Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Universität Basel

Mathematik 2

Dr. Thomas Zehrt

Vektoren und Matrizen

Inhaltsverzeichnis

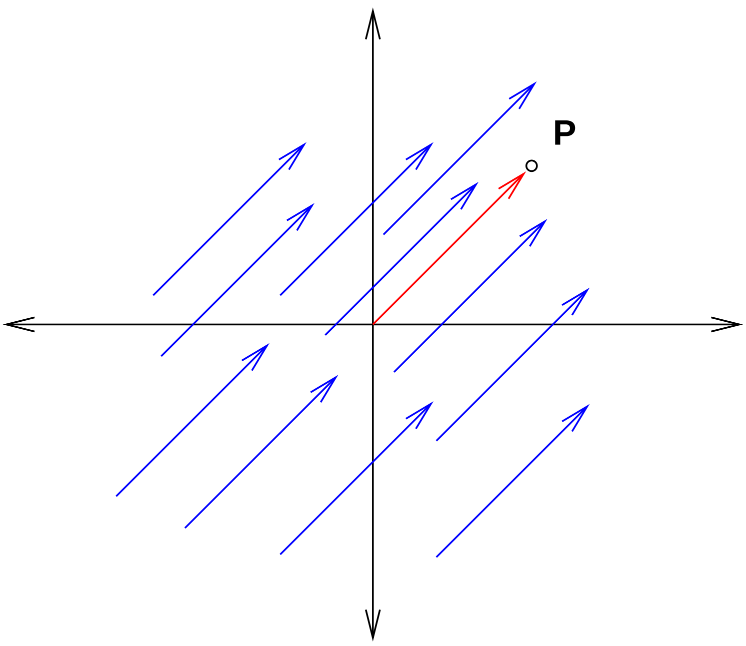
1 Vektoren(Wiederholung bzw. Selbststudium)

Ein Vektor mit zwei oder drei (oder auch mehr) Komponenten

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

kann geometrisch gedeutet werden:

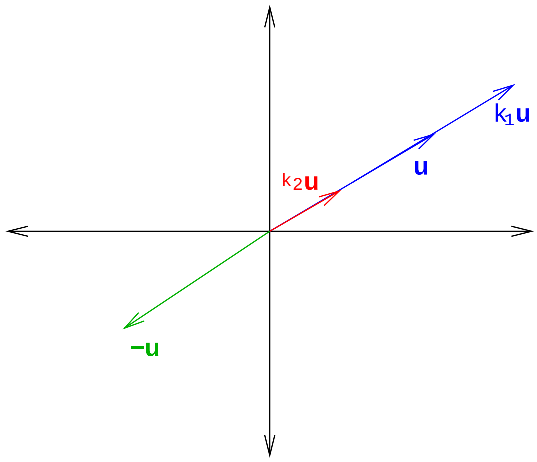
- als Punkt P in der Ebene bzw. im 3-dimensonalen Raum
- als „Pfeil“ vom Ursprung 0 nach P
- als Klasse der „Pfeile“ der entsprechenden Länge und Richtung (freie Vektoren)



1.1 Linearkombinationen

Streckung um k

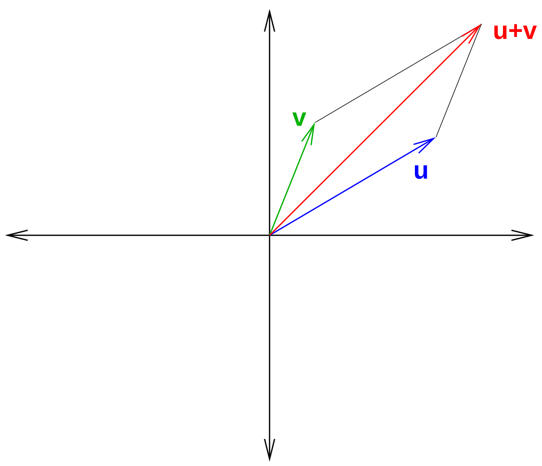
$$k \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad k\mathbf{u} = \begin{pmatrix} ku_1 \\ ku_2 \end{pmatrix}$$



$k_1 > 1$	Streckung
$0 < k_2 < 1$	Stauchung
$k = -1$	Spiegelung

Addition von zwei Vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$$

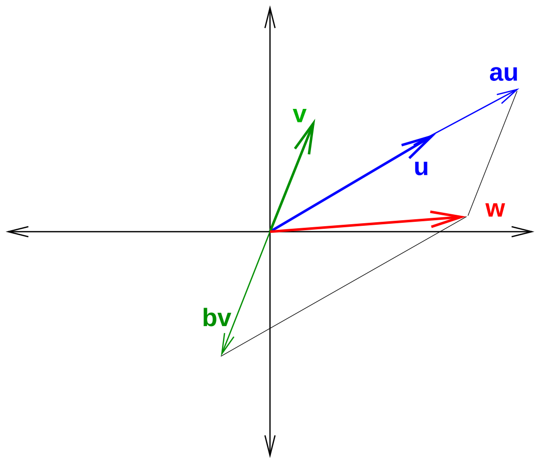


Linearkombinationen

gegeben: $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ Vektoren und $a, b \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}}$$

heisst Linearkombination der Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$.



Beispiel 1.1 *Seien* $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ *Vektoren,* $a = -2$ *und* $b = 4$ *reelle Zahlen. Dann gilt* $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 2 \\ (-2) \cdot (-3) + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 22 \end{pmatrix}$

Definition 1.1 *gegeben: Vektoren* $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_k}$ *und reelle Zahlen* $a_1, a_2, \ldots, a_k$

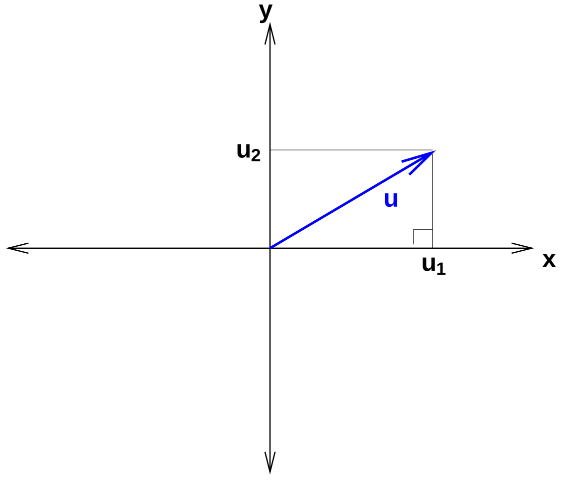
$$\boxed{\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{u_i} = a_1\mathbf{u_1} + a_2\mathbf{u_2} + \ldots + a_k\mathbf{u_k}}$$

heisst Linearkombination der Vektoren $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_k}$.

1.2 Länge eines Vektors

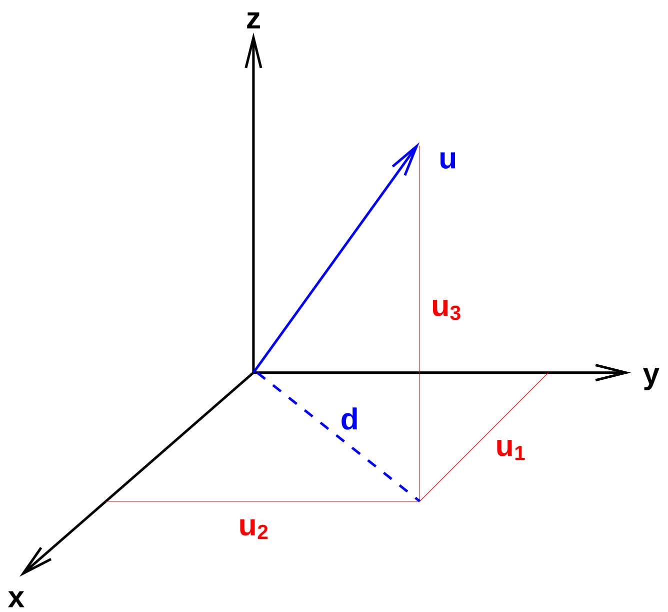
Definition 1.2 *Durch* $||\mathbf{u}||$ *sei die* <u>*Länge*</u> *oder der* <u>*Betrag*</u> *des Vektors* $\mathbf{u}$ *bezeichnet.*

- $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$



$$||\mathbf{u}||^2 = u_1^2 + u_2^2 \qquad ||\mathbf{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

- $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$



$$d^2 = u_1^2 + u_2^2 \qquad ||\mathbf{u}||^2 = u_3^2 + d^2$$

$$||\mathbf{u}||^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \qquad ||\mathbf{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

- $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u}||^2 &= u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 \\ ||\mathbf{u}|| &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} \end{aligned}$$

Beispiel 1.2 *Der Vektor* $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ *hat die Länge*

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

1.3 Das Skalarprodukt

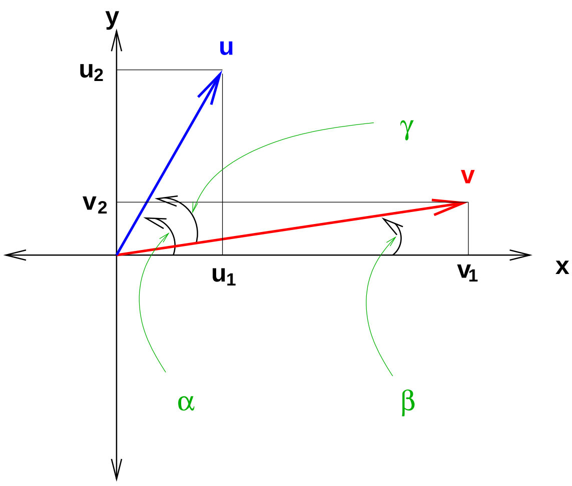
$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

Definition 1.3 *Das Skalarprodukt der Vektoren* $\mathbf{u}$ *und* $\mathbf{v}$ *ist*

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Satz 1 *Mit dem Winkel* γ *zwischen den beiden Vektoren* $\mathbf{u}$ *und* $\mathbf{v}$ *gilt:*

$$\boxed{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = ||\mathbf{u}|| \; ||\mathbf{v}|| \; \cos(\gamma)}$$



Beweis:

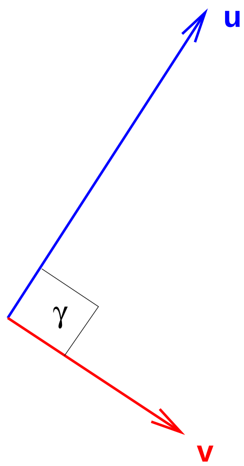
$$\begin{aligned} \cos(\gamma) &= \cos(\alpha - \beta) \\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u}|| \; ||\mathbf{v}|| \; \cos(\gamma) &= \overbrace{||\mathbf{u}||\cos(\alpha)}^{u_1} \; \overbrace{||\mathbf{v}||\cos(\beta)}^{v_1} + \\ & \quad \underbrace{||\mathbf{u}||\sin(\alpha)}_{u_2} \; \underbrace{||\mathbf{v}||\sin(\beta)}_{v_2} \end{aligned}$$

1.4 Orthogonalität von Vektoren

Für zwei Vektoren $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ gilt

$$\boxed{\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \cos(\gamma) = 0}$$



Beispiel 1.3 *Die beiden Vektoren* $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ *sind orthogonal, denn es gilt*

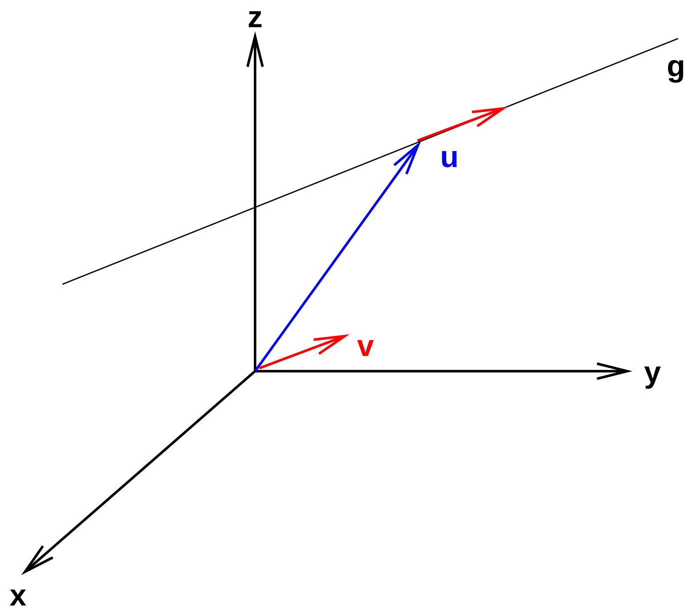
$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} \;=\; 1 \cdot 6 + (-3) \cdot 2 \;=\; 6 - 6 \;=\; 0.$$

1.5 Geraden und Ebenen

Vektorielle Darstellung einer Geraden g

$\mathbf{u}$ Ortsvektor eines Punktes auf g und $\mathbf{v}$ Vektor in Richtung von g

$$\boxed{\mathbf{g} = \mathbf{u} + t\mathbf{v} \qquad t \in \mathbb{R}}$$



Beispiel 1.4 *Die beiden Vektoren* $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *definieren die Gerade*

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Im letzten Semester haben wir Geradengleichungen der Gestalt $y = mx + n$ kennengelernt und wir wollen das als Kooordinatendarstellung einer Geraden bezeichnen. Wie hängen nun vektorielle Darstellung und Kooordinatendarstellung zusammen?

Die oben beschriebene Gerade in vektorieller Darstellung kann auch zeilenweise gelesen werden:

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \cdot 1 \quad \textit{oder} \quad t = x - 1 \\ y &= -3 + t \cdot 2 \end{aligned}$$

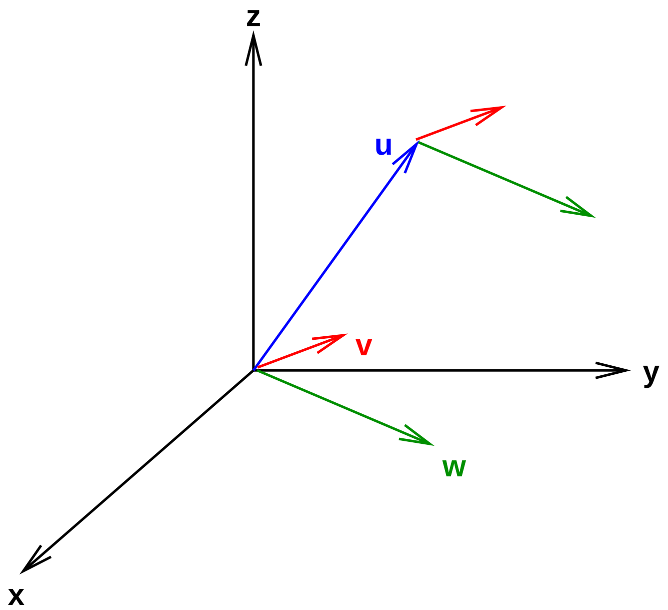
Lösen wir nun eine der beiden Gleichungen nach t auf und setzen das in die andere Gleichung ein, erhalten wir die Koordinatendarstellung der selben Geraden:

$$y = -3 + t \cdot 2 = -3 + (x - 1) \cdot 2 = -3 + 2x - 2 = 2x - 5$$

Vektorielle Darstellung einer Ebene E

$\mathbf{u}$ Ortsvektor eines Punktes auf E und $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ zwei nicht in einer Geraden liegende Vektoren der Ebene E

$$\boxed{E = \mathbf{u} + t_1\mathbf{v} + t_2\mathbf{w} \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}}$$



1.6 Vorbereitende Übungsaufgaben

Das folgende Kapitel enthält Aufgaben zur Vektorrechnung, die Sie mit Hilfe Ihrer Kenntnisse aus der Schule lösen können sollten. Diese Übungen werden in den Übungsstunden **nicht** besprochen.

1. Es seien die beiden Vektoren $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ gegeben. Berechnen Sie $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}$, $||\mathbf{x}||$, $||\mathbf{y}||$ und $||\mathbf{x}+\mathbf{y}||$.

2. Es seien die beiden Vektoren $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ gegeben.

   (a) Berechnen Sie die Längen der beiden Vektoren.

   (b) Bestimmen Sie einen Einheitsvektor $\mathbf{n}$, der senkrecht auf beiden Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ steht.

3. Es seien die beiden Vektoren $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie einen zu $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ senkrechten Vektor der Länge $4\sqrt{5}$.

4. Bestimmen Sie die Schnittmenge von jeweils zwei der drei folgenden Geraden.

$$\begin{aligned} g_1 : \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ g_2 : \quad & \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ g_3 : \quad & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. Wir wissen bereits, dass sich Ebenen auch in der so genannten **Koordinatendarstellung** schreiben lassen, d.h. in der Form $z = ax + by + c$ mit bestimmten reellen Zahlen a, b und c.

   (a) Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung der Ebene

$$E : \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Bestimmen Sie die Parameterdarstellung der Ebene $E : 2x - 3z = 4$.

Lösungen der vorbereitenden Übungsaufgaben

1. 3, 3, 6 und $\sqrt{51}$

2. **Musterlösung**

   a) Die Längen der beiden Vektoren können über den Satz von Pythagoras bestimmt werden. Es ist

   $$\begin{aligned} ||\mathbf{x}|| &= \sqrt{1^2+3^2+2^2} = \sqrt{14} \\ ||\mathbf{y}|| &= \sqrt{4^2+(-1)^2+(-5)^2} = \sqrt{42} \end{aligned}$$

   b) Zur Berechnung des gesuchten Vektors **n** gehen wir direkt vor. Falls Ihnen das sogenannte Kreuzprodukt von Vektoren und dessen Eigenschaften bekannt sind, können Sie auch dieses nutzen.

   Die drei Eigenschaften des Vektors **n** übersetzen sich nun wie folgt in drei Gleichungen.

   $$\begin{aligned} \mathbf{n} \text{ senkrecht zu } \mathbf{x} &\rightsquigarrow \mathbf{n} \bullet \mathbf{x} = 0 \\ \mathbf{n} \text{ senkrecht zu } \mathbf{y} &\rightsquigarrow \mathbf{n} \bullet \mathbf{y} = 0 \\ \mathbf{n} \text{ hat die Länge } 1 &\rightsquigarrow \mathbf{n} \bullet \mathbf{n} = 1 \end{aligned}$$

   Mit dem allgemeinen Ansatz $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ heisst das

   $$\begin{array}{rrcl} I & 0 = \mathbf{n} \bullet \mathbf{x} & = & 1 \cdot n_1 + 3 \cdot n_2 + 2 \cdot n_3 \\ II & 0 = \mathbf{n} \bullet \mathbf{y} & = & 4 \cdot n_1 - 1 \cdot n_2 - 5 \cdot n_3 \\ III & 1 = \mathbf{n} \bullet \mathbf{n} & = & n_1 \cdot n_1 + n_2 \cdot n_2 + n_3 \cdot n_3 \end{array}$$

   Nun bestimmen wir zunächst alle Vektoren, die die Gleichungen I und II erfüllen. Dazu lösen wir die erste Gleichung nach n_1 auf und setzen das in die zweite Gleichung ein.

   $$\begin{aligned} 0 &= 4 \cdot n_1 - 1 \cdot n_2 - 5 \cdot n_3 \\ &= 4 \cdot (-3 \cdot n_2 - 2 \cdot n_3) - 1 \cdot n_2 - 5 \cdot n_3 \\ &= -13 \cdot (n_2 + n_3) \end{aligned}$$

   Damit folgt, dass $-n_2 = n_3 =: a$ gelten muss und für die erste Komponente des gesuchten Vektors folgt dann mit Gleichung I die Beziehung $n_1 = 3 \cdot a - 2 \cdot a = a$. Setzen wir diese Komponenten nun in die Gleichung III ein, ergibt sich:

   $$1 = a \cdot a + (-a) \cdot (-a) + a \cdot a = 3a^2$$

   also $a = \sqrt{\frac{1}{3}}$ oder $a = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ und die zwei verschiedenen Lösungsvektoren sind

$$\mathbf{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. $\pm\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

4. $g_1 \cap g_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$, $g_2 \cap g_3 = \emptyset$, $g_1 \cap g_3 = \emptyset$

5.

$a)$ $\quad 3x - y + 4z = -3$

$b)\ E:$ $\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4/3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Hinweis: Eine gegebene Ebene besitzt natürlich unendlich viele Darstellungen und je nach dem welchen Lösungsweg man einschlägt, erhält man auch andere Darstellungen der selben (Lösungs)ebene.

2 Matrizen

Definition 2.1 *Ein rechteckiges Schema von reellen Zahlen*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ & & a_{ij} & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heisst Matrix. Am Eintrag a_{ij} bezeichnet

- *der Index i die Zeilennummer und*
- *der Index j die Kolonnen- oder Spaltennummer*

Bezeichnungen: $A = A_{mn} = A_{m\times n} = (a_{ij})$
Spezialfälle:

- $A_{m\times 1} = \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{pmatrix}$ ist Kolonnen- oder Spaltenvektor.
- $A_{1\times n} = \mathbf{y}^T = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n)$ ist Zeilenvektor.

2.1 Gleichheit zweier Matrizen

Zwei Matrizen A und B heissen gleich, wenn folgendes gilt:

- sie haben gleiche Zeilenzahl,
- sie haben gleiche Kolonnenzahl und
- die entsprechenden Elemente sind gleich:

$$A_{m\times n} = B_{m\times n} \text{ wenn } a_{ij} = b_{ij} \text{ für alle } i \text{ und alle } j.$$

2.2 Addition und Subtraktion

Zwei Matrizen gleicher Dimension (d.h. mit gleicher Zeilen- und Kolonnenzahl) können addiert und subtrahiert werden:

$$A_{m\times n} \pm B_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ & & a_{ij} \pm b_{ij} & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

2.3 Multiplikation mit einer reellen Zahl

Jede Matrix kann (von links) mit einer reellen Zahl (einem sogenannten “Skalar”) multipliziert werden:

$$c\,A_{m\times n} \;=\; \begin{pmatrix} c\,a_{11} & c\,a_{12} & \dots & c\,a_{1n} \\ c\,a_{21} & c\,a_{22} & \dots & c\,a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ & & c\,a_{ij} & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c\,a_{m1} & c\,a_{m2} & \dots & c\,a_{mn} \end{pmatrix}$$

<u>Distributives Gesetz</u> (Skalar mal Matrix)

$$\boxed{c\,(A \pm B) = c\,A \pm c\,B}$$

2.4 Produkt einer Matrix mit einem Vektor

Seien

- $A = A_{m\times n}$ eine $(m \times n)$-Matrix
- $\mathbf{x} = x_{n\times 1}$ ein $(n \times 1)$-Vektor.

Dann ist das Produkt $A\mathbf{x}$ ein $(m \times 1)$-Vektor

$$A\mathbf{x} \;=\; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-2) + 4\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + (-3)\cdot(-2) + 5\cdot 1 \\ (-1)\cdot 1 + 3\cdot(-2) + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -7 \end{pmatrix}$$

2.5 Produkt zweier Matrizen

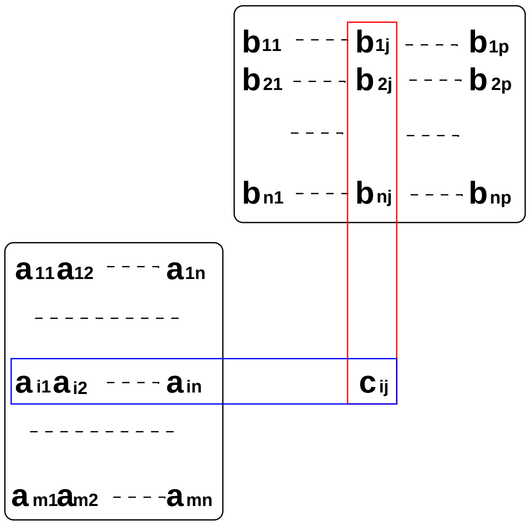
Das Produkt AB zweier Matrizen kann gebildet werden, wenn die Anzahl der Kolonnen der ersten gleich der Anzahl der Zeilen der zweiten ist.

$$A_{m\times n}\, B_{n\times p} \quad = \quad C_{m\times p}$$

wobei für alle $i = 1, \ldots, m$ und alle $j = 1, \ldots, p$ gilt:

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}}$$

Multiplikationsschema



Beispiel 2.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot(-2) & 1\cdot 1 + 2\cdot(-4) & 1\cdot 2 + 2\cdot 3 \\ 2\cdot 4 + (-3)\cdot(-2) & 2\cdot 1 + (-3)\cdot(-4) & 2\cdot 2 + (-3)\cdot 3 \\ (-1)\cdot 4 + 3\cdot(-2) & (-1)\cdot 1 + 3\cdot(-4) & (-1)\cdot 2 + 3\cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -7 & 8 \\ 14 & 14 & -5 \\ -10 & -13 & 7 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation

1. Die Matrizenmultiplikation ist <u>nicht</u> kommutativ

   Beispiel:

   $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

   $AB = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$

   Im Allgemeinen:

   $$\boxed{AB \neq BA}$$

2. Die Matrizenmultiplikation ist assoziativ

   Beispiel: $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ und $C_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

   $AB = \begin{pmatrix} 7 & 10 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ $(AB)C = \begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$

   $BC = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$ $A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$

   Im Allgemeinen:

   $$\boxed{(AB)C = A(BC)}$$

3. Die Nullmatrix

   Die $(m \times n)$-Matrix $0_{m\times n}$, deren sämtliche Einträge 0 sind, heisst <u>Nullmatrix</u>.

   $$0_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

   Im Allgemeinen:

   $$\boxed{A_{m\times n} + 0_{m\times n} = 0_{m\times n} + A_{m\times n} = A_{m\times n}}$$

4. Die Einheitsmatrix

   Gibt es eine quadratische Matrix, die die Rolle der "Eins" übernimmt, d.h. eine Matrix I, so dass

   $$AI = A \quad \text{und} \quad IA = A$$

   für alle quadratischen Matrizen A gilt? Ja!

   $$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   I heisst <u>Einheitsmatrix</u>.

5. Es gibt Nullteiler!

   Für reelle Zahlen a und b gilt die Regel:

   $$ab = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \text{ oder } b = 0$$

   Diese Regel gilt im Allgemeinen <u>nicht</u> für Matrizen!

   $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ und $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

   A und B heissen <u>Nullteiler</u>.

   Im Allgemeinen:

   $$\boxed{AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ oder } B = 0}$$

6. Für reelle Zahlen gilt die Regel:

   $$\text{Aus } cd = ce, c \neq 0 \quad \Rightarrow \quad d = e$$

   Diese Regel gilt im Allgemeinen <u>nicht</u> für Matrizen!

   $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

   $CD = CE = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}$

   aber $D \neq E$!

   Im Allgemeinen:

   $$\boxed{CD = CE \not\Rightarrow D = E}$$

2.6 Die Transponierte einer Matrix

Die Transponierte einer $(m \times n)$-Matrix

$$A = A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ist die $(n \times m)$-Matrix

$$A^T = A^T_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Erfüllt eine (quadratische) Matrix A die Bedingung $A = A^T$, so heisst A symmetrisch.

$$\boxed{\begin{array}{llcl} 1. & (A^T)^T & = & A \\ 2. & (A+B)^T & = & A^T + B^T \\ 3. & (AB)^T & = & B^T A^T \end{array}}$$

3 Invertierbare Matrizen

Definition 3.1 *Es sei eine (quadratische) $(n \times n)$-Matrix A gegeben. Falls es eine $(n \times n)$-Matrix A^{-1} mit der Eigenschaft*

$$AA^{-1} \;=\; A^{-1}A \;=\; I$$

gibt, so nennt man A^{-1} die Inverse von A und A heisst invertierbar.

Achtung:
Nicht jede quadratische Matrix
besitzt eine Inverse!

Der direkte Weg zur Bestimmung der Inversen einer Matrix A ist leicht zu verstehen. Wir wollen das an einem einfachen Beispiel erläutern.

Beispiel 3.1

Wir suchen die Inverse für $A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und machen den Ansatz $A^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.
Wir wissen, dass $AA^{-1} \;=\; I$ gelten muss, also:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ e+g & f+h \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aus dieser Matrizengleichung können wir Komponentenweise 4 lineare Gleichungen für die 4 Unbekannten e, f, g, h auslesen

$$e = 1 \qquad f = 0 \qquad e + g = 0 \qquad f + h = 1.$$

Die eindeutige Lösung ist $e = 1$, $f = 0$, $g = -1$ und $h = 1$, also ist $A^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.1 Die Inverse einer (2×2)-Matrix

Das Vorgehen in obigem Beispiel kann auch für eine allgemeine (2×2)-Matrix angewendet werden. Die (2×2)-Matrix

$$A \;=\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

besitzt eine Inverse, falls $ad - bc \neq 0$ und diese ist dann gegeben durch

$$A^{-1} \;=\; \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3.2

Wir suchen die Inverse für $A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und nutzen diesmal die obige Formel:

$$A^{-1} \;=\; \frac{1}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

3.2 Eigenschaften invertierbarer Matrizen

$$\boxed{\begin{array}{lrcc} 1. & (A^{-1})^{-1} & = & A \\ 2. & (AB)^{-1} & = & B^{-1}A^{-1} \end{array}}$$

Beweis von 2.

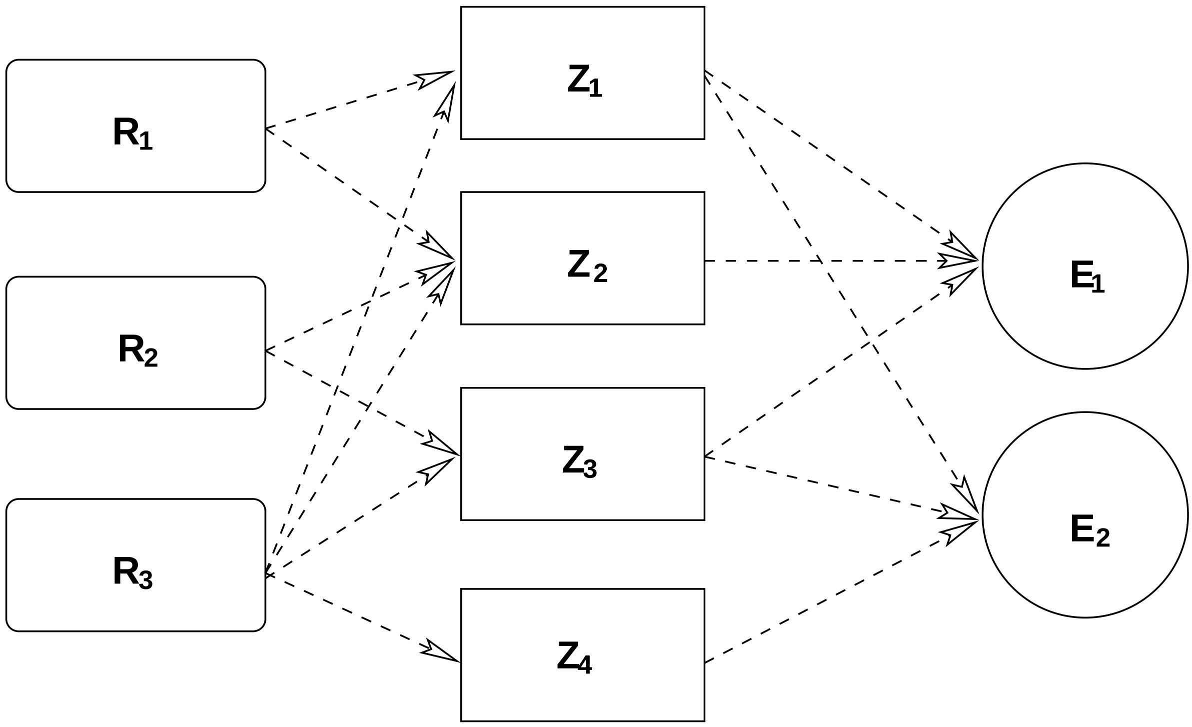
Sei C die gesuchte Inverse von AB. Dann gilt

$$\begin{aligned} CAB &= I \qquad | \cdot B^{-1}A^{-1} \text{ v. rechts} \\ CA\underbrace{BB^{-1}}_{=I}A^{-1} &= IB^{-1}A^{-1} \\ &= B^{-1}A^{-1} \\ C\underbrace{AA^{-1}}_{=I} &= B^{-1}A^{-1} \\ C &= B^{-1}A^{-1} \qquad \square \end{aligned}$$

4 *Mathematische Modellierung von mehrstufigen Produktionsprozessen durch Matrizen*

Bei mehrstufigen Produktionsprozessen werden aus Rohstoffen Zwischenprodukte und leztendlich Endprodukte hergestellt. Solche Prozesse lassen sich elegant und übersichtlich mit Matrizen beschreiben, was wir am Beispiel eines zweistufigen Produktionsprozesses erläutern wollen. Wir verwenden durchgängig die Abkürzung ME für Mengeneinheiten.

4.1 Grundlagen



- Aus den drei Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 werden vier Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 hergestellt. Dabei benötigt man

$$\begin{array}{rr}
\text{für } Z_1: & 11 \text{ ME von } R_1 \\
 & 7 \text{ ME von } R_3 \\
 & \\
\text{für } Z_2: & 8 \text{ ME von } R_1 \\
 & 3 \text{ ME von } R_2 \\
 & 5 \text{ ME von } R_3 \\
 & \\
\text{für } Z_3: & 12 \text{ ME von } R_2 \\
 & 8 \text{ ME von } R_3 \\
 & \\
\text{für } Z_4: & 10 \text{ ME von } R_3
\end{array}$$

- Zur Herstellung der Endprodukte E_1 und E_2 benötigt man

$$\begin{aligned} \text{für } E_1: \quad & 5 \text{ ME von } Z_1 \\ & 3 \text{ ME von } Z_2 \\ & 6 \text{ ME von } Z_3 \\[1em] \text{für } E_2: \quad & 3 \text{ ME von } Z_1 \\ & 2 \text{ ME von } Z_3 \\ & 10 \text{ ME von } Z_4 \end{aligned}$$

4.2 Problem

Wir wollen die Zusammenhänge zwischen Rohstoffen, Zwischenprodukten und Endprodukten durch geeignete Matrizen beschreiben.

4.3 Lösung

Abkürzungen Zunächst führen wir die folgenden Abkürzungen ein:

- r_i bezeichne die ME der benötigten Rohstoffe R_i $(i = 1, 2, 3)$
- z_j bezeichne die ME der Zwischenprodukte Z_j $(j = 1, 2, 3, 4)$
- e_k bezeichne die ME der Endprodukte E_k $(k = 1, 2)$

Daraus konstruieren wir die folgenden drei Vektoren:

- $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ den <u>Rohstoffvektor</u>.
- $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$ den <u>Zwischenproduktvektor</u>.
- $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ den <u>Endproduktvektor</u>.

Die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix Für den Zusammenhang zwischen Rohstoffen und Zwischenprodukten gilt zunächst:

$$\begin{aligned} r_1 &= 11z_1 + 8z_2 + 0z_3 + 0z_4 \\ r_2 &= 0z_1 + 3z_2 + 12z_3 + 0z_4 \\ r_3 &= 7z_1 + 5z_2 + 8z_3 + 10z_4 \end{aligned}$$

bzw. in Matrizenschreibweise:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 11 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 12 & 0 \\ 7 & 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}}_{=:\,A} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A trägt den Namen Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix und es gilt

$$\boxed{\mathbf{r} = A\mathbf{z}}$$

Die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix Entsprechend gilt für den Zusammenhang zwischen Zwischenprodukt und Endprodukt:

$$\begin{aligned} z_1 &= 5e_1 + 3e_2 \\ z_2 &= 3e_1 + 0e_2 \\ z_3 &= 6e_1 + 2e_2 \\ z_4 &= 0e_1 + 10e_2 \end{aligned}$$

bzw. in Matrizenschreibweise:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \\ 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\,B} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Die Matrix B trägt den Namen Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix und es gilt

$$\boxed{\mathbf{z} = B\mathbf{e}}$$

Die Rohstoff-Endprodukt-Matrix Setzt man nun beide linearen Beziehungen ineinander ein, erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= A\mathbf{z} \\ &= A(B\mathbf{e}) \\ &= \underbrace{AB}_{=:\,C}\,\mathbf{e} \end{aligned}$$

mit der Rohstoff-Endprodukt-Matrix $C = AB$. Es ist

$$C = AB = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 12 & 0 \\ 7 & 5 & 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \\ 6 & 2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 79 & 33 \\ 81 & 24 \\ 98 & 137 \end{pmatrix}$$

und allgemein

$$\boxed{\mathbf{r} = C\mathbf{e}}$$

4.4 Typische Fragen und Antworten

Mit dieser mathematischen Modellierung kann man nun typische Fragen schnell beantworten.

Frage 1 Wieviele ME benötigt man von jedem Rohstoff, um 20 ME des Erzeugnisses E_1 und 25 ME des Erzeugnisses E_2 herzustellen?

Antwort auf Frage 1 Der Endproduktvektor

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \end{pmatrix}$$

ist gegeben und wir suchen den zugehörigen Rohstoffvektor $\mathbf{r}$. Es gilt:

$$\mathbf{r} = C\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 79 & 33 \\ 81 & 24 \\ 98 & 137 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2405 \\ 2220 \\ 5385 \end{pmatrix}.$$

Also werden vom Rohstoff R_1 2405 ME, vom Rohstoff R_2 2220 ME und vom Rohstoff R_3 5385 ME benötigt.

Frage 2 Wieviele ME benötigt man von jedem Zwischenprodukt, um 10 ME des Erzeugnisses E_1 und 11 ME des Erzeugnisses E_2 herzustellen?

Antwort auf Frage 2 Der Endproduktvektor ist

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}$$

und wir müssen mit der Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B arbeiten um den zugehörigen Zwischenproduktvektor $\mathbf{z}$ zu berechnen. Es gilt:

$$\mathbf{z} = CB\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \\ 6 & 2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83 \\ 30 \\ 82 \\ 110 \end{pmatrix}.$$

Also werden vom Zwischenprodukt Z_1 83 ME, vom Zwischenprodukt Z_2 30 ME, vom Zwischenprodukt Z_3 82 ME und vom Zwischenprodukt Z_4 110 ME benötigt.

5 Übungsaufgaben

1. Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

   Berechnen Sie $A - B$, $I - A$, AB, BA, B^2, CD, $C^T C$, CC^T.

2. Gegeben ist die Matrix $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie D^2, D^3 und D^4.

3. Gegeben sind die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $(I - 2A)^{-1}$ und $A\mathbf{b}$.

4. Berechnen Sie für die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ und den Vektor $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ den Vektor $\mathbf{x} = AB\mathbf{c}$.

5. Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Gesucht ist eine Matrix X, so dass $AX = B$ gilt. Ist die Lösung eindeutig?

6. Wir betrachten die Matrizengleichung $XA + X \;=\; I + A^{-1}$.

   (a) Bestimmen Sie die Matrix X, falls $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ ist.

   (b) Lösen Sie die allgemeine Gleichung nach X auf.

7. Lösen Sie unter Anwendung der Rechenregeln für Matrizen die folgenden Matrizengleichungen nach der Matrix X auf. Beachten Sie insbesondere, dass Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist. Versuchen Sie die Lösung in möglichst einfacher Form darzustellen.

   (a) $A^T I + X^T \;=\; [A(I + B)]^T$

   (b) $(XA + IX)^T \;=\; A^T + I$

   (c) $5(BA^T)^T + 3A^T + X \;=\; 3A^T + I^T AB^T (A^T + 5I) + XI$