Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Universität Basel

Mathematik 2

Dr. Thomas Zehrt

Eigenwerte und Eigenvektoren

Inhaltsverzeichnis

1 Einstimmung

In den Wirtschaftswissenschaften treten Eigenwerte und Eigenvektoren vorwiegend in folgenden Bereichen auf:

- Stabilitätsuntersuchungen ökonomischer Systeme
- Wachstumsmodelle mit mehreren Sektoren
- Statistik und Ökonometrie

Beispiel 1.1 (Einkommensentwicklung in einer Volkswirtschaft mit 2 Sektoren)
Bezeichnungen:

$x_{1,t}$	*Einkommen von Sektor 1 in der t-ten Periode*
$x_{2,t}$	*Einkommen von Sektor 2 in der t-ten Periode*

für $t = 0, 1, 2, \dots$
Es gelte die folgende Dynamik bei der Einkommensentwicklung:

$$\begin{aligned} x_{1,t+1} &= x_{1,t} + 0.4\, x_{2,t} \\ x_{2,t+1} &= 0.3\, x_{1,t} + 0.6\, x_{2,t} \end{aligned}$$

oder

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x_{t+1}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x_t}}$$

Wir werden erkennen, dass die Systemdynamik ganz entscheidend vom Starteinkommen beider Sektoren abhängt.

Variante 1: *Starteinkommen* $\mathbf{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Einkommensentwicklung beider Sektoren:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_1} &= A\,\mathbf{x_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 0.9 \end{pmatrix} \\
\mathbf{x_2} &= A\,\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.4 \\ 0.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.76 \\ 0.96 \end{pmatrix} \\
\mathbf{x_3} &= A\,\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.76 \\ 0.96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.14 \\ 1.10 \end{pmatrix} \\
\mathbf{x_4} &= A\,\mathbf{x_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2.14 \\ 1.10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.59 \\ 1.31 \end{pmatrix} \\
\vdots \quad &= \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Variante 2: *Starteinkommen* $\mathbf{x_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Einkommensentwicklung beider Sektoren:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_1} &= A\,\mathbf{x_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.4 \\ 1.2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{x_2} &= A\,\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2.4 \\ 1.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.88 \\ 1.44 \end{pmatrix} \\
\mathbf{x_3} &= A\,\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2.88 \\ 1.44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.46 \\ 1.73 \end{pmatrix} \\
\mathbf{x_4} &= A\,\mathbf{x_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3.46 \\ 1.73 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.15 \\ 2.07 \end{pmatrix} \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

In beiden Sektoren wachsen die Einkommen in der 2. Variante mit demselben konstanten Faktor 1.2*! Es herrscht* <u>*dynamisches Gleichgewicht*</u>*. Der Grund dafür ist die spezielle Wahl des Startvektors*

$$\mathbf{x_0} = \mathbf{x}^\star = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

denn es gilt

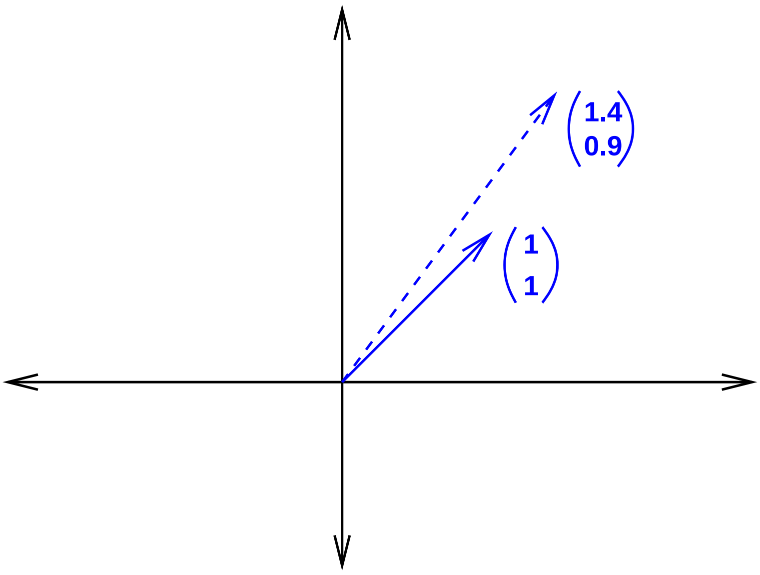
$$\begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aber es gibt <u>*keine*</u> *reelle Zahl* λ*, so dass*

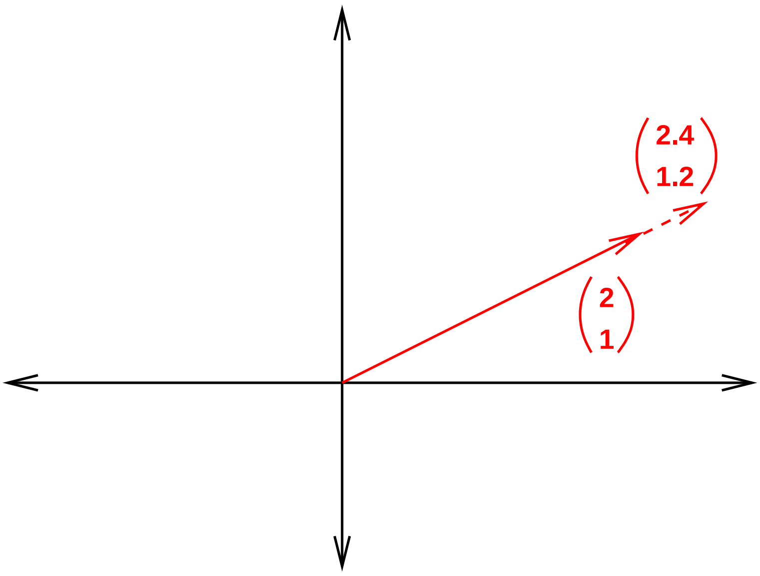
$$\begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Auch in einer Graphik lässt sich der Unterschied zwischen beiden Startvektoren erkennen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.4 \\ 1.2 \end{pmatrix} = 1.2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



2 Allgemeine Eigenwertprobleme

gegeben: quadratische Matrix $A = A_{n\times n}$

gesucht: $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, so dass $A\,\mathbf{x} \;=\; \lambda\,\mathbf{x}$ bzw.

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;=\; \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

Definition 2.1 *Eine (reelle) Zahl λ mit $A\,\mathbf{x} \;=\; \lambda\,\mathbf{x}$ heisst Eigenwert von A. Der zugehörige Vektor $\mathbf{x}$ heisst Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.*

Ein Eigenvektor $\mathbf{x}$ zum Eigenwert λ ist nicht eindeutig bestimmt. Eigentlich sollte man zunächst besser von Eigengeraden sprechen, denn mit jedem Eigenvektor ist auch jedes Vielfache dieses Vektors wieder Eigenvektor zum selben Eigenwert. Genauer:

Ist der Vektor $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so ist auch jedes Vielfaches von $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor von A zum selben Eigenwert.

Das zeigt sofort die folgenden Rechnung. Ist $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$, so gilt:

$$A\,(\alpha\,\mathbf{x}) \;=\; \alpha\,A\,\mathbf{x} \;=\; \alpha\,(\lambda\,\mathbf{x}) \;=\; \lambda\,(\alpha\,\mathbf{x})$$

Also hat auch der um α gestreckte oder gestauchte Vektor $\alpha\,\mathbf{x}$ die Eigenschaft eines Eigenvektors zum Eigenwert λ. Deshalb wäre es eigentlich besser von Eigengeraden oder Eigenvektorräumen zu reden.

Beispiel 2.1 *Es gilt*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2.4 \\ 1.2 \end{pmatrix} \;=\; 1.2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \;=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} \;=$$

2.1 Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

Für einen Eigenwert λ mit zugehörigem Eigenvektor $\mathbf{x}$ von A gilt:

$$\begin{array}{rrcr} & A\,\mathbf{x} & = & \lambda\,\mathbf{x} \\ \Leftrightarrow & A\,\mathbf{x} & = & \lambda\,I\,\mathbf{x} \\ \Leftrightarrow & A\,\mathbf{x} - \lambda\,I\,\mathbf{x} & = & \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow & (A - \lambda\,I)\,\mathbf{x} & = & \mathbf{0} \end{array}$$

Man erhält das homogene lineare Gleichungssystem

$$\boxed{(A - \lambda\,I)\,\mathbf{x} \;=\; \mathbf{0}}$$

das natürlich immer die Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hat. Dieser Vektor ist aber kein Eigenvektor (nach Definition). Wir suchen also weitere Lösungen des Systems, was bedeutet, dass dieses System dann unendlich viele Lösungen haben sollte. Natürlich gibt es genau dann (weitere) Lösungen $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, wenn die Matrix $(A - \lambda\,I)$ singulär ist!

Kriterium:

$$\boxed{(A - \lambda\,I) \text{ singulär} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\det(A - \lambda\,I)}_{p_A(\lambda)} = 0}$$

Definition 2.2 *Der Ausduck $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda\,I)$ ist ein Polynom vom Grad n in λ, das als charakteristisches Polynom von A bezeichnet wird.*

Die Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ von $p_A(\lambda)$ sind die Eigenwerte von A.

Um die zugörigen Eigenvektoren zu berechnen, lösen wir dann die linearen Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{rcl} (A - \lambda_1\,I)\,\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{0} & \Rightarrow & \mathbf{x}^{(1)} \text{ Eigenvektor zu } \lambda_1 \\ (A - \lambda_2\,I)\,\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{0} & \Rightarrow & \mathbf{x}^{(2)} \text{ Eigenvektor zu } \lambda_2 \\ (A - \lambda_3\,I)\,\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0} & \Rightarrow & \mathbf{x}^{(3)} \text{ Eigenvektor zu } \lambda_3 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren von Diagonalmatrizen Wir wollen darauf hinweisen, dass die Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren von Diagonalmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

sehr einfach ist. Die Eigenwerte sind die Diagomaleinträge selbst, denn es gilt hier

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} - \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda).$$

Aber eigentlich beantworteten die folgenden (offensichtlichen) Gleichungen $A\mathbf{e}_i = a_{ii}\mathbf{e}_i$ für $i = 1, 2, \dots, n$ alle Fragen für Diagonalmatrizen.

Aufgabe 2.1 *Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

- Charakteristisches Polynom: $p_A(\lambda) \; = \; -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 6$
- Erste Nullstelle raten: $\lambda_1 = -1$
- Polynomdivision (siehe Vorkurs):

$$(-\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 6) : (\lambda + 1) \quad = \quad -\lambda^2 + 5\lambda - 6$$

- Also: $p_A(\lambda) \; = \; -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 6 \; = \; (\lambda + 1) \cdot (-\lambda^2 + 5\lambda - 6)$
- Nullstellen des quadratischen Polynoms $-\lambda^2 + 5\lambda - 6$ bestimmen: $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$
- $$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix} - (-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \mathbf{x^{(1)}} \; = \; t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- $$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \mathbf{x^{(2)}} \; = \; t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$
- $$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \mathbf{x^{(3)}} \; = \; t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

2.2 Wichtige Eigenschaften

Eigenschaft 1

Satz 1 $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ *ist ein Polynom vom Grad* n *in* λ *und hat höchstens* n *reelle Nullstellen.*

Beispiel 2.2 $n = 2$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - \underbrace{(a+d)}_{=:sp(A)}\lambda + \underbrace{ad - bc}_{=\det(A)} \end{aligned}$$

Nullstellen:

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2}{4} - \det(A)}}$$

Das charakteristische Polynom kann hier zwei verschiedenen reelle Nullstellen, zwei gleiche reelle Nullstellen oder keine reelle Nullstelle haben.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

  $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - (-3)} = 3, -1$

  zwei (verschiedene) reelle Nullstellen

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

  $\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 9} = 3, 3$

  zwei (gleiche) reelle Nullstellen

- $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

  $\lambda_{1,2} = 0 \pm \sqrt{-1} = ?$

  keine reellen Nullstellen

Eigenschaft 2

Satz 2 *Eigenvektoren $\mathbf{x^1}, \ldots, \mathbf{x^r}$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sind linear unabhängig.*

Beweis ($r = 2$):

Es gilt also $A\mathbf{x^1} = \lambda_1 \mathbf{x^1}$ und $A\mathbf{x^2} = \lambda_2 \mathbf{x^2}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Ansatz: $\mathbf{0} = t_1 \mathbf{x^1} + t_2 \mathbf{x^2}$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = A\mathbf{0} &= A(t_1 \mathbf{x^1} + t_2 \mathbf{x^2}) \\ &= t_1 A\mathbf{x^1} + t_2 A\mathbf{x^2} \\ &= t_1 \lambda_1 \mathbf{x^1} + t_2 \lambda_2 \mathbf{x^2} \end{aligned}$$

Also

$$\begin{array}{cccccl} & \mathbf{0} & = & t_1 \mathbf{x^1} & + & t_2 \mathbf{x^2} \quad | \cdot \lambda_1 \\ & \mathbf{0} & = & t_1 \lambda_1 \mathbf{x^1} & + & t_2 \lambda_2 \mathbf{x^2} \\ \\ & \mathbf{0} & = & t_1 \lambda_1 \mathbf{x^1} & + & t_2 \lambda_1 \mathbf{x^2} \\ \text{- (} & \mathbf{0} & = & t_1 \lambda_1 \mathbf{x^1} & + & t_2 \lambda_2 \mathbf{x^2} \quad) \\ \\ & \mathbf{0} & = & & & t_2 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \mathbf{x^2} \end{array}$$

Somit muss $t_2 = 0$ gelten und mit der ersten Gleichung folgt auch $t_1 = 0$. Beide Eigenvektoren sind also linear unabhängig. □

Beispiel 2.3 *Die Matrix (aus Aufgabe 1)*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

hatte die Eigenvektoren $\mathbf{x^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x^3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$, *zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten* $-1, 2$ *und* 3. *Es ist leicht zu zeigen, dass diese drei Vektoren linear unabhängig sind, z.B. indem Sie den Rang der Matrix bestimmen, die aus diesen drei Spaltenvektoren besteht.*

Eigenschaft 3

Satz 3 *Ist die Matrix A symmetrisch ($A^T = A$), so sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal.*

Beweis: Es gelte $A\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$ und $A\mathbf{b} = \mu\mathbf{b}$. mit $\lambda \neq \mu$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\lambda\, \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} &= \lambda\, \mathbf{a}^T\mathbf{b} \\
&= (A\mathbf{a})^T\mathbf{b} \\
&= \mathbf{a}^T A^T\mathbf{b} \\
&= \mathbf{a}^T(A^T\mathbf{b}) \\
&= \mathbf{a}^T(A\mathbf{b}) \\
&= \mathbf{a}^T\mu\, \mathbf{b} \\
&= \mu\, \mathbf{a}^T\mathbf{b} = \mu\, \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}
\end{aligned}$$

und da $\lambda \neq \mu$ ist, muss $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0$ sein! □

Beispiel 2.4 *Die symmetrische Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenvektoren $\mathbf{x^1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x^3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten* $0, 2$ *und* 3. *Es ist leicht zu zeigen, dass diese drei Vektoren paarweise orthogonal sind, z.B. indem Sie die Skalarprodukte von jeweils zwei dieser Vektoren ausrechnen.*

3 Diagonalisierung einer Matrix

Wir wollen die folgende Frage behandeln:

Gibt es zu einer gegebenen $(n \times n)$-Matrix eine invertierbare Matrix B, so dass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix ist?

Im allgemeinen gibt es eine solche Matrix nicht. Betrachten Sie z.B. die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Definition 3.1 *Eine $(n \times n)$-Matrix A heisst* <u>*diagonalisierbar*</u>*, wenn es eine invertierbare Matrix B gibt, so dass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix ist*

Es gilt der folgende schöne Zusammenhang.

Satz 4 *Eine $(n \times n)$-Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie n linear unabhängige Eigenvektoren hat.*

Beweis: Seien $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ die linear unabhängigen Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Wir bilden die Eigenvektormatrix

$$B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{b}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

in der einfach alle Eigenvektoren als Spaltenvektoren zusammengefasst werden. Dann gilt

$$AB = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \ldots & A\mathbf{b}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

d.h. die Spaltenvektoren von AB sind gerade die Vektoren $A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \ldots, A\mathbf{b}_n$. Beachten wir noch die Eigenvektoreigenschaft folgt

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \ldots & A\mathbf{b}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1\mathbf{b}_1 & \lambda_2\mathbf{b}_2 & \ldots & \lambda_n\mathbf{b}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{b}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= BD. \end{aligned}$$

wobei D die Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge gerade die Eigenwerte von A sind. Da die Spaltenvektoren von B linear unabhängig sind (nach Definition) hat B maximalen Rang und ist invertierbar. Aus der Gleichung $AB = BD$ folgt daher durch Multiplikation mit B^{-1} von links $B^{-1}AB = D$.

Wir verzichten auf einen Beweis der zweiten Aussage des Satzes: Eine diagonalisierbare Matrix besitzt n linear unabhäbgige Eigenvektoren. □

Der angegebene Beweis gibt uns auch ein Rezept dafür, wie man eine (diagonalisierbare) Matrix diagonalisieren kann.

Beispiel 3.1 *Die Matrix* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ *hat die Eigenwerte und Eigenvektoren*

$$\lambda_1 = 2 \qquad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Also ist $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *und* $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *und kurze und direkte Rechnung ergibt:*

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4 Lineare Abbildungen und Matrizen

Seien m, n natürliche Zahlen. Wird jedem Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ genau ein Vektor $L(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ zugeordnet, so spricht man von einer (vektorwertigen) Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$.

Definition 4.1 *Eine Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heisst linear, wenn folgendes gilt:*
Für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ und alle reellen Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist

$$\boxed{L(\lambda \cdot \mathbf{x} + \mu \cdot \mathbf{y}) \quad = \quad \lambda \cdot L(\mathbf{x}) + \mu \cdot L(\mathbf{y})}$$

Beispiel 4.1

- *Die Abbildung $L(\mathbf{x}) = L(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 4x_3$ ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^1$, denn*

$$\begin{aligned} L(\lambda \cdot \mathbf{x} + \mu \cdot \mathbf{y}) &= L(\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot y_1, \lambda \cdot x_2 + \mu \cdot y_2, \lambda \cdot x_3 + \mu \cdot y_3) \\ &= \lambda \cdot x_1 + \mu \cdot y_1 + 2 \cdot (\lambda \cdot x_2 + \mu \cdot y_2) + 4 \cdot (\lambda \cdot x_3 + \mu \cdot y_3) \\ &= \lambda \cdot x_1 + 2 \cdot \lambda \cdot x_2 + 4 \cdot \lambda \cdot x_3 + \mu \cdot y_1 + 2 \cdot \mu \cdot y_2 + 4 \cdot \mu \cdot y_3 \\ &= \lambda \cdot (x_1 + 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3) + \mu \cdot (y_1 + 2 \cdot y_2 + 4 \cdot y_3) \\ &= \lambda \cdot L(\mathbf{x}) + \mu \cdot L(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

- *Ist die Abbildung $L(\mathbf{x}) = L(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 1$ linear?*

- *Die Abbildung $L(\mathbf{x}) = L(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$ ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie das!*

- *Die Abbildung $L(\mathbf{x}) = L(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$ ist eine Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, die nicht linear ist. Zeigen Sie das!*

Es gibt einen starken Zusammenhang zwischen Matrizen und linearen Abbildungen. Zunächst kann man schnell erkennen, dass für jede $m \times n$ Matrix $A = A_{m \times n}$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ einfach durch die Matrizenmultiplikation definiert werden kann:

$$\begin{aligned} L_A(\mathbf{x}) &= A \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \\ &= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Überlegen Sie sich, dass eine so definierte Abbildung wirklich linear ist. An der zweiten Zeile kann man erkennen, dass das Bild des Vektors $\mathbf{x}$ unter der linearen Abbildung L_A eine Linearkombination der Spaltenvektoren von A ist.

Satz 5 *Wir fixieren die natürlichen Basen* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots$ *von* $\mathbb{R}^n$ *und* $\mathbb{R}^m$. *Dann gilt folgendes: Zu jeder linearen Abbildung* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *gibt es genau eine Matrix* $A = A_{m\times n}$, *die* L *darstellt, d.h. für alle* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ *gilt* $L(\mathbf{x}) \;=\; A\cdot\mathbf{x}$.

Beweis: Sei L eine lineare Abbildung. Dann sei

$$A \;=\; \begin{pmatrix} | & | & & | \\ L(\mathbf{e}_1) & L(\mathbf{e}_2) & \ldots & L(\mathbf{e}_n) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

d.h. die Spaltenvektoren von A sind die Bilder der Standardbasisvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ des $\mathbb{R}^n$ unter der linearen Abbildung L. Tatsächlich gilt dann:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= x_1\, L(\mathbf{e}_1) + x_2\, L(\mathbf{e}_2) + \ldots + x_n\, L(\mathbf{e}_n) \\ &= L(x_1\,\mathbf{e}_1 + x_2\,\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\,\mathbf{e}_n) \\ &= L(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

□

Die so konstruierte Matrix A heisst Standarddarstellungsmatrix und manchmal schreibt man dafür auch $A = A_{E_n}^{E_m}$ mit

- $E_n \;=\; \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\} \in \mathbb{R}^n$
- $E_m \;=\; \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m\} \in \mathbb{R}^m$

Würde man andere Basen wählen und alle Vektoren in diesen Basen ausdrücken (was für manche Problem sehr hilfreich sein kann), würde die zu L gehörende Darstellungsmatrix ganz anders aussehen!

Beispiel 4.2

- *Die Abbildung* $L(\mathbf{x}) \;=\; L(x_1, x_2, x_3) \;=\; x_1 + 2x_2 + 4x_3$ *ist eine lineare Abbildung von* $\mathbb{R}^3$ *nach* $\mathbb{R}^1$ *und sicher gilt*

$$L(\mathbf{x}) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- *Die Abbildung* $L(\mathbf{x}) \;=\; L(x_1, x_2) \;=\; \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$ *ist eine lineare Abbildung von* $\mathbb{R}^2$ *nach* $\mathbb{R}^2$ *und sicher gilt*

$$L(\mathbf{x}) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Fixpunkte Als Ökonom ist man häufig daran interessiert, Fixpunkte von Abbildungen (bzw. Funktionen) zu finden. Das sind Vektoren $\mathbf{x}^*$ die sich unter der Abbildung nicht ändern, also fix bleiben.

Falls unsere Abbildung linear ist, also $L_A(\mathbf{x}) = A\cdot\mathbf{x}$ gilt, ist die Suche nach Fixpunkten, also Punkten $\mathbf{x}^*$ mit der Eigenschaft $A\cdot\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^* = 1\cdot\mathbf{x}^*$ gleichbedeutend mit der Suche nach Eigenvektoren von A zum Eigenwert 1.

5 *Anwendung: Demographische Entwicklung*

Lineares dynamisches System zur Bevölkerungsentwicklung

- (vereinfachende) Annahme: Die Bevölkerung bestehe nur aus Arbeitern und Rentnern und die Anzahl Arbeiter bzw. Rentner am Ende des t-ten Jahres bezeichen wir mit A_t bzw. R_t
- Ein Teil der Arbeiter geht in Rente, sagen wir rA_t und neue Arbeiter werden geboren, sagen wir bA_t. Die Anzahl der Arbeiter im Jahr $t+1$ ist dann

$$A_{t+1} \;=\; A_t + bA_t - rA_t \;=\; (1+b-r)A_t.$$

- Ein Teil der Rentner stirbt und neue Rentner kommen hinzu. Gehen wir wieder von stets konstanten Raten aus so ergibt sich im Jahr $t+1$

$$R_{t+1} \;=\; R_t - dR_t + rA_t.$$

Matrizenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} A_{t+1} \\ R_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+b-r & 0 \\ r & 1-d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_t \\ R_t \end{pmatrix}$$

Zentrale Fragen:

Was sagt dieses Modell über die Bevölkerungsentwicklung ausgehend von einem beliebigen Startpunkt A_0, R_0?

Wie entwickelt sich das Verhältnis von Rentnern zu Arbeitern, d.h. der Quotient

$$\frac{R_t}{A_t}$$

über die Zeit?

1. Bismarcks Zeit:

   Jede Frau bekam im Durchschnitt 3 Kinder und es arbeiteten fast ausschliesslich Männer. Gehen wir davon aus, dass jeder Mann verheiratet war, so können wir die Geburten direkt den Arbeitern zurechnen. Mit der Lebensarbeitszeit von 40 Jahren und einer Lebenserwartung von 10 Jahren für Rentner erhalten wir:

$$b = \frac{3}{40}, \quad r = \frac{1}{40}, \quad d = \frac{1}{10}$$

2. 70-ger Jahre:

   Jede Frau bekam im Durchschnitt 2 Kinder und es arbeiteten etwa die Hälfte aller Frauen (jedes Kind zählt etwa für 1.5 Arbeiter). Mit der Lebensarbeitszeit von 40 Jahren und einer Lebenserwartung von 15 Jahren für Rentner erhalten wir:

$$b = \frac{1.5}{40}, \quad r = \frac{1}{40}, \quad d = \frac{1}{15}$$

3. Prognose für 2050:

   Jede Frau bekommt im Durchschnitt 1.4 Kinder und es arbeiteten Frauen und Männer gleichermassen (jedes Kind zählt etwa für 2 Arbeiter). Mit der Lebensarbeitszeit von 30 Jahren und einer Lebenserwartung von 20 Jahren für Rentner erhalten wir:

$$b = \frac{0.7}{30}, \quad r = \frac{1}{30}, \quad d = \frac{1}{20}$$

Nun wollen wir versuchen, allgemeine Aussagen über den Quotienten $\frac{R_t}{A_t}$ zu machen.

Nehmen wir an, dass die Matrix

$$U = \begin{pmatrix} 1+b-r & 0 \\ r & 1-d \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte λ_1 und λ_2 sowie die zugehörigen **linear unabhängigen** Eigenvektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ hat, d.h. es gilt $U\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}$ und $U\mathbf{w} = \lambda_2\mathbf{w}$.

Dann können wir jeden Startvektor unserer Population schreiben als:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_0 \\ R_0 \end{pmatrix} &= a_1\mathbf{v} + a_2\mathbf{w} \\ &= a_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_t \\ R_t \end{pmatrix} &= \overbrace{U \cdot U \cdots U \cdot U}^{t \text{ Faktoren}} \begin{pmatrix} A_0 \\ R_0 \end{pmatrix} \\ &= U^{t-1}U\,(a_1\mathbf{v} + a_2\mathbf{w}) \\ &= U^{t-1}\,(a_1U\mathbf{v} + a_2U\mathbf{w}) \\ &= U^{t-1}\,(a_1\lambda_1\mathbf{v} + a_2\lambda_2\mathbf{w}) \\ &= U^{t-2}\left(a_1\lambda_1^2\mathbf{v} + a_2\lambda_2^2\mathbf{w}\right) \\ &\quad \cdots\cdots \\ &= \left(a_1\lambda_1^t\mathbf{v} + a_2\lambda_2^t\mathbf{w}\right) \\ &= \begin{pmatrix} a_1\lambda_1^t v_1 + a_2\lambda_2^t w_1 \\ a_1\lambda_1^t v_2 + a_2\lambda_2^t w_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aus der Kenntnis der Eigenwerte und Eigenvektoren von U könnten wir für jedes t auch den gesuchten Quotienten konkret bestimmen:

$$\frac{R_t}{A_t} = \frac{a_1\lambda_1^t v_1 + a_2\lambda_2^t w_1}{a_1\lambda_1^t v_2 + a_2\lambda_2^t w_2}$$

Es gilt

$$\lambda_1 = 1 + b - r \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{r}{1+r-d} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 - d \quad \text{und} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.1 *Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix U und kontrollieren Sie das obige Resultat.*

Damit gilt:

$$\begin{pmatrix} A_t \\ R_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\lambda_1^t \\ a_1\frac{r}{b-r+d}\lambda_1^t + a_2\lambda_2^t \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{R_t}{A_t} &= \frac{a_1\frac{r}{b-r+d}\lambda_1^t + a_2\lambda_2^t}{a_1\lambda_1^t} \\ &= \frac{r}{b-r+d} + \frac{a_2}{a_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^t \end{aligned}$$

wobei der zweite Summand gegen 0 konvergiert, <u>falls</u> $\lambda_1 > \lambda_2$ bzw. $b + d > r$ gilt. In diesem Fall folgt sofort

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R_t}{A_t} = \frac{r}{b-r+d}$$

und das ,,langfristige,, Verhältnis von Rentnern zu Arbeitern ist nur noch von den Variablen b, r und d abhängig.

Aufgabe 5.2 *Berechnen und interpretieren Sie den Ausdruck* $\frac{r}{b-r+d}$ *für die drei Fälle:*

1. *Bismarcks Zeit,*
2. *die 70-ger Jahre und*
3. *das Jahr 2050.*

Welche persönlichen Schlussfolgerungen ziehen Sie aus diesem Ergebnis?

6 Übungsaufgaben

1. Weisen Sie nach, dass die drei Vektoren

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

paarweise orthogonale Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ sind.

2. Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und diagonalisieren Sie A (falls möglich).

3. Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ und diagonalisieren Sie A (falls möglich).

4. Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und diagonalisieren Sie A (falls möglich).

5. Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ eine so genannte Markov-Matrix, d.h. A ist eine nicht-negative Matrix, deren sämtliche Spaltensummen gleich 1 sind:

   - $a_{ij} \geq 0$,
   - $a_{11} + a_{21} = 1$ und
   - $a_{12} + a_{22} = 1$.

   Zeigen Sie, dass $\lambda = 1$ ein Eigenwert von A ist.

6* (**Zusatzaufgabe**) Sei A eine invertierbare Matrix und $\lambda \neq 0$ eine reelle Zahl mit der Eigenschaft $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (für einen bestimmten Vektor $\mathbf{v}$). Zeigen Sie, dass $(A^{-1} - \frac{1}{\lambda} I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ gilt.

(Kurz: Ist λ ein Eigenwert von A, so ist $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A^{-1}. Merken Sie sich das, denn wenn Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A kennen, kennen Sie auch die der Matrix A^{-1}.)