WWZ
Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der
Universität Basel

Dr. Thomas Zehrt

Bitte in Druckbuchstaben ausfüllen:

Name	
Vorname	

Prüfung Mathematik 2
Herbstsemester 2020

+ Lösungen

Hinweise:

- Die Prüfung umfasst 12 Aufgaben (1 bis 12).
- Die Bewertung der Teilaufgaben erfolgt gemäss den eingerahmten Punktzahlen.
- Provisorische Berechnungen sind auf den gekennzeichneten Blättern bzw. auf dem Umschlagblatt auszuführen. Diese Blätter sind ebenfalls abzugeben.
- Die definitive Lösung darf von jeder Aufgabe nur eine Version enthalten und hat direkt im Anschluss an diese Aufgabe (bzw. auf der Rückseite des entsprechenden Aufgabenblattes) zu erfolgen. Dabei sollten alle Rechenschritte klar ersichtlich sein.
- Die ausgeteilte Formelsammlung darf nicht beschriftet werden und ist ebenfalls mit der Prüfung abzugeben.

1. (a) Es seien die folgenden drei Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie falls möglich

- $C^T \cdot C$, $= 14$ $\boxed{1}$
- $C \cdot C^T$, $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} = C \cdot C^T$ $\boxed{1}$
- $(A - B)^{-1}$. $\boxed{2}$

(b) Lösen Sie unter Anwendung der Rechenregeln für Matrizen die Matrizengleichung $(XA + IX)^T = A^T + 2 \cdot I$ nach der Matrix X auf. Versuchen Sie, die Lösung in möglichst einfacher Form darzustellen. $\boxed{2}$

Lösung:

(a) $(A-B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$

b) $(XA + X)^T = A^T + 2 \cdot J \quad | \; (\;)^T$

$\Rightarrow \quad XA + X = A + 2J$

$\Rightarrow \quad X \cdot (A + J) = A + 2J \quad | \cdot (A+J)^{-1}$

$X = \underline{\underline{(A + 2 \cdot J) \cdot (A + J)^{-1}}}$

2. (a) Wie ist der Rang einer Matrix definiert? $\boxed{1}$

(b) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & 4 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

i. Zeigen Sie **Schritt für Schritt und nachvollziehbar**, dass der Rang von A gleich 3 ist. $\boxed{3}$

ii. Bestimmen Sie $\det(A)$. (Rechnung oder Begründung!) $\boxed{1}$

iii. Bestimmen Sie (falls möglich) die Inverse A^{-1}. (Rechnung oder Begründung!) $\boxed{1}$

Lösung:

(a) Skript

(b) i. ÜA Skript 2, 4, E

$\to rg(A) = 3$

ii. $\det(A) = 0$, da A singulär.

iii. A^{-1} existiert nicht, da A singulär.

3. (a) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems. [3]

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 7x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \end{array}$$

(b) Für welche reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}$ hat das folgende lineare Gleichungssystem keine Lösung, genau eine Lösung, bzw. unendlich viele Lösungen? [3]

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & ay & - & z & = & a \\ 2x & & & + & z & = & -1 \end{array}$$

Lösung:

(a)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) - 2\,\mathrm{I}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 & 6 \\ 0 & -3 & -7 & -12 & -8 \end{array}\right)$$

$\rightarrow \quad -3x_2 - 7x_3 - 12x_4 = -8$

$\rightarrow \quad x_2 = \frac{8}{3} - \frac{7}{3}\underbrace{x_3}_{=s} - 4\underbrace{x_4}_{=t}$

in I: $x_1 + 2\left(\frac{8}{3} - \frac{7}{3}s - 4t\right) + 4 \cdot s + 7 \cdot t = 6$

$\rightarrow \quad x_1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}s + t$

Lsg: $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 8/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2/3 \\ -7/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Skript 3, Bsp 4.3

4. (a) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 0 \\ 7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

i. Ermitteln Sie die Eigenwerte der Matrix A. $\boxed{2}$

ii. Ermitteln Sie den Eigenvektor zum kleinsten gefundenen Eigenwert. $\boxed{1}$

iii. Bestimmen Sie die Definitheit von A (Begründung). $\boxed{1}$

(b) Erläutern Sie (kurz), warum man bei der Suche nach den Eigenwerten einer Matrix A die Nullstellen von $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ bestimmt. $\boxed{2}$

Lösung:

(a)

i. $\det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 7 & 0 \\ 7 & 7-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} 7-\lambda & 7 \\ 7 & 7-\lambda \\ 0 & 0 \end{matrix}$

$$= (7-\lambda)^2(1-\lambda) - 49(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)\left[\cancel{49} - 14\lambda + \lambda^2 - \cancel{49}\right]$$

$$= (1-\lambda) \cdot (\lambda - 14) \cdot \lambda \quad \rightarrow \text{EW: } \underline{\underline{0, 1, 14}}$$

ii. $\lambda = 0$ $\quad \begin{pmatrix} 7 & 7 & 0 \\ 7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

iii. positiv semidefinit, da EW: 0, 1, 14

(b) Siehe Herleitung der Gleichung $\det(A - \lambda I) = 0$ aus der Definition von Eigenwerten $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$.

5. Wir betrachten die quadratische Form: $Q(x_1, x_2, x_3) = -x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$.

(a) Bestimmen Sie die assoziierte (symmetrische) Matrix A, so dass $Q = Q_A$ gilt. $\boxed{2}$

(b) Untersuchen Sie Q auf Definitheit. Begründung! $\boxed{2}$

(c) Geben Sie eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ an, auf der Q ausschliesslich den Wert 0 annimmt. $\boxed{2}$

Lösung:

$0 \cdot x_1^2$ $\quad$ $-1 \cdot x_2^2$

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $4x_2x_3$

$2x_1x_2$ $\quad$ $1 \cdot x_3^2$

(b) indefinit, denn auf der Hauptdiagonalen gibt es positive und negative Werte

(c) $t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (als einfachstes Beispiel)

6. (a) Was versteht man unter einem Regressionsproblem? $\boxed{2}$

(b) Bestimmen Sie den Vektor $\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{y}$, falls

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

gilt. Rechnung oder Begründung! $\boxed{4}$

Lösung:

(a)

(b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

- denn die Regressionsgerade zu den Daten

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2	4	6	8	10

ist $\hat{y} = 0 + 2 \cdot x$

- oder Rechnung ...

7. X sei eine stetige Zufallsvariable mit der Dichtefunktion

$$f(t) = \begin{cases} c \cdot t & \text{für } |t-4| \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad \Longleftrightarrow \quad 2 \leq t \leq 6$$

Dabei ist c eine geeignet zu wählende Konstante.

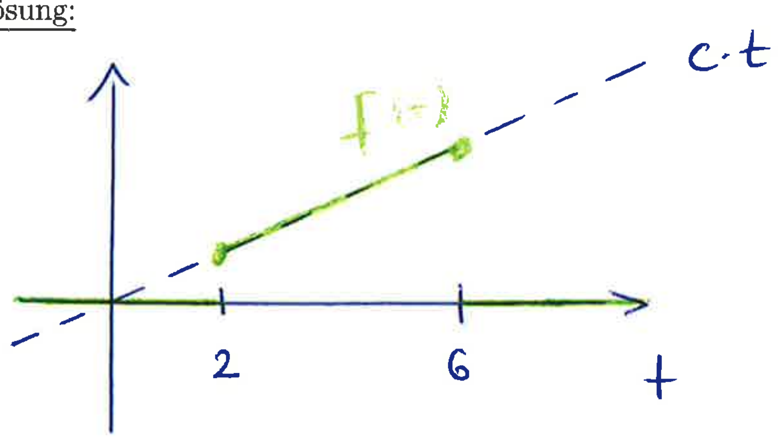
(a) Skizzieren Sie den Graphen von f. $\boxed{2}$

(b) Bestimmen Sie die Konstante c. $\boxed{1}$

(c) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F von X. $\boxed{3}$

Lösung:

(a)



(b) $$\int_2^6 c \cdot t \, dt = c \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_2^6 \overset{!}{=} 1 \longrightarrow c = \frac{1}{16}$$

(c)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{16} t \, dt = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{1}{32} x^2 + k & x \in [2,6] \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

k bestimmen:

$$F(2) = \frac{1}{32} 2^2 + k \overset{!}{=} 0$$

$$\longrightarrow \quad k = -\frac{1}{8}$$

8. (a) Berechnen Sie $P(X > 1)$, falls X standardnormalverteilt ist. $\boxed{2}$

(b) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(0 \leq X \leq 2 | X > 1)$, falls X standardnormalverteilt ist. $\boxed{2}$

(c) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(0 \leq X \leq 4 | X > 3)$, falls X exponentialverteilt mit $E(X) = 2$ ist. $\boxed{2}$

Lösung:

Standardnormalverteilt heisst normalverteilt mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$.

(a) $1 - P(X \leq 1) = 1 - \Phi(1) = \underline{0.159}$

(b) $$\frac{P(1 \leq X \leq 2)}{P(X > 1)} = \frac{\Phi(2) - \Phi(1)}{1 - \Phi(1)} = \underline{0.855}$$

(c) $E(X) = 2 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

$$\frac{F_{Ex}(4) - F_{Ex}(3)}{1 - F_{Ex}(3)} = \frac{e^{-3/2} - e^{-2}}{e^{-3/2}} = \underline{0.3934}$$

9. Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{mit } P(X_i = 0) = 1/5 \\ 3 & \text{mit } P(X_i = 3) = 4/5 \end{cases}$$

und sei $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen S_3. $\boxed{4}$

(b) Bestimmen Sie die Varianz der Zufallsvariablen $X_1 - 2X_2 - 10$. $\boxed{2}$

Lösung:

(a)

0	3	6	9
$\left(\frac{1}{5}\right)^3$	$3\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)$	$3\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^2$	$\left(\frac{4}{5}\right)^3$

(b)

$$Var(X_1 - 2X_2 - 10)$$
$$= Var(X_1) + 4 \cdot Var(X_2)$$
$$= \frac{36}{25} + 4\,\frac{36}{25}$$
$$= \frac{36}{5}$$

Beachten Sie die Rechenregeln für Varianzen!

Und: Varianzen sind nie negativ

$$E(X_i) = 0 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$$

$$Var(X_i) = \left(0 - \frac{12}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} + \left(3 - \frac{12}{5}\right)^2 \frac{4}{5} = \frac{36}{25}$$

10. (a) Sei

$$f(x,y) = \begin{cases} 3e^{-x}e^{-3y} & \text{für } x, y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Bestimmen Sie $\int_{-5}^{1} \int_{-3}^{1/2} f(x,y)\, dx\, dy$. $\boxed{3}$

(b) Wir werfen einen fairen Würfel zweimal. Sei X_1 die Augenzahl des 1. Wurfes und X_2 die Augenzahl des zweiten Wurfes. Wir betrachten die beiden Zufallsvariablen $X = X_1 + X_2$ und $Y = X_1$. Sind X und Y stochastisch abhängig oder unabhängig? Begründung. $\boxed{3}$

Lösung:

(a) $3 \int_0^1 e^{-x}\,dx \int_0^{1/2} e^{-3y}\,dy$

$= \ldots$ $= \underline{0.3738}$

(b) Beachten Sie:
Es geht um stochastische Unabhängigkeit!

Natürlich stochastisch abhängig, denn z.B.

$0 = P(X_1 + X_2 = 2 \mid X_1 = 6)$

$\neq P(X_1 + X_2 = 2)$

$\left(= \frac{1}{36}\right)$

11. (a) $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Der Parameter μ soll mittels

$$T = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2(n-1)}\sum_{i=2}^{n} X_i$$

geschätzt werden. Bestimmen Sie **Schritt für Schritt und nachvollziehbar** Erwartungswert und Varianz von T. $\boxed{3}$

(b) Bei einer Abfüllanlage mit dem Sollwert 100 ml ist die tatsächliche Füllmenge eine normalverteilte Zufallsvariable X mit Standardabweichung $\sigma_0 = 1.5$ ml. Eine Stichprobe im Umfang $n = 30$ ergab $\bar{x} = 101$ ml. Konstruieren Sie ein Konfidenzintervall für den Mittelwert μ für $\alpha = 0.05$. $\boxed{3}$

Lösung:

(a) $$E\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2(n-1)}\sum_{i=2}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{E(X_1)}_{\mu} + \frac{1}{2(n-1)}\sum_{i=2}^{n}\underbrace{E(X_i)}_{\mu}$$

$$= \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2\cancel{(n-1)}} \cdot \cancel{(n-1)}\mu = \underline{\underline{\mu}}$$

$$Var\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2(n-1)}\sum_{i=2}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{4}\underbrace{Var(X_1)}_{\sigma^2} + \frac{1}{4(n-1)^2}\sum_{i=2}^{n}\underbrace{Var(X_i)}_{\sigma^2}$$

$$= \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{4(n-1)^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{(n-1)} \cdot \sigma^2$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}\sigma^2\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)}}$$

(b) $$z_{0.975} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = 1.96\,\frac{1.5}{\sqrt{33}} = 0.5368$$

$$[101 - 0.5368,\ 101 + 0.5368]$$

12. Die Behauptung eines Autoherstellers, dass ein Fahrzeugtyp einen durchschnittlichen Dieselverbrauch von höchstens 6.2 [Litern/100 km] hat, soll getestet werden. Dabei soll im Zweifel dieser Aussage geglaubt werden. Aus einer Stichprobe vom Umfang $n = 20$ konnte $\bar{x} = 6.3$ [Liter/100 km] (Mittelwert) und $s = 1.3$ [Liter/100 km] (Standardabweichung) bestimmt werden. Führen Sie einen passenden Test mit Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ durch. $\boxed{6}$

Lösung:

(a) H_0: $\mu \leq 6.2 = \mu_0$

(b) H_1: $\mu > 6.2$

(c) Test(Name): t-Test (s = 1.3 Schätzwert für σ)

(d) T (allgemein): $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$

(e) t (speziell): $t = \dfrac{6.3 - 6.2}{1.3/\sqrt{20}} = 0.344$

(f) vollständiger Verwerfungsbereich:

$R = (t_{19;0.95}, \infty) = (1.73, \infty)$

(g) Entscheidung:

H_0 beibehalten, da $0.344 \notin R$