))\,(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + (\mathbf{x}-\mathbf{a})^T\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_1x_2}(\mathbf{a}) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_2x_2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}(\mathbf{x}-\mathbf{a})$$

45 Lineare Unabhängigkeit, Vektorraum, Basis

- $n+1$ oder mehr Vektoren im n-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ sind stets linear abhängig.
- Jede Basis des $\mathbb{R}^n$ besteht aus genau n Vektoren.
- n linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^n$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$.
- Sind $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}$ eine Basis des Vektorraums V, so ist für jedes $\mathbf{x} \in$ V die Darstellung $\mathbf{x} = a_1\mathbf{u_1} + a_2\mathbf{u_2} + \ldots + a_n\mathbf{u_n}$ eindeutig.

46 Reguläre Matrizen

$A = A_{n\times n}$ regulär	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{rg}(A) = n$
	$\Leftrightarrow$	A^{-1} existiert
	$\Leftrightarrow$	$\det(A) \neq 0$
	$\Leftrightarrow$	Spaltenvektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$
	$\Leftrightarrow$	Zeilenvektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$
$A = A_{n\times n}$ singulär	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{rg}(A) < n$
	$\Leftrightarrow$	A^{-1} existiert nicht
	$\Leftrightarrow$	$\det(A) = 0$
	$\Leftrightarrow$	Spaltenvektoren sind linear abhängig
	$\Leftrightarrow$	Zeilenvektoren sind linear abhängig

47 Lineare Gleichungssysteme

gegeben: A eine $(m \times n)$-Matrix, $\mathbf{b}$ ein Spaltenvektor der Länge m

gesucht: Spaltenvektor $\mathbf{x}$ der Länge n, so dass $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Lösbarkeitskriterium : rg(A) = rg(A; $\mathbf{b}$)

Eindeutigkeitskriterium : rg(A) = n

Lösungsverfahren:

1. Gaußscher Algorithmus
2. Falls A regulär:
   (a) Cramersche Regel: $x_i = \det(A_i)/\det(A)$
   (b) $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

48 Eigenwerte und Eigenvektoren

gegeben: quadratische Matrix $A = A_{n\times n}$

gesucht: $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, so dass $A\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$

Lösung:

1. Schritt:	$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, I) = 0$	$\Rightarrow$	Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$
2. Schritt:	$(A - \lambda_1\, I)\,\mathbf{x}^{(\mathbf{1})} = \mathbf{0}$	$\Rightarrow$	$\mathbf{x}^{(\mathbf{1})}$ Eigenvektor zu λ_1
	$(A - \lambda_2\, I)\,\mathbf{x}^{(\mathbf{2})} = \mathbf{0}$	$\Rightarrow$	$\mathbf{x}^{(\mathbf{2})}$ Eigenvektor zu λ_2
	$\vdots$		$\vdots$

49 Lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung

Normalform ($A, B \in \mathbb{R}$ mit $A \neq 0$)

$$\boxed{y_{k+1} \;=\; A \cdot y_k + B}$$

Allgemeine Lösung

$$\boxed{y_k = \begin{cases} A^k\,(y_0 - y^*) + y^* & A \neq 1,\;\; y^* = \dfrac{B}{1-A} \\ y_0 + Bk & A = 1 \end{cases}}$$

Lösungsverhalten

$A > 0$	:	Lösung monoton
$A < 0$	:	Lösung oszillatorisch
$\lvert A\rvert < 1$	:	Lösung gedämpft, $\lim_{k\to\infty} y_k = y^*$
$\lvert A\rvert > 1$	:	Lösung explosiv

50 Lineare Differenzengleichungen 2. Ordnung

Normalform ($a_1, a_2, r \in \mathbb{R}$)

$$\boxed{y_{k+2} + a_1\, y_{k+1} + a_2\, y_k = r}$$

Charakteristische Gleichung

$$\boxed{m^2 + a_1\, m + a_2 = 0}$$

Allgemeine Lösung, Superpositionsprinzip

$$\boxed{y_k = c_1\, y_k^{(1)} + c_2\, y_k^{(2)} + y_k^*}$$

- $y_k^{(1)}$, $y_k^{(2)}$ zwei linear unabhängige Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung
- y_k^* eine (spezielle) Lösung der inhomogenen Gleichung

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

1. $\boxed{a_1^2 - 4a_2 > 0}$ Die charakteristische Gleichung hat zwei verschiedene reelle Lösungen m_1 und m_2 und die allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung ist
$$y_k \quad = \quad c_1\, m_1^k + c_2\, m_2^k$$
2. $\boxed{a_1^2 - 4a_2 = 0}$ Die charakteristische Gleichung hat eine reelle Lösung $m = -\frac{a_1}{2}$ und die allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung ist
$$y_k \quad = \quad (c_1 + c_2\, k)\, m^k$$
3. $\boxed{a_1^2 - 4a_2 < 0}$ Die charakteristische Gleichung hat keine reelle Lösungen und die allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung ist
$$y_k \quad = \quad R^k (c_1\ \sin(k\phi) + c_2\ \cos(k\phi))$$
wobei
   - $R = \sqrt{a_2}$
   - $\cos(\phi) = -\dfrac{a_1}{2\sqrt{a_2}}, \quad 0 \le \phi < \pi$

Spezielle Lösung y_k^* der inhomogenen Gleichung

$1 + a_1 + a_2 \neq 0$	$y_k^* = \dfrac{r}{1 + a_1 + a_2} \;=\; konstant$
$1 + a_1 + a_2 = 0, \quad a_1 \neq -2$	$y_k^* = \dfrac{r}{2 + a_1} \cdot k$
$1 + a_1 + a_2 = 0, \quad a_1 = -2$	$y_k^* = \dfrac{r}{2} \cdot k^2$