Mathematik 2
Dr. Thomas Zehrt

Vektorräume und Rang einer Matrix

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Unabhängigkeit

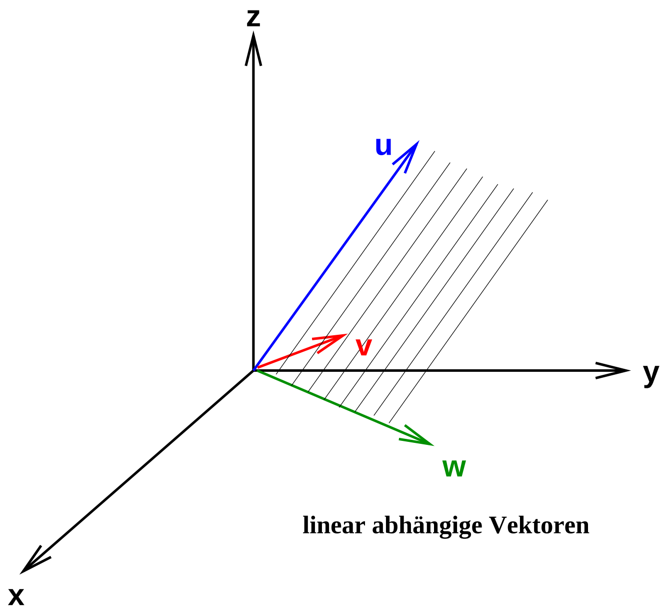
Definition 1.1 *Die k Vektoren $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_k}$ heissen linear abhängig, falls einer sich als Linearkombination der anderen darstellen lässt, d.h. falls es*

- *einen Index i und*
- *reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1} \ldots, a_k$*

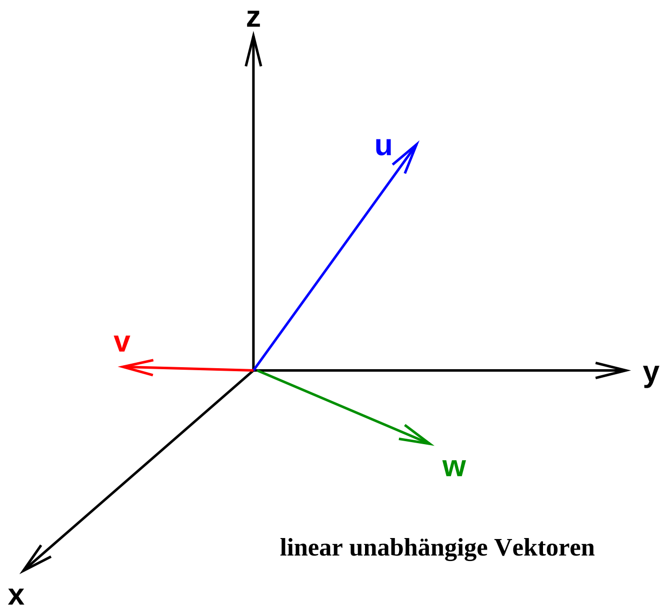
gibt, so dass

$$\mathbf{u_i} = a_1\mathbf{u_1} + \ldots + a_{i-1}\mathbf{u_{i-1}} + a_{i+1}\mathbf{u_{i+1}} + \ldots + a_k\mathbf{u_k}$$

Andernfalls heissen die Vektoren linear unabhängig.



linear abhängige Vektoren



linear unabhängige Vektoren

1.1 Äquivalente Definition

Definition 1.2 *Die k Vektoren $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_k}$ heissen linear abhängig, falls es reelle Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_k$ gibt, so dass*

- $b_1\mathbf{u_1} + b_2\mathbf{u_2} + \ldots + b_k\mathbf{u_k} = \mathbf{0}$ *und*
- *nicht alle $b_j = 0$.*

Andernfalls heissen die Vektoren linear unabhängig.

Das folgende Kriterium ist meist einfacher zu handhaben.

Satz 1 *Die Vektoren $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_k}$ heissen linear unabhängig, falls aus einer Darstellung des $\mathbf{0}$-Vektors*

$$b_1\mathbf{u_1} + b_2\mathbf{u_2} + \ldots + b_k\mathbf{u_k} = \mathbf{0}$$

stets $b_1 = b_2 = \ldots = b_k = 0$ folgt.

Bemerkung Es ist klar, dass durch die Festlegung $b_1 = b_2 = \ldots = b_k = 0$ die Gleichung $b_1\mathbf{u_1} + b_2\mathbf{u_2} + \ldots + b_k\mathbf{u_k} = \mathbf{0}$ **immer** gelöst wird. Deshalb nennt man diese Lösung auch die triviale Lösung. Die Frage ist aber, ob das die **einzige** Lösung ist (dann wären die Vektoren linear unabhängig) oder ob es noch mindestens **eine weitere** Lösung dieser Gleichung gibt (dann wären die Vektoren linear abhängig).

Beispiel 1.1 *Es seien die folgenden drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ gegeben:*

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt z.B.

1. $\mathbf{u}_1$ *ist linear abhängig, denn mit $b_1 = 3 \neq 0$ gilt sicher:*

$$3 \cdot \mathbf{u}_1 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Merke: **Jede** *Familie von Vektoren die den 0-Vektor enthält ist linear abhängig.*

2. $\mathbf{u}_2$ *ist linear unabhängig, denn angenommen für eine reelle Zahl* b *gilt*

$$b \cdot \mathbf{u}_2 \;=\; b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   dann **muss** $b = 0$ *gelten*

3. $\mathbf{u}_2$ *und* $\mathbf{u}_3$ *sind linear unabhängig, denn angenommen für zwei reelle Zahlen* b_1 *und* b_2 *gilt*

$$b_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Das bedeutet zeilenweise:

$$\begin{aligned} b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 &= 0 \;\;\rightarrow\;\; b_1 = 0 \\ b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 1 &= 0 \;\;\rightarrow\;\; b_2 = 0 \\ b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 1 &= 0 \;\;\rightarrow\;\; b_2 = 0 \end{aligned}$$

   Also **muss** $b_1 = b_2 = 0$ *gelten und es gibt keine weiteren Lösungen.*

1.2 Geometrische Interpretation

Vektoren im $\mathbb{R}^2$

- 2 Vektoren sind linear abhängig

  $\Leftrightarrow$ einer ist ein Vielfaches des anderen

  $\Leftrightarrow$ sie liegen auf der gleichen Gerade durch den Nullpunkt

- 3 oder mehr Vektoren sind stets linear abhängig

Vektoren im $\mathbb{R}^3$

- 2 Vektoren sind linear abhängig

  $\Leftrightarrow$ einer ist ein Vielfaches des anderen

  $\Leftrightarrow$ sie liegen auf der gleichen Gerade durch den Nullpunkt

- 3 Vektoren sind linear abhängig

  $\Leftrightarrow$ sie liegen auf der gleichen Ebene durch den Nullpunkt

- 4 oder mehr Vektoren sind stets linear abhängig

2 Vektorräume und Basen

Definition 2.1 *Gegeben seien die linear unabhängige Vektoren* $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}$. *Die Menge aller möglichen Linearkombinationen dieser Vektoren wird* <u>*n-dimensionaler Vektorraum V*</u> *genannt. Die Vektoren* $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}$ *werden auch als* <u>*Basis*</u> *von V bezeichnet.*

Bemerkungen:

- $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}$ <u>spannen</u> V auf
- Eine Basis spannt mit möglichst wenigen Vektoren (deshalb fordern wir lineare Unabhängigkeit) den Vektorraum V auf.
- Jeder Vektor aus V lässt sich **eindeutig** als Linearkombination der Basisvektoren schreiben!

Beispiel 2.1 *Wir betrachten die Menge aller Vektoren, die sich als Linearkombination aus den drei Vektoren*

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bilden lassen. Diese drei Vektoren sind sicher keine Basis dieses Vektorraums, denn sie sind nicht linear unabhängig. Deshalb gibt es Vektoren, die auf verschiedene Arten als Linearkombination dieser drei Vektoren dargestellt werden können:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Würde man den dritten Vektor weglassen (er ist Linearkombination der ersten beiden: $-2 \cdot \mathbf{u_1} + 2 \cdot \mathbf{u_2} = \mathbf{u_3}$*) würden die beiden übriggebliebenen immernoch den selben Raum aufspannen (es geht also nichts verloren). Zudem liesse sich nun jeder Vektor dieses Raumes auf genau eine Art und Weise als Linearkombination der Vektoren* $\mathbf{u_1}$ *und* $\mathbf{u_2}$ *darstellen.*

3 Basen von $\mathbb{R}^n$

3.1 Basen von $\mathbb{R}^3$

- Die Vektoren
$$\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bilden eine Basis von } \mathbb{R}^3.$$
Jeder Vektor lässt sich als Linearkombination dieser drei (linear unabhängigen?) Vektoren schreiben:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

  bilden auch eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

  Jeder Vektor lässt sich als Linearkombination dieser drei (linear unabhängigen) Vektoren schreiben:
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \frac{1}{3}(x + 4y + 2z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{3}(-2x + y - z) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{3}(x + y + 2z) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Diese Gleichung kann durch eine Probe bestätigt werden (Vorfaktoren in die Vektoren multiplizieren und Vektorkomponenten zeilenweise addieren). Die Herleitung der Gleichung ist etwas mühsam.

  Mit Hilfe dieser Gleichung kann man nun jeden Vektor in der angegebenen neuen Basis darstellen. Es gilt z.B.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{3}(1 + 4 + 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}(-2 + 1 - 1) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}(1 + 1 + 2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{7}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{-2}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.2 Basen von $\mathbb{R}^n$

Die Vektoren $\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine so genannte orthonormierte Basis von $\mathbb{R}^n$:

- alle Vektoren sind paarweise orthogonal ($\forall i \neq j : e_i \perp e_j$) und
- alle Vektoren haben die Länge 1
  ($\forall i : ||e_i|| = 1$) .

Ausblicke 3.1 (Der Mensch ist 5-dimensional) *Viele grosse Denker und auch ich haben versucht, die menschliche Persönlichkeit zu verstehen und zu beschreiben. Einen nüchternen und spannenden Ansatz verfolgten einige Wissenschaftler im 20. Jahrhundert die glaubten, dass die Worte mit denen wir kommunizieren (teilweise) enstanden sind, um grundlegende Dimensionen der Persönlichkeit eines Menschen zu beschreiben. Sie begannen deshalb damit alle Wörter zu sammeln, die zur Beschreibung einer Person verwendet werden können. In den 1930er Jahren durchkämmten dazu eine Forschergruppe das Wörterbuch und sammelte alle entsprechenden Adjektive wie z.B. gütig, schrecklich, hinterhältig, ... Die erste daraus entstandene Liste enthielt etwa 18'000 Worte. Dann ging man nochmals durch diese Liste und identifizierte etwa 4'000 zentrale und zeitlich stabile Persönlichkeitseigenschaften. Durch weitere Analysen, Diskussionen, statistische Untersuchungen wurde diese Liste innerhalb der folgenden 50 Jahre weiter gekürzt. In den 1990er Jahren wurde schliesslich ein wissenschaftlicher Konsenz erreicht, der die Existenz von (***nur***) 5 ganz grundlegenden Persönlichkeitsdimensionen behauptet!!*

Diese 5 Dimensionen werden in der Regel wie folgt bezeichnet:

1. *Offenheit* $= \mathbf{u}_1$,
2. *Gewissenhaftigkeit* $= \mathbf{u}_2$,
3. *Extraversion* $= \mathbf{u}_3$,
4. *Verträglichkeit* $= \mathbf{u}_4$ *und*
5. *Neurotizismus* $= \mathbf{u}_5$.

Jede dieser Dimensionen wird als stetig skaliert betrachtet und einer Person kann man (durch psychologische Tests) 5 Werte zuordnen, je nach dem wie stark jede dieser Eigenschaften bei ihr ausgeprägt ist. Jeder Mensch, oder besser dessen Persönlichkeit, kann also als Punkt in einem 5-dimensionalen Vektorraum betrachtet und recht gut (sagen die Psychologen) beschrieben werden!

4 Der Rang und Rangbestimmung

Eine $(m \times n)$-Matrix besteht aus

- n Spaltenvektoren $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$ und
- m Zeilenvektoren $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_m}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ & & a_{ij} & \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_2} \\ \vdots \\ \mathbf{b_m} \end{pmatrix} = (\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n})$$

Merkwürdigerweise gilt:

maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren = maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren (oder Spaltenvektoren) einer Matrix A heisst der Rang der Matrix.
Bezeichnung: $rg(A)$ oder $Rg(A)$

Beispiel 4.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad rg(A) = 3$$

Die vier Spaltenvektoren sind sicher linear abhängig, denn der zweite Vektor kann als Linearkombination der restlichen Vektoren geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad rg(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad rg(C) = 3$$

Rangbestimmung

Die folgenden Zeilenumformungen, die als elementare Zeilenumformungen bezeichnet werden, (analog: Spaltenumformungen) ändern den Rang einer Matrix nicht:

- Vertauschen von Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\neq 0$
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

Mittels dieser Umformungen kann man jede Matrix auf Zeilenstufenform bringen.

Der Rang ist die Anzahl der Stufen.

Beispiel 4.2 *Gegeben sei die Matrix*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Zunächst versuchen wir durch die erlaubten Zeilenumformungen unter der 1 *in der linken oberen Ecke (d.h. in der ersten Spalte unter dem ersten Eintrag) jeweils die* 0 *zu erzeugen. Das geschieht, indem wir die erste Zeile von der zweiten Zeile subtrahieren.*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1-1 & 0-(-2) & 1-2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

In der resultierenden Matrix addieren wir dann die erste Zeile zur dritten Zeile.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1+1 & 1+(-2) & -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Damit haben wir das erste Ziel erreicht und fahren mit der zweiten Spalte fort. Dazu muss unter der 2 *durch erlaubte Zeilenumformungen eine* 0 *erzeugt werden. Das könnte man dadurch erreichen, dass man zunächst die zweite Zeile mit* $1/2$ *multipliziert.*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ (1/2)\cdot 0 & (1/2)\cdot 2 & (1/2)\cdot -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dann wird die zweite Zeile zur dritten Zeile addiert und man erhält eine Matrix in Zeilenstufenform.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1+1 & -1+(-1/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Der Rang der Matrix ist 3 (drei Stufen).

5 Reguläre und singuläre Matrizen

Definition 5.1 *Eine quadratische Matrix* $A = A_{n\times n}$ *heisst*

- *regulär,* *falls* $rg(A) = n$
- *singulär,* *falls* $rg(A) < n$

Beispiel 5.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad rg(A) = 2, \quad A \text{ regulär}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad rg(B) = 2 < 3, \quad B \text{ singulär}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad rg(C) = 3 < 4, \quad C \text{ singulär}$$

Satz 2 *Die Inverse* A^{-1} *einer quadratischen Matrix* A *existiert genau dann, wenn* A *regulär ist.*

Beweis für $n = 3$:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3})$ mit den Spaltenvektoren $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$.

Ansatz für die Inverse: $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$

Die Bedingung $AA^{-1} = I$ kann nun spaltenweise aufgeschrieben werden.

$AA^{-1} = (\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}) \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt genau dann, wenn

- $x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + x_3\mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_1}$
- $y_1\mathbf{a_1} + y_2\mathbf{a_2} + y_3\mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_2}$
- $z_1\mathbf{a_1} + z_2\mathbf{a_2} + z_3\mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e_3}$

Nun kann man folgern:

- Falls A regulär
  - $\Rightarrow$ $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ sind linear unabhängig
  - $\Rightarrow$ es gibt eine eindeutige Darstellung der Vektoren $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ als Linearkombination der $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$
  - $\Rightarrow$ die 9 Einträge $x_1, x_2, \ldots, z_3$ der Matrix A^{-1} sind eindeutig bestimmt
  - $\Rightarrow$ A invertierbar
- Falls A singulär
  - $\Rightarrow$ $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ sind linear abhängig, liegen also in einer Ebene durch den Nullpunkt
  - $\Rightarrow$ mindestens einer der Vektoren $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ kann nicht als Linearkombination der $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ geschrieben werden
  - $\Rightarrow$ A nicht invertierbar

$\square$

6 Determinanten

Definition 6.1 (Rekursive Definition (Entwicklung nach der 1-ten Zeile))
Jeder quadratischen Matrix $A = A_{n\times n}$ soll eine reelle Zahl zugeordnet werden, die Determinante von A.

Bezeichnung: $\det(A)$ *oder* $|A|$

Zunächst definieren wir die Determinante einer reellen Zahl (bzw. einer (1×1)-Matrix) als die Zahl selbst: $\det(a) := a$. *Für $(n\times n)$-Matrizen mit $n > 1$ wollen wir dann wie folgt vorgehen:*

Durch A_{ij} sei die Teilmatrix von A bezeichnet, die durch Weglassen der i-ten Zeile und der j-ten Kolonne aus A entsteht. Dann gilt

$$\boxed{\det(A) := a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\det(A_{1n})}$$

Eigenschaften der Determinante

- $\boxed{\text{n=2}}$

  $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

- $\boxed{\text{n=3}}$

  $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  $$\begin{aligned} \det(A) &= |A| \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

- Die Determinante einer $(n\times n)$-Matrix wird auf n Determinanten von $(n-1\times n-1)$-Matrizen zurückgeführt.

- Die Determinante kann auch nach einer beliebigen Zeile entwickelt werden:

  $$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, \det(A_{ij})$$

- Die reelle Zahl $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ heisst Kofaktor von a_{ij}.

- Die Determinantenentwicklung kann auch nach einer beliebigen Spalte erfolgen.

- Falls eine Zeile oder Spalte einer Matrix aus Nullen besteht, so ist die Determinante 0.

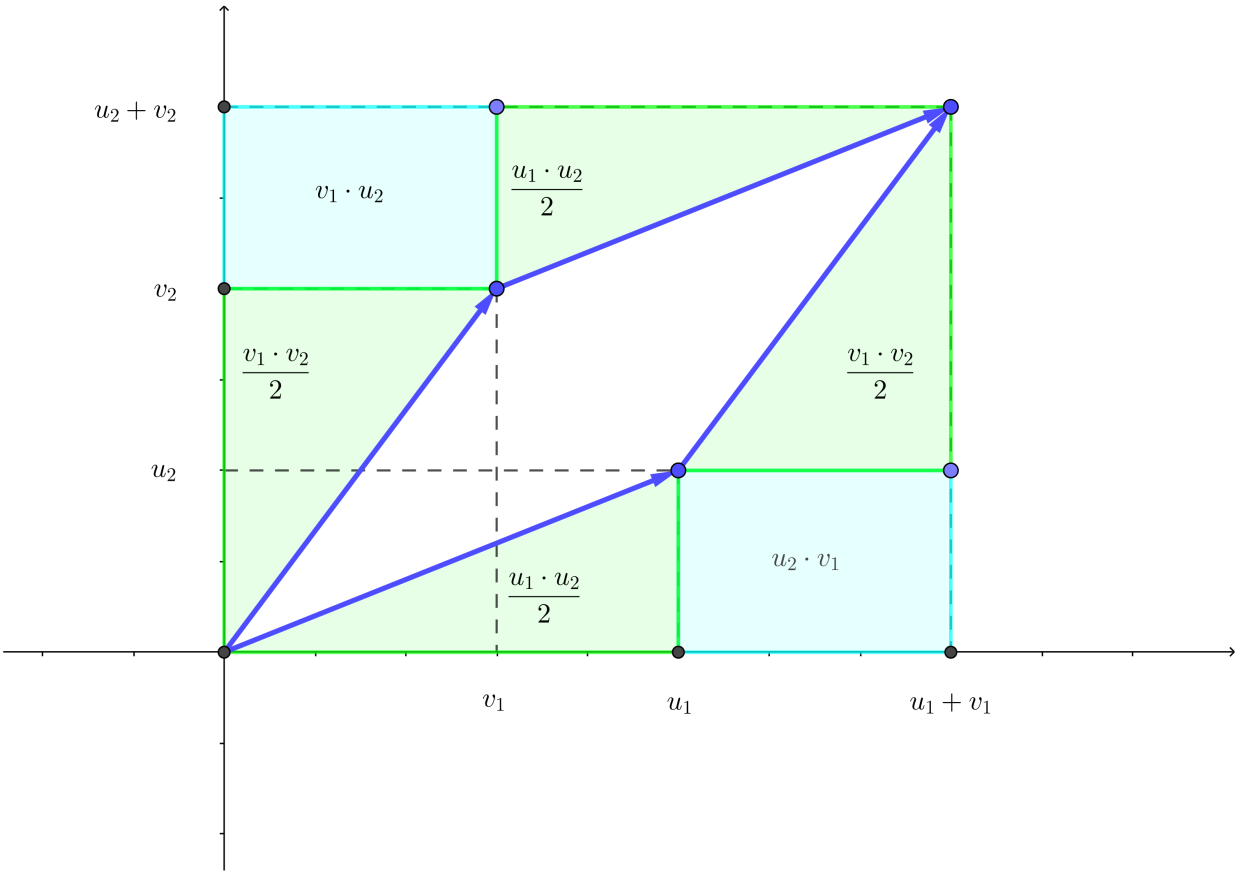
- Die Determinante einer Matrix ändert sich nicht, wenn zu einer Spalte (Zeile) ein beliebiges Vielfaches einer anderen Spalte (Zeile) addiert wird.
- Wird eine Spalte (Zeile) mit einer Zahl u multipliziert, so resultiert die u-fache Determinante.
-

$$\boxed{\begin{array}{llcc} 1. & \det(AB) & = & \det(A)\cdot\det(B) \\[1em] 2. & A \text{ invertierbar} & \Rightarrow & \det(A) \neq 0 \\[1em] 3. & \det(A^{-1}) & = & \dfrac{1}{\det(A)} \\[1em] 4. & \det(A^T) & = & \det(A) \end{array}}$$

- Für eine beliebige $(n \times n)$-Matrix A entspricht $|\det(A)|$ dem Volumen des von den Spalten aufgespannten <u>Parallelepipeds</u>.

Wir wollen das für den Fall $n = 2$ etwas genauer anschauen.

Seien $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren, die wir (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) im I. Quadranten wählen. Wir sind am Flächeninhalt F des aufgespannten Parallelogramms interessiert.



Alle eingezeichneten Flächeninhalte (der Rechtecke und rechtwinkligen Dreiecke) sind elementar berechenbar und offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} F &= (u_1 + v_1)(u_2 + v_2) - 2u_2v_1 - 2\frac{v_1v_2}{2} - 2\frac{u_1u_2}{2} \\ &= u_1v_2 - v_1u_2 \\ &= \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} v_1 & u_1 \\ v_2 & u_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7 Determinante und reguläre Matrizen

$A = A_{n \times n}$ regulär

$\Leftrightarrow$ die Spaltenvektoren sind linear unabhängig, spannen also den ganzen Raum $\mathbb{R}^n$ auf

$\Leftrightarrow$ der von den Spaltenvektoren aufgespannte Parallelepiped hat n-dimesionales Volumen

$\Leftrightarrow$ $det(A) \neq 0$

Satz 3

$$\boxed{\begin{array}{lcl} A_{n\times n} \text{ regulär} & \Leftrightarrow & det(A) \neq 0 \\ A_{n\times n} \text{ singulär} & \Leftrightarrow & det(A) = 0 \end{array}}$$

Aufgabe 7.1 *Führen Sie den Gedankengang von oben für die beiden Matrizen* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *bzw.* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *aus. Skizzieren Sie die jeweiligen Spaltenvektoren und versuchen Sie die Flächeninhalte der Parallelogramme direkt auszurechnen.*

Lösung:

8 Zusammenfassung

1. $n+1$ oder mehr Vektoren im n-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ sind stets linear abhängig.

2. Jede Basis des $\mathbb{R}^n$ besteht aus genau n Vektoren.

3. n linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^n$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

4. Sind $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}$ eine Basis des Vektorraums V, so ist für jedes $\mathbf{x} \in$ V die Darstellung

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{u_1} + a_2\mathbf{u_2} + \ldots + a_n\mathbf{u_n}$$

eindeutig.

$A_{n\times n}$ regulär	$\Leftrightarrow$	$rg(A) = n$
	$\Leftrightarrow$	A^{-1} existiert
	$\Leftrightarrow$	$det(A) \neq 0$
	$\Leftrightarrow$	Spaltenvektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$
	$\Leftrightarrow$	Zeilenvektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$
$A_{n\times n}$ singulär	$\Leftrightarrow$	$rg(A) < n$
	$\Leftrightarrow$	A^{-1} existiert nicht
	$\Leftrightarrow$	$det(A) = 0$
	$\Leftrightarrow$	Spaltenvektoren sind linear abhängig
	$\Leftrightarrow$	Zeilenvektoren sind linear abhängig

9 Übungsaufgaben

1. (a) Sind die folgenden Vektoren linear abhängig?

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Wie muss die Zahl x gewählt werden, so dass die Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ x \end{pmatrix}$ linear abhängig sind?

2. Gegeben seien die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Ist der Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Linearkombination von

      i. $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$?
      ii. $\mathbf{a}$ und $\mathbf{c}$?
      iii. $\mathbf{a}$ und $\mathbf{d}$?

   (b) Finden Sie einen Vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$, welcher sich nicht als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$ darstellen lässt.

3. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit

$$a)\ rg(A) = 2 \qquad b)\ rg(A) = 1 \qquad c)\ rg(A) = 0$$

4. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & 4 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & r \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & t \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösungen einiger Übungsaufgaben

1. $a)$ Die Vektoren sind linear unabhängig.

   $b)$ $x = 15$

2. $a)$ $i)$ $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 3\mathbf{b}$

   $a)$ $ii)$ $\mathbf{x} = 4\mathbf{a} - 12\mathbf{c}$

   $a)$ $iii)$ $\mathbf{x}$ ist keine Linearkombination von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{d}$

   $b)$ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ so dass $y_1 \neq y_3$

3. $a)$ $ad - bc \neq 0$, $b)$ $ad - bc = 0$ und $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$, $c)(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$

4. $rg(A) = 3$, $rg(B) = 3$, $rg(C) = 1$, $rg(D) = 2$, $rg(E) = 3$, $rg(F) = 2$

5. $\det(A) = 0$, $\det(B) = r$, $\det(C) = 5 + 3t$,

   Musterlösung:

   gegeben: $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

   gesucht: $\det(D) = |D|$

   Lösung:

   Wir entwickeln nach der ersten Zeile (obwohl es besser wäre nach der ersten Spalte oder der letzten Zeile zu entwickeln). Damit gilt zunächst:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = d_{11} \cdot |D_{11}| - d_{12} \cdot |D_{12}| + d_{13} \cdot |D_{13}| - d_{14} \cdot |D_{14}|$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

   Wir haben also das Problem der Determinantenbestimmung einer (4×4)-Matrix auf die Berechnung von vier Determinanten von (3×3)-Matrizen zurückgeführt. Für die Bestimmung der Determinaten dieser (3×3)-Matrizen bietet sich nun die Jägerzaunregel an:

   (a)

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\ = \; & 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \cdot (-2) - 1 \cdot (-2) \cdot (-1) \\ = \; & -8 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\ = \;& 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) \cdot (-2) - 1 \cdot 1 \cdot (-1) \\ = \;& -8 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ = \;& 1 \cdot (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \cdot 0 - 1 \cdot (-2) \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) \\ = \;& 8 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ = \;& 1 \cdot (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot (-2) \\ = \;& 8 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich nun insgesamt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-8) - 1 \cdot (-8) + 3 \cdot 8 - 3 \cdot 8 = 0.$$