

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>2</b>
1.1	2 Gleichungen und 2 Unbekannte . . . . .	2
1.2	3 Gleichungen und 3 Unbekannte . . . . .	4
1.3	Eine Gleichung und 4 Unbekannte . . . . .	5
1.4	2 Gleichung und 4 Unbekannte . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme</b>	<b>7</b>
2.1	Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung . . . . .	9
2.2	Struktur der Lösungsmenge . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Reguläre lineare Gleichungssysteme</b>	<b>12</b>
3.1	Lösungsmethode I: Die Inverse . . . . .	12
3.2	Lösungsmethode II: Cramersche Regel . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Lösungsmethode III: Der Gaußsche Algorithmus</b>	<b>15</b>
4.1	Auflösen von regulären Dreieckssystemen . . . . .	15
4.2	Herleitung . . . . .	17
4.3	Bestimmung der Inversen . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Übungsaufgaben</b>	<b>22</b>

# 1 Einführung

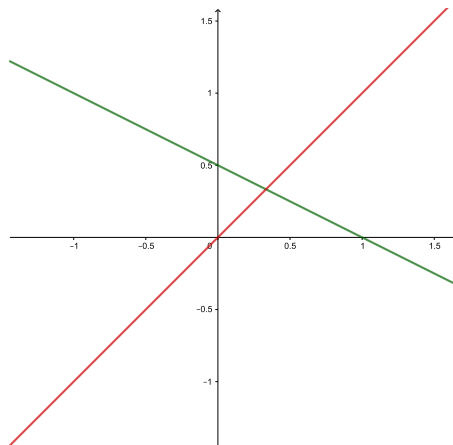
Zunächst muss man erwähnen, dass ein lineares Gleichungssystem **stets** direkt durch schrittweise Elimination der Unbekannten gelöst werden kann. Dieses Verfahren wird meist in der Schule besprochen. In der Praxis ist es aber nötig **schnelle bzw effiziente** Verfahren zur Lösung zu finden.

Lineare Gleichungssysteme sind allgegenwärtig. In jedem Natel (Computer und CD-Spieler) steckt ein Chip der permanent und zum Glück blitzschnell lineare Gleichungssysteme (13 Gleichungen und 12 Unbekannte) löst und dadurch fehlerhafte Übertragungen korrigiert. Ohne diesen Chip würden Sie beim telefonieren kaum ein Wort verstehen.

## 1.1 2 Gleichungen und 2 Unbekannte

### Beispiel 1.1

$$\begin{aligned}x + 2y &= 1 \iff y = 1/2 - 1/2x \\x - y &= 0 \iff y = x\end{aligned}$$



Wir lösen die zweite Gleichung nach  $x$  auf ( $x = y$ ) und eliminieren damit  $x$  aus der 1. Gleichung:

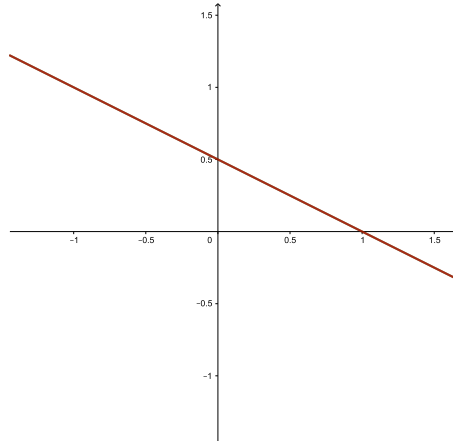
$$y + 2y = 1 \longrightarrow y = 1/3 \text{ und somit auch } x = 1/3.$$

Es existiert also eine eindeutige Lösung (in Vektorschreibweise), der Schnittpunkt der beiden Geraden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 1.2**

$$\begin{aligned}x + 2y &= 1 \iff y = 1/2 - 1/2x \\2x + 4y &= 2 \iff y = 1/2 - 1/2x\end{aligned}$$



Wir lösen die zweite Gleichung nach  $x$  auf ( $x = 1 - 2y$ ) und eliminieren damit  $x$  aus der 1. Gleichung:

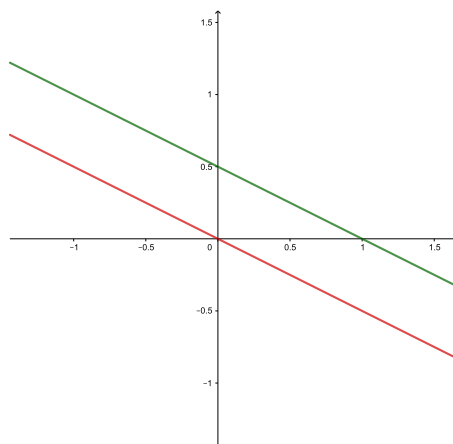
$$2(1 - 2y) + 4y = 2 \longrightarrow 2 = 2.$$

Es gibt keine Bedingung für  $y$ , somit ist  $y = t$  frei wählbar. Für  $x$  gilt dann mit der 1. Gleichung  $x = 1 - 2t$  und es existieren unendlich viele Lösungen (in Vektorschreibweise):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 1.3**

$$\begin{aligned}x + 2y &= 1 \iff y = 1/2 - 1/2x \\x + 2y &= 0 \iff y = -1/2x\end{aligned}$$



Da beide Gleichungen nach  $y$  aufgelöst sind, müssen auch die beiden rechten Seiten gleich sein:

$$1/2 - 1/2x = -1/2x \longrightarrow 1/2 = 0.$$

Das ist ein Widerspruch und das Gleichungssystem hat keine Lösung.

## 1.2 3 Gleichungen und 3 Unbekannte

Wir betrachten ein System von 3 (linearen) Gleichungen mit 3 Unbekannten

$$E_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$E_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

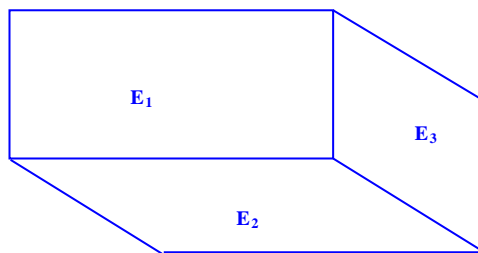
$$E_3 : a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

Jede dieser Gleichungen beschreibt eine Ebene im  $\mathbb{R}^3$  und jeder gemeinsame Punkt stellt eine Lösung des Systems dar. Diese 3 Ebenen können

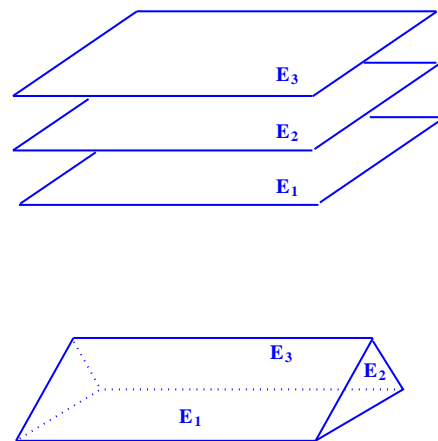
- genau einen Punkt
- keinen Punkt
- eine Gerade

gemeinsam haben.

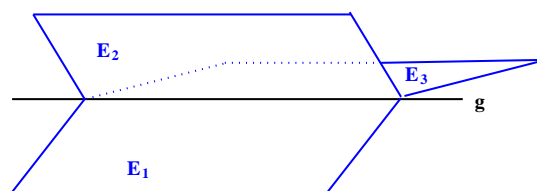
Genau ein gemeinsamer Punkt



Kein gemeinsamer Punkt



Gemeinsame Gerade



### 1.3 Eine Gleichung und 4 Unbekannte

Wir betrachten die Gleichung

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2.$$

Diese Gleichung hat sicher unendlich viele Lösungen und wir können 3 der 4 Variablen völlig frei wählen. Die letzte 4. Variable ist dann durch die obige Gleichung mit den drei frei gewählten Parametern verknüpft, kann also nicht mehr frei gewählt werden.

Wir könnten also z.B.  $x_2 = r \in \mathbb{R}$ ,  $x_3 = s \in \mathbb{R}$  und  $x_4 = t \in \mathbb{R}$  frei wählen. Für  $x_1$  muss dann

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \\ &= 2 - 2r - 3s + t \end{aligned}$$

gelten. (Natürlich hätten wir auch ein anderes Tripel frei wählen können.) Üblicherweise fasst man nun alle Lösungen der Gleichung zu einem Vektor zusammen und nutzt die obigen 4 Gleichungen (drei freie Wahlen und die eigentliche Gleichung):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 - 2r - 3s + t \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2r - 3s + 1t \\ 0 + 1r + 0s + 0t \\ 0 + 0r + 1s + 0t \\ 0 + 0r + 0s + 1t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit  $r, s, t \in \mathbb{R}$  frei wählbar. Eleganter ist es meist, wenn man bei der Benennung der frei wählbaren Parameter Indizes zulässt, also  $r = t_1$ ,  $s = t_2$  und  $t = t_3$  und somit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## 1.4 2 Gleichung und 4 Unbekannte

Wir wollen uns hier nur noch kurz einige Spezialfälle ansehen. Offensichtlich hat das System

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 2 \\x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 2\end{aligned}$$

die selbe Lösungsmenge, wie die erste (oder zweite) Gleichung alleine. Denn jede Lösung der ersten Gleichung ist automatisch auch Lösung der zweiten Gleichung und umgekehrt.

Aus den selben Gründen hat das System

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 2 \\2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 4\end{aligned}$$

die selbe Lösungsmenge, wie die erste (oder zweite) Gleichung alleine.

Es ist wohl auch offensichtlich, dass das System

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 2 \\x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 3\end{aligned}$$

keine Lösung haben kann.

## 2 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Wann hat ein lineares Gleichungssystem (m Gleichungen, n Unbekannte)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

**genau eine, keine** oder **unendlich viele** Lösungen? Zunächst vereinfachen wir die Schreibweise, indem wir die (austauschbaren) Variablennamen entfernen. Das Resultat sind Matrizen, die die Koeffizienten der linearen Gleichungssysteme enthalten.

**Koeffizientenmatrix  $A$**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$$

**Erweiterte Koeffizientenmatrix  $(A, \mathbf{b})$**

$$(A, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b})$$

Mit der Matrix  $A$  und den Vektoren  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  können wir das lineare

Gleichungssystem in **Matrizenschreibweise**

$$\boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

oder in **Vektorschreibweise** darstellen

$$\boxed{x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}}$$

Die Vektorschreibweise kann nun wie folgt gedeutet werden: Bei jedem linearen Gleichungssystem geht es darum, die rechte Seite  $\mathbf{b}$  als Linearkombination der Spaltenvektoren  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  darzustellen!!

## Beispiel 2.1

- *Wir starten mit dem linearen Gleichungssystem*

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 6\end{aligned}$$

*Wir suchen reelle Zahlen  $x_1$  und  $x_2$ , die beide Gleichungen (simultan) erfüllen. Mit den obigen Notationen gilt  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$*

- *Das selbe Problem in Matrixschreibweise lautet dann: Finde einen Vektor  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , so dass*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- *Das selbe Problem in Vektorschreibweise lautet: Finde zwei reelle Zahlen (Streckungsfaktoren der Spaltenvektoren)  $x_1$  und  $x_2$ , so dass*

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

*Das ist geometrisch gut zu interpretieren. Die Frage ist also, ob man den Vektor auf der rechten Seite als (eindeutige) Linearkombination der beiden Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix schreiben kann. Hier geht das sicher, denn beide Vektoren sind linear unabhängig, spannen also den gesamten  $\mathbb{R}^2$  auf. Somit kann **jeder** Vektor aus diesen beiden eindeutig linear kombiniert werden. Ohne weitere Rechnung wissen wir somit, dass das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung besitzen muss.*



## 2.1 Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung

Ein lineares Gleichungssystem hat entweder

- keine Lösung,
- genau eine Lösung oder
- unendlich viele Lösungen.

Genauer gilt:

### Satz 1 1. Lösbarkeit

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  ist genau dann lösbar, wenn  $\mathbf{b}$  eine Linearkombination der Vektoren  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  ist.

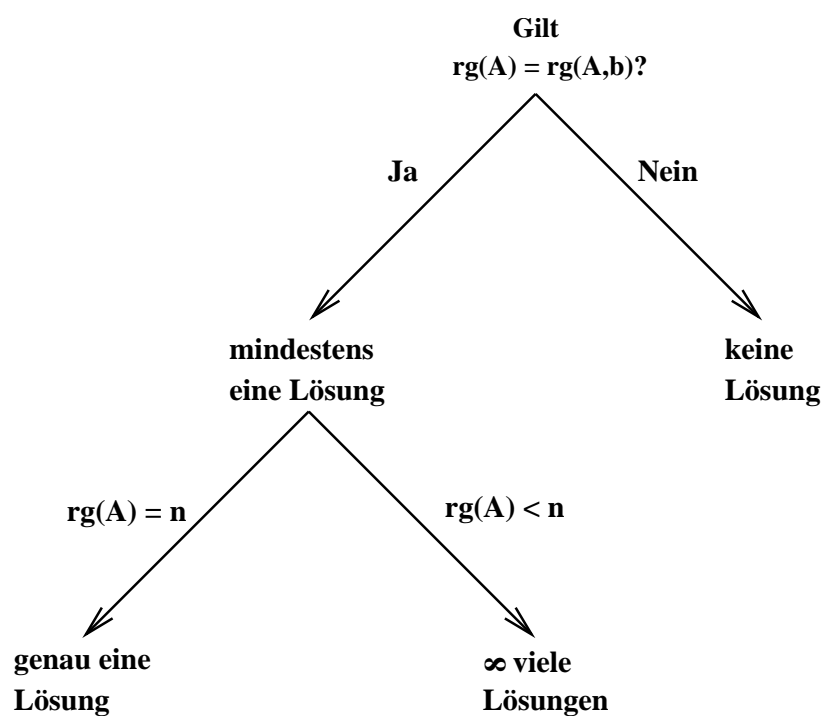
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ lösbar} \Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A, \mathbf{b})$$

### 2. Eindeutigkeit

Falls  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  lösbar ist, so ist die Lösung eindeutig, wenn die Vektoren  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  linear unabhängig sind.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ eind. lösbar} \Leftrightarrow \begin{aligned} &\text{rg}(A) = \text{rg}(A, \mathbf{b}) \\ &\text{und } \text{rg}(A) = n \end{aligned}$$

Schema:



**Beispiel 2.2**

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

– ist lösbar, denn

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

– ist eindeutig lösbar, denn

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2 = \text{Anzahl Spalten}$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

– ist lösbar, denn

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

– ist eindeutig lösbar, denn

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 = \text{Anzahl Spalten}$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

– ist nicht lösbar, denn

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

– –

## 2.2 Struktur der Lösungsmenge

In den Beispielen in der Einführung hatten wir gesehen, dass die Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  eines linearen Gleichungssystems folgende Strukturen haben kann:

- $\mathcal{L} = \{ \}$  (keine Lösung)
- $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\}$  (ein Punkt)
- $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$  (eine Gerade)

Allgemein kann man folgendes über die Struktur der Lösungsmenge eines beliebigen linearen Gleichungssystems aussagen:

**Satz 2** Falls  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A, \mathbf{b}) = r \leq n$ , so ist die Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  von  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  ein  $(n - r)$ -dimensionaler Raum (im allgemeinen ist das kein Vektorraum, ausser im Fall  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ )

$$\mathcal{L} = \{ \mathbf{x} = \mathbf{x}^* + t_1 \mathbf{x}^1 + t_2 \mathbf{x}^2 + \dots + t_{n-r} \mathbf{x}^{n-r} \mid t_1, t_2, \dots, t_{n-r} \in \mathbb{R} \}$$

mit  $(n - r)$  linear unabhängigen Vektoren  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^{n-r}$ .

### Beispiel 2.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Allgemeine Lösung: } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} t_1 + 2t_2 \\ -2t_1 - 3t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{x}^*} + t_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{x}^1} + t_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{x}^2}$$

Dabei sind die beiden reellen Zahlen  $t_1$  und  $t_2$  beliebig wählbar und für jede Wahl dieser Zahlen entsteht eine (der unendlich vielen) Lösungen des linearen Gleichungssystems.

Wie genau man schnell und elegant auf diese Lösung kommt, werden wir bald lernen. Hier wollen wir nur auf die spezielle Struktur der Lösungsmenge eines Systems von linearen Gleichungen hinweisen. Merken Sie sich diese Struktur. Unser Ziel wird es sein, die allgemeine Lösung auch stets in dieser Form aufzuschreiben.

### 3 Reguläre lineare Gleichungssysteme

**Definition 3.1** Ein Gleichungssystem  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  heisst regulär, falls

1.  $m = n$  und
2.  $\text{rg}(A) = n$ .

**Satz 3** Jedes reguläre Gleichungssystem besitzt **genau eine Lösung**.

**Beweisidee:**

- $\text{rg}(A) = n = m$  bedeutet, dass die Spaltenvektoren von  $A$  eine Basis des  $\mathbb{R}^n$  bilden.
- Jeder Vektor  $\mathbf{b}$  kann auf eindeutige Weise als Linearkombination dieser Basis dargestellt werden.
- $\text{rg}(A, \mathbf{b}) = n = \text{rg}(A)$ , also besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.

□

#### 3.1 Lösungsmethode I: Die Inverse

Falls  $\text{rg}(A) = n$  ist, so ist  $A$  regulär und  $A^{-1}$  existiert! Nun wird das Gleichungssystem von links mit  $A^{-1}$  multipliziert:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \underbrace{A^{-1}A}_{I}\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \iff \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

**Beispiel 3.1**

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big| \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**Bemerkung:** Das Lösen von regulären Gleichungssystemen durch Benutzung der Inversen ist extrem ineffizient also in der Praxis eigentlich indiskutabel, denn zum Bestimmen der Inversen  $A^{-1}$  muss ein lineares Gleichungssystem bestehend aus  $n^2$  Gleichungen für  $n^2$  Unbekannte gelöst werden!

### 3.2 Lösungsmethode II: Cramersche Regel

**Satz 4** Für die Lösung  $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  des linearen Gleichungssystems  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  gilt:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

wobei  $A_i$  die  $(n \times n)$ -Matrix ist, die aus  $A$  entsteht, indem man die  $i$ -te Spalte von  $A$  durch den Vektor  $\mathbf{b}$  ersetzt.

#### Beispiel 3.2

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = 1 \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = -2$$

**Beweisidee für  $n = 2$ :**  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$   $|A| \neq 0$

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \quad | \cdot a_{22} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \quad | \cdot a_{12} \\ \hline a_{22}a_{11}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 & = & a_{22}b_1 \\ - ( a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 & = & a_{12}b_2 ) \\ \hline (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 & = & a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \end{array}$$

oder

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

analog

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

□

**Anwendung** Einfachstes Keynes'sches Modell für den Zusammenhang zwischen Volkseinkommen und -ausgaben:

$$Y = C + I_0 + G_0 \quad \text{und} \quad C = a + bY$$

Variablen:

- $Y$ : Volkseinkommen
- $C$ : Konsumausgaben

Parameter:

- $I_0$ : Investitionen
- $G_0$ : Staatsausgaben
- $b$ : Grenzneigung zum Konsum
- $a$ : Ausgaben für Existenzbedürfnisse

Umformung:

$$Y - C = I_0 + G_0 \quad \text{und} \quad -bY + C = a$$

Matrizenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 + G_0 \\ a \end{pmatrix}$$

Cramersche Regel:

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} I_0 + G_0 & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1-b} (I_0 + G_0 + a)$$

**Gleichgewichtseinkommen**

$$C = \frac{\begin{vmatrix} 1 & I_0 + G_0 \\ -b & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1-b} (a + b(I_0 + G_0))$$

**Gleichgewichtskonsum**

## 4 Lösungsmethode III: Der Gaußsche Algorithmus

Der Gaußsche Algorithmus ist ein effizienter Algorithmus

- zum schnellen lösen **aller, also nicht nur regulärer** linearer Gleichungssysteme
- zum Abklären der Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen
- zum Berechnen der Inversen einer regulären Matrix
- zur Rangbestimmung einer Matrix

Zunächst wollen wir noch einige spezielle Typen linearer Gleichungssysteme betrachten, die einfach und direkt gelöst werden können.

### 4.1 Auflösen von regulären Dreieckssystemen

**Beispiel 4.1** Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rclcl} 10x_1 & - & 7x_2 & + & 0x_3 & = & 7 \\ & & 2.5x_2 & + & 5x_3 & = & 2.5 \\ & & & & 6.2x_3 & = & 6.2 \end{array} \quad \text{oder} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 6.2 & 6.2 \end{array} \right)$$

Dieses System lässt sich auf Grund seiner (oberen) Dreiecksform trivial von unten nach oben auflösen. Zunächst bestimmt man  $x_3$  aus der letzten Gleichung

$$x_3 = \frac{6.2}{6.2} = 1.$$

Da  $x_3$  nun bestimmt ist, liefert die zweite Gleichung die Bedingung um sofort  $x_2$  zu berechnen:

$$2.5x_2 + 5 \cdot 1 = 2.5 \quad \text{oder} \quad x_2 = \frac{2.5 - 5}{2.5} = -1.$$

Setzen wir nun die für  $x_3$  und  $x_2$  bestimmten Werte in die erste Gleichung ein, ergibt sich

$$10x_1 - 7 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = 7 \quad \text{oder} \quad x_1 = \frac{7 - 7}{10} = 0.$$

Allgemein können wir dieses Lösungsverfahren wie folgt beschreiben.

#### Obere Dreieckssysteme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

mit  $a_{ii} \neq 0$  für alle  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Die Lösung kann schrittweise und effektiv von unten nach oben berechnet werden:

- $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$
- $x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j}{a_{ii}}$  für  $i = n-1, n-2, \dots, 1$ .

## Untere Dreieckssysteme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

mit  $a_{ii} \neq 0$  für alle  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Die Lösung kann schrittweise und effektiv von oben nach unten berechnet werden:

- $x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$
- $x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$  für  $i = 2, 3, \dots, n$ .

Bemerkung: Ist mindestens ein Diagonaleintrag  $a_{ii}$  in einer Dreiecksmatrix gleich Null, ist das System nicht regulär, denn z.B. ist die Determinante der entsprechenden Koeffizientenmatrix gleich Null.



## 4.2 Herleitung

- Ausgangspunkt

$$\begin{array}{l} (I) \quad x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ (II) \quad 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 14 \\ (III) \quad x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{array} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 9 & 14 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array} \right)$$

- GS: In (II) und (III)  $x_1$  eliminieren

Matrix:  $(II') = (II) - 2 \cdot (I)$  und  $(III') = (III) - (I)$

$$\begin{array}{l} (I') \quad x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ (II') \quad \quad - 3x_2 + 3x_3 = 12 \\ (III') \quad \quad - 7x_2 - 5x_3 = 4 \end{array} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array} \right)$$

- GS: Gleichung (II') durch  $-3$  teilen

Matrix:  $(II'') = -\frac{1}{3}(II')$

$$\begin{array}{l} (I'') \quad x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ (II'') \quad \quad \quad x_2 - x_3 = -4 \\ (III'') \quad \quad - 7x_2 - 5x_3 = 4 \end{array} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array} \right)$$

- GS: In (I'') und (III'')  $x_2$  eliminieren

Matrix:

$(I''') = (I'') - 4 \cdot (II'')$  und

$(III''') = (III'') + 7 \cdot (II'')$

$$\begin{array}{l} (I''') \quad x_1 \quad \quad + 7x_3 = 17 \\ (II''') \quad \quad \quad x_2 - x_3 = -4 \\ (III''') \quad \quad \quad - 12x_3 = -24 \end{array} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -12 & -24 \end{array} \right)$$

- GS: Gleichung (III''') durch  $-12$  teilen

Matrix:  $(III'''' ) = -\frac{1}{12} \cdot (III''')$

$$\begin{array}{l} (I'''' ) \quad x_1 \quad \quad + 7x_3 = 17 \\ (II'''' ) \quad \quad \quad x_2 - x_3 = -4 \\ (III'''' ) \quad \quad \quad \quad \quad x_3 = 2 \end{array} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

- Nun nutzen wir diese Gleichungen um die Unbekannten von unten nach oben zu bestimmen. Aus der dritten Gleichung folgt  $x_3 = 2$ , dann aus der zweiten  $x_2 - 2 = -4$  oder  $x_2 = -2$  und aus der ersten Gleichung  $x_1 + 0x_2 + 7x_3 = x_1 + 14 = 17$  oder  $x_1 = 3$ .

$$\text{Lösungsvektor: } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die folgenden zulässigen Zeilenumformungen (die Sie schon kennen) für die erweiterte Koeffizientenmatrix  $(A, \mathbf{b})$  ändern die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht:

- Vertauschen von Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl  $\neq 0$
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

**Beispiel 4.2** Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme.

•

$$\begin{array}{rcl} x & - & y + z = 2 \\ -2x & + & y + z = -3 \\ x & + & y - z = 1 \end{array} \qquad \text{Lösung: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix (vor und nach den Zeilenumformungen):

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \text{ und } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

•

$$\begin{array}{rcl} x & - & y + z = 2 \\ -2x & + & y = -3 \\ x & & -z = 1 \end{array} \qquad \text{Lösung: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix (vor und nach den Zeilenumformungen):

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \text{ und } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

•

$$\begin{array}{rcl} x & - & y + z = 2 \\ -2x & + & y - 3z = -3 \\ x & - & 3y - z = 1 \end{array} \qquad \text{Lösung: keine}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix (vor und nach den Zeilenumformungen):

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \text{ und } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

**Beispiel 4.3** Für welche reellen Zahlen  $a \in \mathbb{R}$  hat das folgende lineare Gleichungssystem keine Lösung, genau eine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen?

$$\begin{array}{cccccc} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & ay & - & z & = & a \\ 2x & & & + & z & = & -1 \end{array}$$

**Lösung:**

- Erweiterte Koeffizientenmatrix:  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & a & -1 & a \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- Auf Zeilenstufenform bringen:

1. 1. zur 2. Zeile addieren
2. doppelte 1. Zeile von der dritten subtrahieren
3. 2. und 3. Zeile tauschen
4.  $(a - 1)/2$  faches der 2. Zeile von der dritten Zeile abziehen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3a-1}{2} & \frac{3a-1}{2} \end{pmatrix}$$

- Fallunterscheidung

- Fall  $a \neq 1/3$ :  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Fall  $a = 1/3$ :  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

### 4.3 Bestimmung der Inversen

Auch für die Bestimmung der Inversen einer Matrix ist der Gaußsche Algorithmus in leicht modifizierter Form geeignet. Dazu werden die zu invertierende Matrix  $A$  und die Einheitsmatrix gleicher Größe zusammengefasst. Dann wird die Matrix  $A$  durch die elementaren Zeilenumformungen zur Einheitsmatrix umgeformt und gleichzeitig werden alle diese Umformungen an der Einheitsmatrix durchgeführt. Am Ende des Prozesses ist aus der Matrix  $A$  die Einheitsmatrix und aus der Einheitsmatrix die Inverse  $A^{-1}$  von  $A$  entstanden.

Wir wollen das Verfahren an einem Beispiel erläutern.

$$\text{gegeben: } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{gesucht: } A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & u_1 & v_1 \\ x_2 & u_2 & v_2 \\ x_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix} \text{ mit } AA^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrixgleichung  $AA^{-1} = I$  kann auch durch das folgende Gleichungssystem (9 Gleichungen für 9 Unbekannte) beschrieben werden:

$$\begin{array}{rclcl} 4x_1 & & + & 5x_3 & = & 1 \\ & x_2 & - & 6x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & & + & 4x_3 & = & 0 \\ \\ 4u_1 & & + & 5u_3 & = & 0 \\ & u_2 & - & 6u_3 & = & 1 \\ 3u_1 & & + & 4u_3 & = & 0 \\ \\ 4v_1 & & + & 5v_3 & = & 0 \\ & v_2 & - & 6v_3 & = & 0 \\ 3v_1 & & + & 4v_3 & = & 1 \end{array}$$

Aufgeteilt in drei Blöcke, sind das drei Gleichungssysteme, die sich nur durch die rechte Seite unterscheiden! Daher ist eine simultane Lösung möglich!

Allgemeines Vorgehen:

Sei  $A$  eine reguläre Matrix. Durch zulässige Zeilenoperationen wird  $(A, I)$  in  $(I, B)$  überführt.

Die Matrix  $B$  ist dann die gesuchte Inverse  $A^{-1} = B$ !

$$\begin{array}{l}
 \\
 \\
 (I) \rightsquigarrow \frac{1}{4}(I) \\
 \\
 (III) \rightsquigarrow (III) - 3(I) \\
 \\
 (III) \rightsquigarrow 4(III) \\
 \\
 (II) \rightsquigarrow (II) + 6(III) \\
 \\
 (I) \rightsquigarrow (I) - \frac{5}{4}(III)
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \overbrace{\left( \begin{array}{ccc|ccc}
 4 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\
 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right)}^{(A,I)} \\
 \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\
 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right) \\
 \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 1
 \end{array} \right) \\
 \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 4
 \end{array} \right) \\
 \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & -18 & 1 & 24 \\
 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 4
 \end{array} \right) \\
 \\
 \underbrace{\left( \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -5 \\
 0 & 1 & 0 & -18 & 1 & 24 \\
 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 4
 \end{array} \right)}_{(I,A^{-1})}
 \end{array}$$

## 5 Übungsaufgaben

1. Ermitteln Sie mit Hilfe des Eliminationsverfahrens von Gauß die allgemeinen Lösungen der Gleichungssysteme.

$$(a) \quad \begin{array}{rclcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 8 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & + & 15x_3 & = & 12 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 10 \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{rclclcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 7x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & + & 8x_4 & = & 10 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & - & 5x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 4 \end{array}$$

2. Ein Unternehmen stellt drei Typen eines neuen Produktes her. Der erforderliche Input pro Einheit ist durch die folgende Tabelle gegeben:

	Erforderlicher Input			Total verfügbar
	Typ A	Typ B	Typ C	
Rohmaterial	90	60	75	4'950
Arbeit	12	16	20	1'080

Ermitteln Sie die Produktionspläne  $(x_1, x_2, x_3)$ , welche die Ressourcen exakt aufbrauchen.

- (a) Wie lautet das Gleichungssystem?  
 (b) Ermitteln Sie die Lösungsgesamtheit des Gleichungssystems.  
 (c) Welche Lösungen sind ökonomisch sinnvoll?
3. Gegeben sei folgendes Gleichungssystem, wobei  $p$  eine beliebige reelle Zahl ist:

$$\begin{array}{rclcl} p \cdot x & & & + & z & = & 1 \\ x & + & p \cdot y & & & = & 2 \\ & & y & + & p \cdot z & = & -3 \end{array}$$

- (a) Für welche Werte von  $p$  hat das Gleichungssystem genau eine Lösung?  
 (b) Ermitteln Sie für  $p \neq -1$  die Lösung mit Hilfe der Cramerschen Regel.  
 (c) Bestimmen Sie alle Lösungen für  $p = -1$ .
4. Für welche Werte  $s \in \mathbb{R}$  hat das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 & & & + & 18x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & s^2x_3 & = & s + 3 \\ 2x_1 & & & + & 2s^2x_3 & = & 2s \end{array}$$

- (a) genau eine Lösung?  
 (b) unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie die Lösungsmenge.  
 (c) keine Lösung?

5. Bestimmen Sie mit

- (a) dem direkten Ansatz und
- (b) dem Gaußschen Algorithmus

die Inverse  $A^{-1}$  der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$