



Veranstaltung/Course:	10136-01 Mathematik 2
Semester/Semester:	
Prüfer/Examiner:	Dr. Thomas Zehrt
Datum+Zeit/Date+Time:	
Dauer/Duration:	90 min

Erlaubte Hilfsmittel:

- einfacher Taschenrechner
(nur TI-30 Modelle siehe Liste auf der Fakultätshomepage)
- Wörterbuch für Fremdsprachige
- Formelsammlung (wird gestellt)

Permitted aids:

- simple calculator
(only TI-30 model in accordance with list on the faculty webpage)
- foreign-language dictionary
- formulary (provided)

Hinweis:

Falls eine Studentin oder ein Student eine Leistungsüberprüfung mit unlauteren Mitteln beeinflusst oder zu beeinflussen versucht, gilt die betreffende Leistungsüberprüfung als nicht bestanden und wird mit der Note 1.0 bewertet (gemäß BA-Ordnung §23, MA-Ordnung §23).

Note:

If a student is found to use or to attempt to use dishonest means to influence his or her performance in the exam, the work will be disqualified and graded 1.0 (in accordance with BA-Regulation §23, MA-Regulation §23).

Name/Last name	
Vorname/First name	
Matr.-Nr.	

Mathematik 2

Bemerkungen:

1. Die Prüfung umfasst 12 Aufgaben (1 bis 12). Beantworten Sie ALLE Fragen.
2. Skizzen und Diagramme müssen NICHT massstabsgetreu sein.
3. Die Bewertung der Teilaufgaben erfolgt gemäss den eingerahmten Punktzahlen.
4. Die definitive Lösung darf von jeder Aufgabe nur eine Version enthalten und hat direkt im Anschluss an diese Aufgabe (bzw. auf der Rückseite des Aufgabenblattes) zu erfolgen.
5. Die ausgeteilten Formelsammlungen dürfen nicht beschriftet werden und sind ebenfalls mit der Prüfung abzugeben.
6. Nutzen Sie für provisorische Berechnungen das Umlageblatt.
7. Beantworten Sie die Fragen auf Deutsch oder Englisch.

Remarks:

- The exam consists of 12 questions (1 to 12). Answer ALL the questions.
 - Sketches and diagrams are NOT necessarily drawn to scale.
 - The subquestions are graded according to the framed number of points.
 - The final solution must only contain one version to each question and has to stand directly after this question (or on the back of the corresponding question sheet).
 - The distributed formulary is not allowed to be labeled and has to be submitted with the exam.
 - Use the cover sheet for provisional calculations.
 - Answer the questions in German or English.
-

Aufgabe/Question 1

1. Sei/Let

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und/and} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie einen zu \mathbf{x} und \mathbf{y} senkrechten Vektor der Länge 2. Determine a vector perpendicular to \mathbf{x} and \mathbf{y} of length 2.

3

2. Sei/Let $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und/and $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie/Compute $(A - 2B^{-1})^T \cdot C$.

3

Lösung/Solution:

Aufgabe/Question 2

$$\text{Sei/Let } A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 7 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 8 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 9 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{und/and } D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Ränge der Matrizen.
Rechnung oder Begründung!

Determine the ranks of the matrices.
Calculation or justification!

6

Lösung/Solution:

Aufgabe/Question 3

1. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem: Given the system of linear equations:

$$\begin{array}{rclcl} p \cdot x & & + & z & = & 1 \\ x & + & p \cdot y & & = & 2 \\ & & y & + & p \cdot z & = & -3 \end{array}$$

- (a) Bestimmen Sie alle Lösungen für $p = 0$. (a) Determine all solutions for $p = 0$. 2
(b) Für welche Parameter p hat das System genau eine Lösung? Begründung! (b) For which parameters p does the system have exactly one solution? Justification! 2
-

2. Kann ein homogenes lineares Gleichungssystem keine Lösung haben? Begründung! Can a homogeneous linear system of equations have no solution? Justification! 2

Lösung/Solution:

Aufgabe/Question 4

Sei/Let

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen A und A^{-1} .

(b) Untersuchen Sie A und A^{-1} auf ihre Definitheit.

(a) Find the eigenvalues and eigenvectors of the matrices A and A^{-1} .

(b) Examine the definiteness of A and A^{-1} .

4

2

Lösung/Solution:

Aufgabe/Question 5

Sei/Let

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 \quad \text{und/and} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die quadratische Approximation von f in \mathbf{a} .
(b) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f in \mathbf{a} sowie deren Definitheit.

- (a) Determine the quadratic approximation of f at \mathbf{a} .
(b) Determine the Hesse matrix of f in \mathbf{a} and its definiteness.

4

2

Lösung/Solution:

Aufgabe/Question 6

1. Was versteht man unter einem Regressionsproblem?

What is meant by a regression problem?

2

2. Sei/let $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{y}$ mit /with $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und/and $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie \mathbf{b} . Rechnung oder Begründung!

Determine \mathbf{b} . Calculation or justification!

2

3. In einem klassischen Regressionsproblem gilt $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{e} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{e}$. Haben die Komponenten des Vektors \mathbf{y} dasselbe arithmetische Mittel wie die Komponenten von $\hat{\mathbf{y}}$? Begründung!

In a classical regression problem we have $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{e} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{e}$. Do the components of \mathbf{y} have the same arithmetic mean as the components of $\hat{\mathbf{y}}$? Reason!

2

Lösung/Solution:

Aufgabe/Question 7

X sei eine stetige Zufallsvariable mit der Dichtefunktion

Let X be a continuous random variable with the density function

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für/for } x < 1 \\ cx & \text{für/for } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{für/for } 2 < x \end{cases} .$$

- (a) Bestimmen Sie die Konstante c .
- (b) Skizzieren Sie die Dichtefunktion.
- (c) Berechnen Sie $P(X = 1.5 \text{ oder } X > 2)$.
- (d) Bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion F .

- (a) Determine the constant c .
- (b) Sketch the density function.
- (c) Calculate $P(X = 1.5 \text{ or } X > 2)$.
- (d) Determine the associated distribution function F .

1

1

1

3

Lösung/Solution:

Aufgabe/Question 8

Der zufällige Vektor (X, Y) genüge der folgenden Verteilung:

The random vector (X, Y) satisfies the following distribution:

$X \setminus Y$	-1	0	1	
-1	0	0	1/8	
0	0	1/2	0	
1	1/4	0	1/8	

(a) Bestimmen Sie die Randverteilungen von X und Y .

(b) Berechnen Sie $E(X)$ und $E(Y)$.

(c) Berechnen Sie $Cov(X, Y)$.

(d) Sind die beiden Zufallsvariablen unabhängig? Begründung!

(a) Determine the marginal distributions of X and Y .

(b) Compute $E(X)$ and $E(Y)$.

(c) Calculate $Cov(X, Y)$.

(d) Are the two random variables independent? Justification!

1

1

2

3

Lösung/Solution:

Aufgabe/Question 9

Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit $E(X) = 3$ und $Var(X) = 4$.

Let X be a normally distributed random variable with $E(X) = 3$ and $Var(X) = 4$.

1. (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(|X - 3| > 1)$.
(b) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(-1 \leq X \leq 4 \mid X > 3)$.

- (a) Calculate the probability $P(|X - 3| > 1)$.
(b) Calculate the conditional probability $P(-1 \leq X \leq 4 \mid X > 3)$.

2

2

-
2. Was besagt der **Satz von Bernoulli**?

What does **Bernoulli's theorem** state?

2

Lösung/Solution:

Aufgabe/Question 10

Seien X_1, X_2, \dots unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, so dass für alle $i = 1, 2, \dots$ gilt

Let X_1, X_2, \dots be independent and identically distributed random variables, s.t. for all $i = 1, 2, \dots$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{mit } P(X_i = 1) = p \\ 0 & \text{mit } P(X_i = 0) = 1 - p \end{cases} .$$

und/and

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

(a) Geben Sie die Verteilung der Zufallsvariablen S_3 an.

(b) Berechnen Sie $E(S_n)$ und $Var(S_n)$.

(c) Wie lautet die Grenzverteilung ($n \rightarrow \infty$) von S_n ?

(a) Specify the distribution of the random variable S_3 .

(b) Compute $E(S_n)$ and $Var(S_n)$.

(c) What is the limiting distribution ($n \rightarrow \infty$) of S_n ?

2

2

2

Lösung/Solution:

Aufgabe/Question 11

Bei einer Flaschenabfüllanlage mit dem Sollwert 1000 ml ist die tatsächliche Füllmenge eine normalverteilte Zufallsvariable X . Eine Stichprobe im Umfang $n = 20$ ergab $\bar{x} = 996$ ml.

- (a) Konstruieren Sie ein Konfidenzintervall für den Mittelwert μ für $\alpha = 0.05$, falls $\sigma_0^2 = 4$ gilt.
(b) Konstruieren Sie ein Konfidenzintervall für den Mittelwert μ für $\alpha = 0.05$, wenn σ_0^2 unbekannt ist und für die Stichprobenvarianz $S_X^2 = 4$ gilt.

Lösung/Solution:

In a bottling plant with a nominal value of 1000 ml, the actual filling quantity is a normally distributed random variable X . A sample of size $n = 20$ yielded $\bar{x} = 996$ ml.

- (a) Construct a confidence interval for the mean μ for $\alpha = 0.05$, if $\sigma_0^2 = 4$.
(b) Construct a confidence interval for the mean μ for $\alpha = 0.05$, if σ_0^2 is unknown and $S_X^2 = 4$ is the sample variance.

3

3

Aufgabe/Question 12

Bei der Produktion von Bolzen beträgt der Sollwert für den Durchmesser 10 mm. Der Bolzendurchmesser X sei dabei normalverteilt mit dem unbekanntem Erwartungswert μ und der durch die Konstruktion der Maschine festgelegten Standardabweichung $\sigma_0 = 0.5$ mm. Zur Überprüfung der Einstellung werden 100 Teile entnommen und daraus der mittlere Durchmesser $\bar{x} = 10.15$ mm berechnet. Prüfen Sie die Hypothese $H_0 : \mu = 10$ mm mit $\alpha = 0.05$.

During the production of bolts, the nominal value for the diameter is 10 mm. The bolt diameter X is normally distributed with the unknown expected value μ and the standard deviation determined by the machine's design $\sigma_0 = 0.5$ mm. To check the setting, 100 parts are taken and the mean diameter $\bar{x} = 10.15$ mm is calculated from them. Test the hypothesis $H_0 : \mu = 10$ mm with $\alpha = 0.05$.

6

Lösung/Solution:

1. H_0 :

2. H_1 :

3. Test/test(Name/name):

4. T (allgemein/generally):

5. t (speziell/special):

6. vollständiger Verwerfungsbereich/critical region:

7. Entscheidung/decision: