Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Universität Basel 5

Mathematik 2
Dr. Thomas Zehrt

Quadratische Formen und Definitheit

Inhaltsverzeichnis

1 Quadratische Formen

Die Koordinatenachsen des $\mathbb{R}^n$ werden wieder mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezeichnet.

Definition 1.1 *Sei A eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix. Dann heisst die Funktion*

$$Q_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$Q_A(\mathbf{x}) \;=\; \mathbf{x} \bullet A\mathbf{x} \;=\; \mathbf{x}^T A\mathbf{x} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

die zu A gehörige quadratische Form.

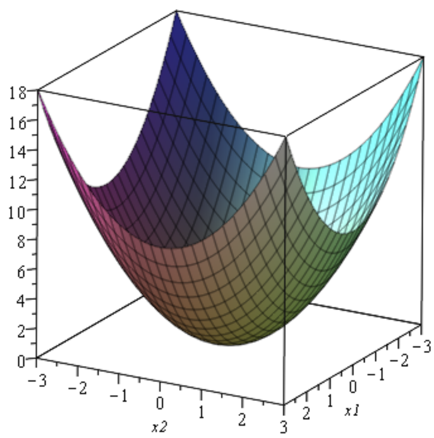
Bemerkungen:

- $Q_A(\mathbf{x})$ ist das Skalarprodukt der Vektoren $\mathbf{x}$ und $A\mathbf{x}$.
- Q_A ist die Funktion, die jedem Vektor $\mathbf{x}$ das Skalarprodukt der Vektoren $\mathbf{x}$ und $A\mathbf{x}$ zuordnet.

Beispiel 1.1

$$A \;=\; I \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

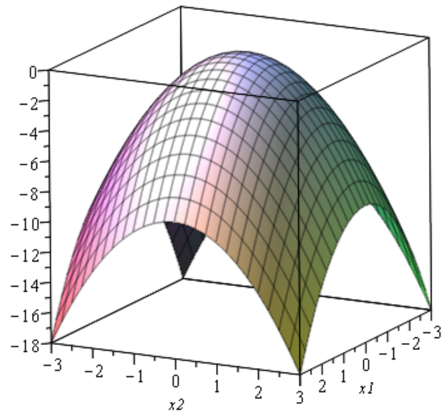
$$Q_A(\mathbf{x}) \;=\; \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \;=\; (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;=\; (x_1, x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;=\; x_1^2 + x_2^2.$$



Beispiel 1.2

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

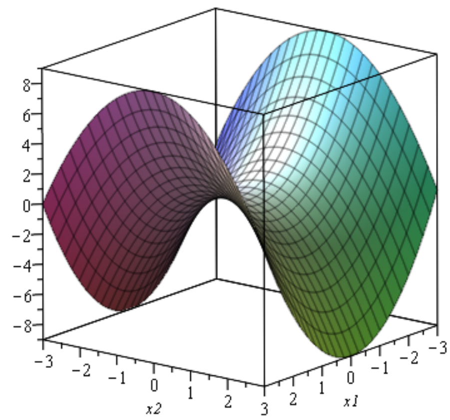
$$Q_B(\mathbf{x}) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = -x_1^2 - x_2^2.$$



Beispiel 1.3

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

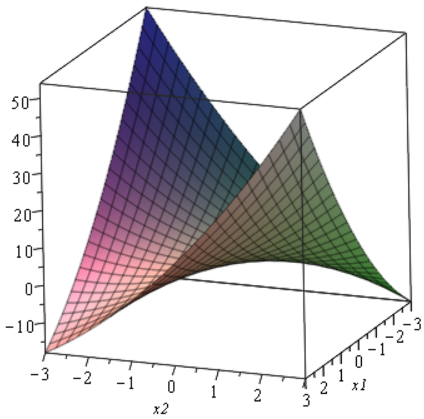
$$Q_C(\mathbf{x}) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 - x_2^2.$$



Beispiel 1.4

$$D \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q_D(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \\ &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1(x_1 + 2x_2) + x_2(2x_1 + x_2) \;=\; x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2. \end{aligned}$$



Einer Diagonalmatrix

$$D \;=\; \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

kann man unmittelbar und ohne grossen Aufwand ihre quadratische Form zuordnen. Insbesondere kommen hier **keine** gemischten Terme $x_i x_j$ vor!

$$Q_D(\mathbf{x}) \;=\; \mathbf{x}^T\, D\, \mathbf{x} \;=\; \sum_{i=1}^{n} d_i\, x_i^2 \;=\; d_1\, x_1^2 + d_2\, x_2^2 + \ldots + d_n\, x_n^2$$

2 Definitheit (symmetrischer) Matrizen

Definition 2.1 *Sei A eine (symmetrische) $(n \times n)$-Matrix. Dann heisst A*

- *positiv definit, falls $Q_A(\mathbf{x}) > 0$*
- *positiv semidefinit, falls $Q_A(\mathbf{x}) \geq 0$*
- *negativ definit, falls $Q_A(\mathbf{x}) < 0$ (oder falls $-A$ positiv definit ist)*
- *negativ semidefinit, falls $Q_A(\mathbf{x}) \leq 0$ (oder falls $-A$ positiv semidefinit ist)*

für alle Vektoren $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gilt. Die Matrix A heisst indefinit, wenn es sowohl Vektoren $\mathbf{x}$ mit $Q_A(\mathbf{x}) > 0$ als auch Vektoren $\mathbf{y}$ mit $Q_A(\mathbf{y}) < 0$ gibt.

Versuchen Sie die folgenden Aussagen zu verstehen:

1. Für alle Matrizen A gilt $Q_A(\mathbf{0}) \;=\; \mathbf{0}^T A\, \mathbf{0} = 0$.
2. Eine positiv (bzw. negativ) definite symmetrische Matrix ist auch positiv (bzw. negativ) semidefinit. Die Umkehrung gilt nicht.
3. Wenden wir die quadratische Form auf einen Standardbasisvektor $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ an, erhalten wir den Diagonaleintrag a_{ii} (i-te Zeile und i-te Spalte) von A:

   $$\boxed{Q_A(\mathbf{e}_i) \;=\; \mathbf{e}_i^T A\, \mathbf{e}_i \;=\; a_{ii}}$$

   Daraus ergeben sich einige hilfreiche Implikationen (die Umkehrungen sind im Allgemeinen **falsch**!):

   - A positiv definit $\longrightarrow$ alle Diagonaleinträge > 0
   - A negativ definit $\longrightarrow$ alle Diagonaleinträge < 0
   - A positiv semidefinit $\longrightarrow$ alle Diagonaleinträge ≥ 0
   - A negativ semidefinit $\longrightarrow$ alle Diagonaleinträge ≤ 0
   - A hat sowohl positive als auch negative Diagonaleinträge $\longrightarrow$ A indefinit

4. Falls wir die Eigenwerte von A kennen sollten, kennen wir auch die Definitheit.

   Satz 1 (Sylvester, $n \times n$) *Eine symmetrische $n \times n$-Matrix A ist*

   - *positiv definit, falls alle Eigenwerte grösser Null sind;*
   - *positiv semidefinit, falls alle Eigenwerte grösser oder gleich Null sind;*
   - *negativ definit, falls alle Eigenwerte kleiner Null sind;*
   - *negativ semidefinit, falls alle Eigenwerte kleiner oder gleich Null sind;*
   - *indefinit, falls positive und negative Eigenwerte existieren.*

2.1 Hurwitz für $(n \times n)$-Matrizen

Wir betrachten die symmetrische (2×2)-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Können wir anhand der Matrixeinträge eine Aussage über die Definitheit von A machen?

Satz 2 (Hurwitz, 2×2) *Eine symmetrische (2×2)-Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

ist genau dann

- *positiv definit, wenn sowohl $a > 0$ als auch $\det(A) > 0$;*
- *negativ definit, wenn sowohl $a < 0$ als auch $\det(A) > 0$;*
- *indefinit, wenn $\det(A) < 0$.*

Beweisskizze: Wir beweisen die Behauptung nur für den Fall $a \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} Q_A(\mathbf{x}) &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a\, x_1^2 + 2\, b\, x_1\, x_2 + c\, x_2^2 \\ &= a \left(x_1^2 + 2\, \frac{b}{a}\, x_1\, x_2 \right) + c\, x_2^2 \\ &= a \left(x_1^2 + 2 \frac{b}{a}\, x_1\, x_2 + \left(\frac{b}{a}\, x_2 \right)^2 - \left(\frac{b}{a}\, x_2 \right)^2 \right) + c\, x_2^2 \\ &= a \left(\left(x_1 + \frac{b}{a}\, x_2 \right)^2 - \frac{b^2}{a^2}\, x_2^2 \right) + c\, x_2^2 \\ &= a \left(x_1 + \frac{b}{a}\, x_2 \right)^2 - \frac{b^2}{a}\, x_2^2 + c\, x_2^2 \\ &= \underbrace{a \left(x_1 + \frac{b}{a}\, x_2 \right)^2}_{\geq 0} + \left(c - \frac{b^2}{a} \right) \underbrace{x_2^2}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Wann ist nun $Q_A(\mathbf{x})$ für <u>alle</u> $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ positiv? Genau dann, wenn die folgenden Kriterien erfüllt sind:

- $0 < a$ (setze $x_2 = 0$ und $x_1 \neq 0$)
- $0 < c - \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{ac - b^2}{a} = \dfrac{\det(A)}{a}$ (setze $x_1 = -\dfrac{b}{a}\, x_2$)

□

Verallgemeinerung Sei A eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Für alle $k = 1, 2, \dots, n$ definieren wir jeweils eine $(k \times k)$-Matrix A_k wie folgt

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

Das ist die quadratische Matrix aus der "linken oberen Eck" von A.
Wir bezeichnen die Determinante von A_k als den k-ten führenden Hauptminor von A.

Satz 3 (Hurwitz, $n \times n$) *Die symmetrische Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn für alle führenden Hauptminoren*

$$\det(A_k) > 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

gilt.

Bemerkung:

- Es müssen also n Determinanten berechnet werden.
- A ist negativ definit, wenn $-A$ positiv definit ist.
  Achtung: Das heisst **nicht**, dass $\det(A_k) < 0$ für alle k.

Beispiel 2.1 *Die Matrix* $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ *ist positiv definit, denn für die führenden Hauptminoren gilt:*

$$\det(A_1) = \det(4) = 4 > 0$$

$$\det(A_2) = \det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 12 > 0$$

$$\det(A_3) = \det\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 60 > 0$$

2.2 Semi-Hurwitz für $(n \times n)$-Matrizen

Achtung:

Man kann im Satz von Hurwitz nicht einfach $>$ durch $\geq$ ersetzen und dann auf positiv semidefinit schliessen!!!!

Beispiel 2.2 *Für die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt offensichtlich $a = 0 \geq 0$ *und* $\det(A) = 0 \geq 0$*!! Ist A positiv semidefinit?? Nein!!*

Sei A eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Es müssen alle $(k \times k)$-Untermatrizen von A überprüft werden, die aus A entstehen, wenn man jeweils die selben $n - k$ Spalten und Zeilen aus A streicht.

Die Determinanten dieser Matrizen nennt man die k-ten Hauptminoren von A.

Satz 4 (Semi-Hurwitz, $n \times n$**)** *Die symmetrische Matrix A ist genau dann positiv semidefinit, wenn alle Hauptminoren (einschliesslich führender Hauptminoren) von A grösser oder gleich Null sind.*

Bemerkung:

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt $a = 0 \geq 0$ und $\det(A) = 0 \geq 0$, aber $c = -1 < 0$!! A ist also nicht positiv semidefinit (was wir schon wussten).

Aufgabe 2.1 *Untersuchen Sie die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 6 \\ 9 & 6 & 45 \end{pmatrix}$$

auf positive Semidefinitheit. Ist A positiv definit?

Lösung: Die Matrix ist positiv semidefinit. Beweisen Sie das mit dem Kriterium von Hurwitz.

Falls Sie das quadratische Ergänzen beherrschen, können Sie auch einen direkten Beweis führen. Es gilt:

$$\begin{aligned} Q_A(\mathbf{x}) &= \underline{3x_1^2 + 18x_1x_3 + 45x_3^2} + 2x_2^2 + 12x_2x_3 \\ &= \underline{3(x_1+3x_3)^2 + 18x_3^2} + 2x_2^2 + 12x_2x_3 \\ &= 3(x_1+3x_3)^2 + \underline{18x_3^2 + 2x_2^2 + 12x_2x_3} \\ &= 3(x_1+3x_3)^2 + \underline{2(x_2+3x_3)^2} \end{aligned}$$

Natürlich ist dieser Term stets ≥ 0 und er ist genau gleich 0, wenn $x_1 + 3x_3 = 0$ und $x_2 + 3x_3 = 0$ gilt. Lösen wir dieses lineare Gleichungssystem (3 Unbekannte und 2 Gleichungen) erhalten wir für die Nullstellenmenge der quadratischen Form die Gerade:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3 Quadratische Approximation von Funktionen

3.1 Taylor-Polynome (Wiederholung)

In der Vorlesung Mathematik 1 hatten wir (genügend oft differenzierbare) reelle Funktionen $y = f(x)$ in der Nähe eines Punktes a durch das Taylor-Polynom $y = P_2(x)$ approximiert:

$$P_2(x) \quad = \quad f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} P_2(a) &= f(a) \\ P_2'(a) &= f'(a) \\ P_2''(a) &= f''(a) \end{aligned}$$

Insbesondere glauben wir, dass sich P_2 und f nahe bei a sehr ähnlich sind. Das quadratische Polynom P_2 sollte also die Krümmung von f nahe bei a (meist) recht gut beschreiben und wir können tatsächlich das wohl bekannte Kriterium zur Unterscheidung zwischen lokalen Maximalstellen und lokalen Minimalstellen ableiten.

Sei also a ein stationärer Punkt von f, d.h. $f'(a) = 0$. Dann gilt für alle x nahe bei a:

$$f(x) \;\approx\; P_2(x) \quad = \quad f(a) + \frac{f''(a)}{2}\underbrace{(x-a)^2}_{>0}$$

und man erkennt sofort:

- ist $f''(a) > 0$, so ist $\dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2 > 0$ und

  $$f(x) \quad \approx \quad f(a) + \underbrace{\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}_{>0} \;>\; f(a)$$

  für **alle** x nahe bei a. Also muss a eine lokale Minimalstelle sein.

- ist $f''(a) < 0$, so ist $\dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2 < 0$ und

  $$f(x) \quad \approx \quad f(a) + \underbrace{\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}_{<0} \;<\; f(a)$$

  für **alle** x nahe bei a. Also muss a eine lokale Maximalstelle sein.

- ist $f''(a) = 0$ können wir zunächst nichts aussagen! Wir müssten höhere Ableitungen von f untersuchen.

3.2 Verallgemeinerte Taylor-Polynome

Ziel: Eine genügend oft differenzierbare Funktion $y = f(x_1, x_2) = f(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ soll in der Nähe eines Punktes $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ durch eine quadratische Funktion $y = P(\mathbf{x})$ approximiert werden.

Beachte:

$$\mathbf{x} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T = (x_1 - a_1 \;\; x_2 - a_2)$$

Ansatz: Die allgemeine quadratische Funktion in zwei Variablen lässt sich mit zunächst beliebigen reellen Zahlen $c_1, c_2, c_{11}, c_{12}, c_{21}$ und c_{22} (da wir diese Parameter in einem Vektor bzw. einer Matrix zusammenfassen wollen, wählen wir schon hier die Indexnotation) wie folgt beschreiben. Auch hier ist es praktischer, die Darstellung mit dem Entwicklungspunkt $\mathbf{a}$ zu wählen.

$$\begin{aligned}
& P(\mathbf{x}) \\
= \; & c_0 + c_1(x_1 - a_1) + c_2(x_2 - a_2) + c_{11}(x_1 - a_1)^2 + c_{22}(x_2 - a_2)^2 + 2c_{12}(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \\
= \; & c_0 + \underbrace{(c_1 \;\; c_2)}_{\mathbf{c}^T} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{pmatrix} + (x_1 - a_1 \;\; x_2 - a_2) \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{pmatrix} \\
= \; & c_0 + \mathbf{c}^T \, (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \, C \, (\mathbf{x} - \mathbf{a})
\end{aligned}$$

Forderungen: Im Punkt $\mathbf{a}$ sollen möglichst viele Ableitungen der Funktion f mit den entsprechenden Ableitungen von P übereinstimmen. Alle Ableitungen von P lassen sich leicht berechnen und wir verlangen:

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{a}) &= P(\mathbf{a}) &&= c_0 \\
f_{x_1}(\mathbf{a}) &= P_{x_1}(\mathbf{a}) &&= c_1 \\
f_{x_2}(\mathbf{a}) &= P_{x_2}(\mathbf{a}) &&= c_2 \\
f_{x_1x_1}(\mathbf{a}) &= P_{x_1x_1}(\mathbf{a}) &&= 2c_{11} \\
f_{x_2x_2}(\mathbf{a}) &= P_{x_2x_2}(\mathbf{a}) &&= 2c_{22} \\
f_{x_1x_2}(\mathbf{a}) &= P_{x_1x_2}(\mathbf{a}) &&= 2c_{12} \\
f_{x_2x_1}(\mathbf{a}) &= P_{x_2x_1}(\mathbf{a}) &&= 2c_{12}
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich sofort die folgende Beschreibung der quadratischen Approximation einer Funktion f. Alle Parameter im allgemeinen Ansatz lassen sich durch die partiellen Ableitungen von f an der Stelle $\mathbf{a}$ ausdrücken.

Satz 5 *Für die quadratische Approximation der Funktion f an der Stelle $\mathbf{a}$ gilt:*

$$\boxed{P(\mathbf{x}) \;=\; f(\mathbf{a}) + \begin{pmatrix} f_{x_1}(\mathbf{a}) \\ f_{x_2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}^T (\mathbf{x}-\mathbf{a}) + (\mathbf{x}-\mathbf{a})^T \; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_1x_2}(\mathbf{a}) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_2x_2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} (\mathbf{x}-\mathbf{a})}$$

Der Vektor

$$\mathbf{grad}\; f(\mathbf{a}) \;=\; \begin{pmatrix} f_{x_1}(\mathbf{a}) \\ f_{x_2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

heisst der <u>Gradient</u> der Funktion f im Punkt a. Die Matrix

$$H_f(\mathbf{a}) \;=\; \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_1x_2}(\mathbf{a}) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_2x_2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

heisst die <u>Hesse-Matrix</u> der Funktion f im Punkt a.

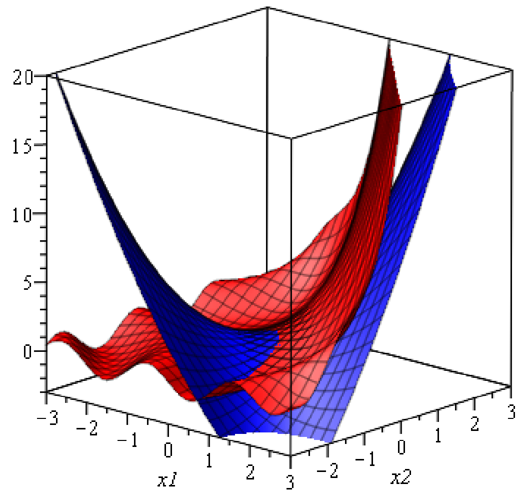
Beachte:

Für die uns interessierenden Funktionen gilt überall $f_{x_1x_2} = f_{x_2x_1}$, die Hesse-Matrix ist also symmetrisch.

Beispiel 3.1 *Die quadratische Approximation der Funktion $f(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2} + \sin(x_1x_2)$ an der Stelle $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist*

$$P(\mathbf{x}) \;=\; 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \;=\; 1 + x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

Graph von f (rot) und Graph von P (blau)



Aufgabe 3.1 *Bestimmen Sie die quadratische Approximation der Funktion* $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^{1/4} x_2^{3/4}$ *an der Stelle* $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

$$P(\mathbf{x}) = 1 + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} + (x_1 - 1, x_2 - 1)\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3/16 & 3/16 \\ 3/16 & -3/16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$$

3.3 Definitheit und lokale Extremalstellen

Satz 6 *Sei*

- $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen,*
- $f : D \to \mathbb{R}$ *eine zweimal stetig differenzierbare Funktion,*
- $\mathbf{a} \in D$ *ein stationärer Punkt von* f,
- $H_f(\mathbf{a})$ *die Hesse-Matrix von* f *in* $\mathbf{a}$

Dann gilt:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} H_f(\mathbf{a}) \text{ positiv definit} & \Longrightarrow & \mathbf{a} \text{ ist lokale Minimalstelle} \\[1em] H_f(\mathbf{a}) \text{ negativ definit} & \Longrightarrow & \mathbf{a} \text{ ist lokale Maximalstelle} \\[1em] H_f(\mathbf{a}) \text{ indefinit} & \Longrightarrow & \mathbf{a} \text{ ist Sattelpunkt} \end{array}}$$

Beweisidee:

Wir benutzen das 2-te Taylor-Polynom von f in $\mathbf{a}$ und beachten, dass $\mathbf{a}$ ein stationärer Punkt ist, also $\mathbf{grad} f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ gilt. Der Funktionswertunterschied kann recht gut durch die quadratische Form des Taylor-Poynoms beschrieben werden:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) &\approx P_2(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) \\ &= \frac{1}{2}\,(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T\, H_f(\mathbf{a})\;(\mathbf{x}-\mathbf{a}) \end{aligned}$$

Genauer genommen gilt in einer kleinen Umgebung U von $\mathbf{a}$ (mit einem nicht besprochenen Zwischenwertsatz):

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\,(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T\, H_f(\mathbf{a}^\star)\;(\mathbf{x}-\mathbf{a})$$

mit einem Punkt $\mathbf{a}^\star$ zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{a}$. Da alle zweiten partiellen Ableitungen stetig sind, ändert sich auch $H_f(\mathbf{x})$ stetig in allen Variablen. Insbesondere können wir die Umgebung U so wählen, dass die Matrix $H_f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in U$ die selbe Definitheit (positiv definit, negativ definit bzw. indefinit) wie $H_f(\mathbf{a})$ hat. In dieser Umgebung U von $\mathbf{a}$ ist dann die rechte Seite der obigen Gleichung stets positiv, negativ bzw. positiv und negativ. Das bedeutet für alle $\mathbf{x} \in U$ somit

- $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) \geq 0$ oder $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$ und $\mathbf{a}$ ist lokale Minimalstelle
- $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) \leq 0$ oder $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ und $\mathbf{a}$ ist lokale Maximalstelle bzw.
- $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})$ ist sowohl positiv als auch negativ und $\mathbf{a}$ ist Sattelpunkt.

$\square$

Spezialfall $n = 2$ Sei $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T$ ein stationärer Punkt der zweimal stetig differenzierbaren Funktion f. Für die Hessematrix gilt dann

$$H_f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_1x_2}(\mathbf{a}) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_2x_2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \longrightarrow \det H_f(\mathbf{a}) = f_{x_1x_1}(\mathbf{a}) f_{x_2x_2}(\mathbf{a}) - f_{x_1x_2}(\mathbf{a})^2.$$

Zusammen mit den Hurwitz-Kriterien für 2×2-Matrizen folgt dann

$\det H_f(\mathbf{a}) > 0$ und $f_{x_1x_1}(\mathbf{a}) > 0$	$\Longrightarrow$	$H_f(\mathbf{a})$ pos. def.	$\Longrightarrow$	$\mathbf{a}$ ist lokale Minimalstelle
$\det H_f(\mathbf{a}) > 0$ und $f_{x_1x_1}(\mathbf{a}) < 0$	$\Longrightarrow$	$H_f(\mathbf{a})$ neg. def.	$\Longrightarrow$	$\mathbf{a}$ ist lokale Maximalstelle
$\det H_f(\mathbf{a}) < 0$	$\Longrightarrow$	$H_f(\mathbf{a})$ indef.	$\Longrightarrow$	$\mathbf{a}$ ist Sattelpunkt

4 Übungsaufgaben

1. Berechnen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

die quadratische Form Q_A und bestimmen sie die Werte $Q_A(\mathbf{x})$ für die Vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf ihre Definitheit:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 40 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 40 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ j) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Bestimmen Sie die quadratische Approximation der Funktion

$$f(\underbrace{x_1}_{x}, \underbrace{x_2}_{y}) = x\sin(x) + y\cos(y)$$

an den Stellen (a) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und (b) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. (a) Berechnen Sie mit Hilfe der Lagrange-Methode eine mögliche Extremalstelle $(x^\star, y^\star)$ des folgenden Optimierungsproblems:
   Maximiere die Zielfunktion $f(x,y) = 8\ln(x) + 2\ln(y)$ unter der Nebenbedingung $\phi(x,y) = 2x + y - 5 = 0$.

   (b) Berechnen Sie **grad** $f(x^\star, y^\star)$ und **grad** $\phi(x^\star, y^\star)$ und interpretieren Sie das Resultat an Hand einer Graphik.

5. Sei $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine beliebige (nicht notwendigerweise symmetrische) (2×2)-Matrix und $A = \frac{1}{2}(B + B^T)$. Zeigen Sie:

   (a) A ist symmetrisch und

   (b) $Q_A = Q_B$, d.h. beide Matrizen beschreiben die selbe quadratische Form.

Lösungen einiger Übungsaufgaben

1. $Q_A(\mathbf{x}) \;=\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$ und die Auswertungen der quadratischen Form an den drei gegebenen Punkten sind 1, 13 und 5.

2. a) indefinit b) positiv semidefinit c) negativ semidefinit d) indefinit
   e) positiv semidefinit f) positiv definit g) positiv definit h) indefinit
   i) positiv semidefinit j) positiv definit

3. Zunächst gilt für die partiellen Ableitungen der Funktion $f(\mathbf{x}) = f(x, y)$:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= x\sin(x) + y\cos(y) \\
f_x(x,y) &= \sin(x) + x\cos(x) \\
f_y(x,y) &= \cos(y) - y\sin(y) \\
f_{xx}(x,y) &= 2\cos(x) - x\sin(x) \\
f_{yy}(x,y) &= -2\sin(y) - y\cos(y) \\
f_{xy}(x,y) &= 0 \\
f_{yx}(x,y) &= 0
\end{aligned}$$

   (a)

$$P(\mathbf{x}) \;=\; P(x,y) \;=\; 0 + (0,1)\,\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

   (b)

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{x}) \;=\; P(x,y) \;&=\; \cos(1) + (0, \cos(1) - \sin(1))\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} \\
&\quad +(x, y-1)\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2\sin(1) - \cos(1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4. **Musterlösung**

   gegeben:

Zielfunktion	$f(x,y) =$	$8\ln(x) + 2\ln(y)$	
Nebenbedingung	$\phi(x,y) =$	$2x + y - 5$	$= 0$

   gesucht: Mögliche Extremalstellen

   Lösung: Für die Lagrange-Funktion $F(x, y, \lambda)$ und deren partielle Ableitungen gilt:

$$F(x,y,\lambda) \;=\; 8\ln(x) + 2\ln(y) - \lambda(2x + y - 5)$$

$$\begin{aligned}
F_x(x,y,\lambda) &= 8\frac{1}{x} - 2\lambda \\
F_y(x,y,\lambda) &= 2\frac{1}{y} - \lambda \\
F_\lambda(x,y,\lambda) &= -(2x + y - 5)
\end{aligned}$$

Setzen wir die drei partiellen Ableitungen gleich Null, multiplizieren die erste Gleichung mit x und die zweite Gleichung mit y erhalten wir das folgende System von drei Gleichungen für drei Unbekannte.

$$\begin{array}{lrcll} I & 8-2x\lambda & = & 0 & \\ II & 2-y\lambda & = & 0 & \Longleftrightarrow \quad \lambda = \dfrac{2}{y} \\ III & 2x+y-5 & = & 0 & \end{array}$$

Setzen wir II in I ein, erhalten wir zunächst:

$$8-2x\left(\frac{2}{y}\right) = 8-4\frac{x}{y} = 0 \iff 8y-4x = 0 \iff x=2y.$$

Dann setzen wir diesen Zusammenhang zwischen x und y in Gleichung III ein:

$$2x+y-5 = 2(2y)+y-5 = 0 \iff y=1 \quad \text{und} \quad x=2.$$

Die mögliche Extremalstelle hat also die Koordinaten $(x^\star, y^\star) = (2,1)$. Wir bestimmen hier noch zusätzlich mit Gleichung II den Multiplikator $\lambda = \frac{2}{1} = 2$.

Für die Gradienten der Zielfunktion und der Nebenbedingung gilt nun weiterhin

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}\ f(x,y) &= \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/x \\ 2/y \end{pmatrix} \\ \mathbf{grad}\ f(2,1) &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{grad}\ \phi(x,y) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Man erkennt, dass die Gradienten von f und ϕ im Punkt $(2,1)$ auf einer Geraden liegen. Das ist allerdings nicht verwunderlich, denn in diesem Punkt gilt:

$$\begin{array}{lll} & f_x(2,1)-\lambda\phi_x(2,1)=0 & \text{und} \quad f_y(2,1)-\lambda\phi_y(2,1)=0 \\ \iff & f_x(2,1)=\lambda\phi_x(2,1) & \text{und} \quad f_y(2,1)=\lambda\phi_y(2,1) \\ \iff & \begin{pmatrix} f_x(2,1) \\ f_y(2,1) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \phi_x(2,1) \\ \phi_y(2,1) \end{pmatrix} & \\ \iff & \mathbf{grad}\ f(2,1) = \lambda\ \mathbf{grad}\ \phi(2,1) & \end{array}$$

5. -