Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Universität Basel 7

Mathematik 2
Dr. Thomas Zehrt

Zufallsvariablen 1:
Grundlagen

Benötigtes Vorwissen: Der Stoff der Vorlesung „Statistik" wird als bekannt vorausgesetzt, insbesondere das **Kapitel „Zufallsvariablen"**. Als Zusammenfassung kann dafür der erste Teil dieses Skriptes dienen. Weiterhin wird das Kapitel „Integration" aus der Vorlesung „Mathematik 1" als bekannt vorausgesetzt.

Inhaltsverzeichnis

1 Zufallsvariablen(Wiederholung)

Definition 1.1 *Sei (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Dann heisst eine Abbildung*

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine (reellwertige) Zufallsvariable, falls alle Ereignisse der Form

- $\{\omega \in \Omega \, : \, X(\omega) = x\} \subset \Omega$ *(alle $\omega \in \Omega$ die von X auf x abgebildet werden) für alle reellen Zahlen x und*
- $A_I = \{\omega \in \Omega \, : \, X(\omega) \in I\} \subset \Omega$ *(alle $\omega \in \Omega$ die von X in das Intervall I abgebildet werden) für alle Intervalle I*

Wahrscheinlichkeiten besitzen, die dem **Axiomsystem von Kolmogorov** *genügen.*

Oft wird man sich aber für die Wahrscheinlichkeit interessieren, dass $X(\omega)$ in einem bestimmten Intervall $I = [a, b]$ oder auch $I = (-\infty, b]$ liegt, also dass $X(\omega) \in I$ gilt. Dazu wählen wir die folgenden Schreibweisen:

$$\begin{aligned} P(X \in I) &= P(\ \{\omega \in \Omega \, : \, X(\omega) \in I\}\ ) \\ P(a \leq X \leq b) &= P(\ \{\omega \in \Omega \, : \, a \leq X(\omega) \leq b\}\ ) \\ P(X \leq b) &= P(\ \{\omega \in \Omega \, : \, X(\omega) \leq b\}\ ) \end{aligned}$$

Definition 1.2 *Sei X eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P). Dann heisst die Abbildung $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ mit*

$$\boxed{F(x) \ = \ P(X \leq x) \ = \ P(-\infty \leq X \leq x)}$$

Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen.

Satz 1 (Rechenregeln für Verteilungsfunktionen) *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt:*

$$\begin{aligned} P(X < a) &= P(X \leq a) - P(X = a) \ = \ F(a) - P(X = a) \\ P(X > a) &= 1 - F(a) \\ P(X \geq a) &= 1 - F(a) + P(X = a) \\ P(a < X \leq b) &= F(b) - F(a) \\ P(a < X < b) &= F(b) - F(a) - P(X = b) \\ P(a \leq X < b) &= F(b) - F(a) - P(X = b) + P(X = a) \end{aligned}$$

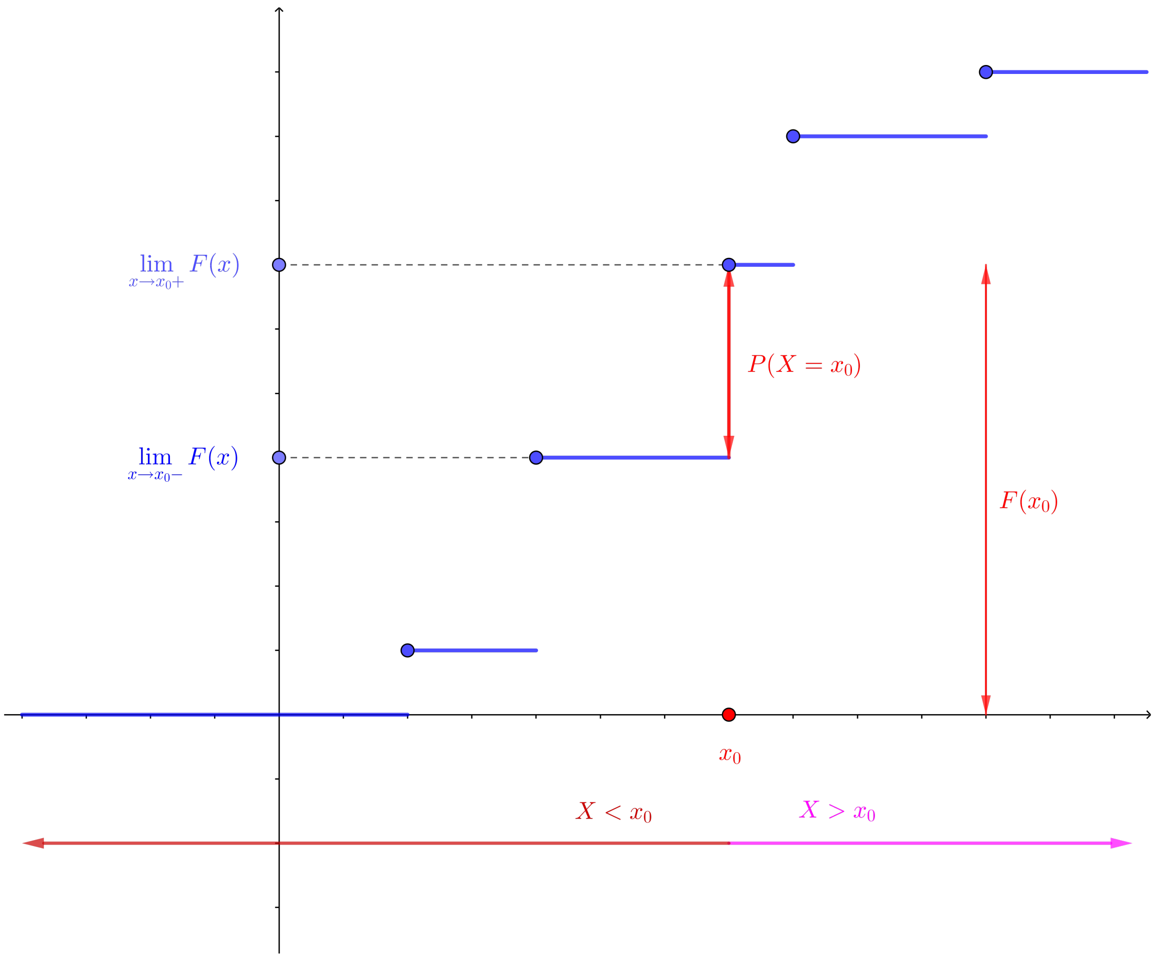
Satz 2 (Eigenschaften jeder Verteilungsfunktion $F = F_X$)

- *F ist monoton wachsend, nicht notwendigerweise streng monoton wachsend (diskrete Verteilung)*
- *In jedem Punkt x_0 existiert der rechts- und linksseitige Grenzwert*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0-} F(x) &= P(X < x_0) \\ \lim_{x \to x_0+} F(x) &= P(X \leq x_0) = F(x_0) \end{aligned}$$

- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- *Wenn F in x_0 eine Sprungstelle hat, so ist die Sprunghöhe (also die Differenz aus rechts- und linksseitigem Grenzwert) genau die Wahrscheinlichkeit dass das Ereignis $X = x_0$ eintritt:*

$$\lim_{x \to x_0+} F(x) - \lim_{x \to x_0-} F(x) = P(X \leq x_0) - P(X < x_0) = P(X = x_0).$$



Beispiel 1.1 *Wir betrachten den zweifachen Wurf eines fairen Würfels und wissen:*

$$\Omega \;=\; \{\, (\omega_1, \omega_2) \;:\; \omega_i \in \{1, \ldots, 6\} \,\}$$

und P ist die Gleichverteilung auf Ω. Wir definieren eine Zufallsvariable

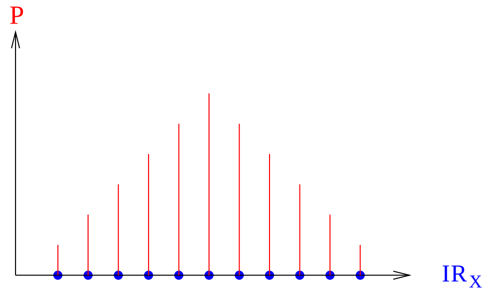
$$\begin{array}{rcl} X: \quad \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \longmapsto & \omega_1 + \omega_2 \end{array}$$

für alle $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$, d.h. X ist eine Funktion die jedem Ergebnis des Experimentes die Augensumme zuordnet. Es gilt zunächst $\mathbb{R}_X \;=\; \{\, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \,\}$ und z.B.

$$P(X = 4) \;=\; P(\; (3, 1) \text{ oder } (2, 2) \text{ oder } (1, 3)\;) \;=\; \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} \;=\; \frac{3}{36}$$

Damit ergibt sich letztendlich die folgenden Verteilung für X:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 2 \\ 1/36 & , \quad 2 \le x < 3 \\ 3/36 & , \quad 3 \le x < 4 \\ 6/36 & , \quad 4 \le x < 5 \\ 10/36, & \quad 5 \le x < 6 \\ 15/36, & \quad 6 \le x < 7 \\ 21/36, & \quad 7 \le x < 8 \\ 26/36, & \quad 8 \le x < 9 \\ 30/36, & \quad 9 \le x < 10 \\ 33/36, & \quad 10 \le x < 11 \\ 35/36, & \quad 11 \le x < 12 \\ 36/36, & \quad 12 \le x \end{cases}$$

Im folgenden unterscheiden wir zwei Typen von Zufallsvariablen

- diskrete Zufallsvariablen:

  $$\mathbb{R}_X = X(\Omega) \text{ ist eine abzählbare Menge, z.B. } 0, 1, 2, \ldots, 100$$

  (siehe Vorlesung „Statistik“, Kapitel 8)

- stetige Zufallsvariablen:

  $$\mathbb{R}_X = X(\Omega) \text{ ist eine überabzählbare Menge, z.B. } [0, 200].$$

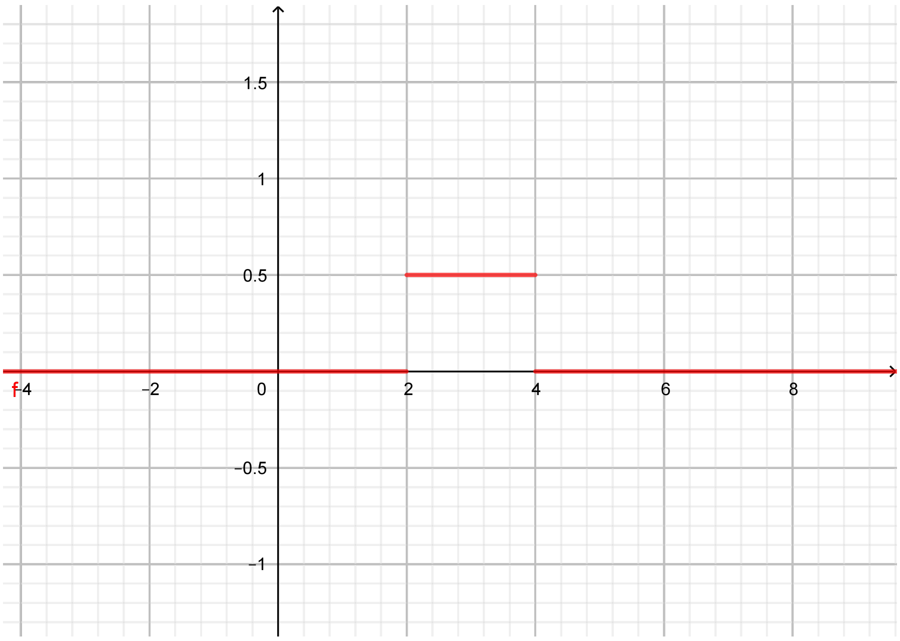
2 Stetige Zufallsvariablen

Definition 2.1 *Eine Funktion f heisst* <u>*Dichte*</u> *oder* <u>*Wahrscheinlichkeitsdichte*</u> *falls sie die folgenden Eigenschaften hat:*

1. $f(t) \geq 0$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$,
2. $f(t)$ *ist stetig bis auf abzählbar viele Punkte,*
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1.$

Beispiel 2.1 *Die Funktion*

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & t \in [2,4] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

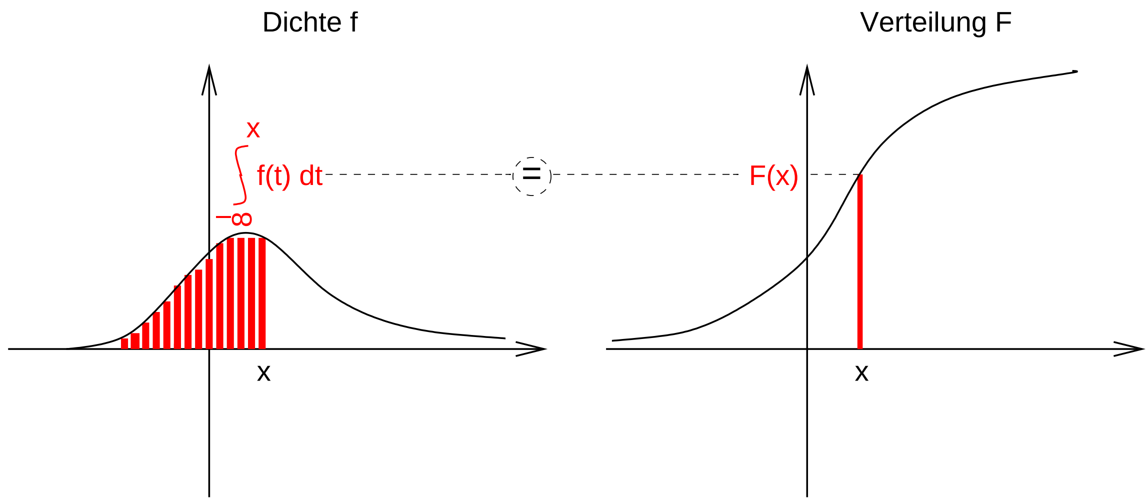


ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte, denn

- *sie nimmt keine negativen Werte an,*
- *sie ist fast überall stetig (ausser in den abzählbar vielen Punkten* 2 *und* 4*)*
- *der Flächeninhalt unter der Kurve ist genau* 1 *(da muss man nicht integrieren, aber man kann).*

Definition 2.2 *Eine Zufallsvariable X heisst stetig mit der Dichte f falls sich die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ in der folgenden Weise schreiben lässt:*

$$F(x) \;=\; P(-\infty < X \leq x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$



Merke: Der Flächeninhalt unter der Dichtefunktion (links von x) entspricht dem Funktionswert der Verteilungsfunktion an der Stelle x und dieser Flächeninhalt ist als die Wahrscheinlichkeit deutbar, mit der die Zufallsvariable X Werte nicht rechts von x realisiert.

F ist eine (spezielle) Stammfunktion von f und wie wir aus der Vorlesung Mathematik 1 bzw. aus der Schule wissen, gilt natürlich:

$$f(x) \;=\; F'(x) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\, P(x \leq X \leq x+h)$$

Satz 3 *Die Wahrscheinlichkeit, dass eine stetige Zufallsvariable einen beliebigen Wert x_0 annimmt, ist gleich Null:*

$$P(X = x_0) \;=\; 0$$

Beweis:

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und wir betrachten das Intervall $(x_0 - \delta, x_0]$. Dann gilt zunächst allgemein: $P(x_0 - \delta < X \leq x_0) = F(x_0) - F(x_0 - \delta)$ also

$$\begin{aligned} P(X = x_0) &= \lim_{\delta\to 0} P(x_0 - \delta < X \leq x_0) \\ &= \lim_{\delta\to 0} [F(x_0) - F(x_0 - \delta)] \\ &= F(x_0) - F(x_0) \;=\; 0. \end{aligned}$$

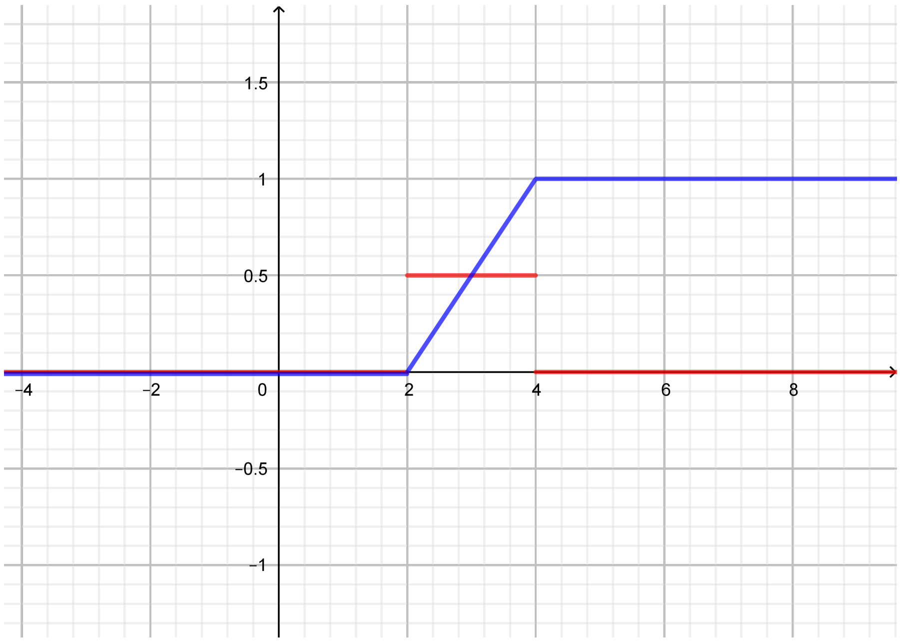
Bei stetigen Zufallsvariablen sind Punktereignisse $X = x_i$ nicht von Interesse!!
$\square$

Beispiel 2.2 *Sei wieder*

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & t \in [2,4] \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Die zugehörige Verteilungsfunktion ist dann

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{1}{2}x - 1 & x \in [2,4] \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$



Zusammenfassung:

Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert zwischen a und b annimmt	$P(a \leq X \leq b)$ $= P(a < X < b)$ $= P(a \leq X < b)$
Ausgedrückt durch die Verteilungsfunktion	$= F(b) - F(a)$
Ausgedrückt durch die Dichte:	$= \int_a^b f(t)\, dt$

3 Erwartungswert, Varianz und Quantil

Definition 3.1 (Zur Erinnerung) *X sei eine diskrete Zufallsvariable mit $\mathbb{R}_X = \{ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \}$. Dann ist der Erwartungswert $E(X) = \mu$ von X definiert durch*

$$\boxed{E(X) \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i \; \underbrace{P(X = x_i)}_{p_i}}$$

Die Varianz $Var(X) = \sigma^2$ von X (mit $\mu = E(X)$) ist:

$$\boxed{Var(X) \;=\; \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \; \underbrace{P(X = x_i)}_{p_i}}$$

Definition 3.2 *X sei eine stetige Zufallsvariable mit zugehöriger Dichte f. Dann ist der Erwartungswert $E(X) = \mu$ von X definiert durch*

$$\boxed{E(X) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} t \; f(t) \; dt}$$

Die Varianz $Var(X) = \sigma^2$ von X (mit $\mu = E(X)$) ist:

$$\boxed{Var(X) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mu)^2 \; f(t) \; dt}$$

Satz 4 (Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz)
Seien X, Y Zufallsvariablen und a, b, c reelle Zahlen. Dann gelten die folgenden Rechenregeln:

1. $E(aX + bY + c) = a\,E(X) + b\,E(Y) + c$
2. $Var(aX + b) = a^2\,Var(X)$
3. *Verschiebungssatz der Varianz:* $Var(X) \;=\; E(X^2) - [E(X)]^2$

Für manche Probleme ist es praktisch, den Begriff des Erwartungswertes weiter zu verallgemeinern.

Definition 3.3 *X sei eine stetige Zufallsvariable mit zugehöriger Dichte f. Dann sind für $r = 1, 2, \ldots$ die r-ten Momente definiert durch*

$$m_r \;=\; E(X^r) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} t^r\, f(t)\, dt$$

Aufgabe 3.1 *Die folgende Funktion sei die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Zufallsvariablen X.*

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & t \in [2,4] \\ 0 & sonst \end{cases}$$

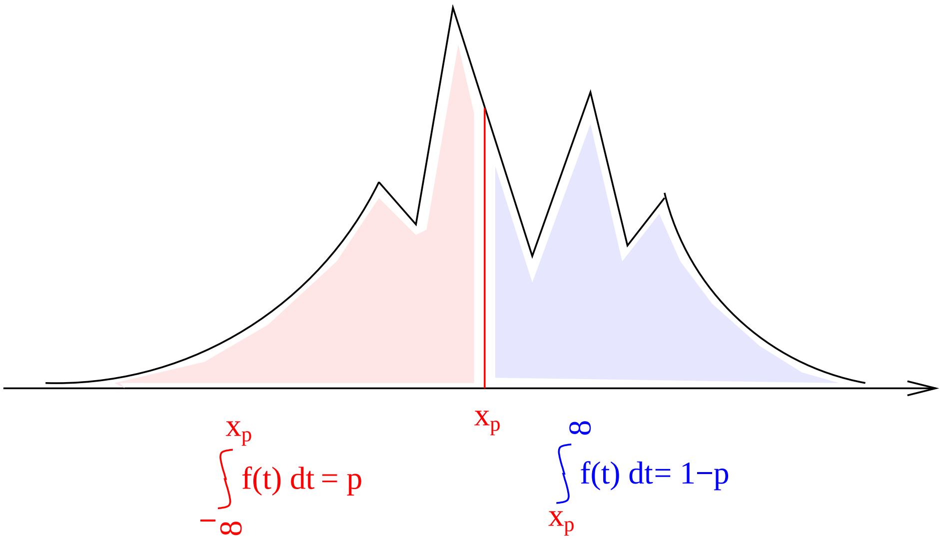
Bestimmen Sie Erwartungswert, die Varianz und die r-ten Momente von X.

Lösung:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} t\, f(t)\, dt \;=\; \int_{2}^{4} t\, \frac{1}{2}\, dt \;=\; 3 \\ Var(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (t-3)^2\, f(t)\, dt \;=\; \int_{2}^{4} (t-3)^2\, \frac{1}{2}\, dt \;=\; \frac{1}{3} \\ m_r &= \int_{-\infty}^{\infty} t^r\, f(t)\, dt \;=\; \frac{2^r}{r+1}(2^{r+1}-1) \end{aligned}$$

Definition 3.4 *Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Ein p-Quantil x_p $(0 < p < 1)$ ist der Wert der Verteilungsfunktion, für den $F(x_p) = p$ gilt.*

Man kann sich also x_p als den Wert einer Verteilung vorstellen, der die Wahrscheinlichkeitsmasse so teilt, dass links von x_p genau die Masse p und rechts von x_p genau die Masse $1 - p$ liegt.



Spezialfälle: unteres Quartil: $x_{0.25}$, Median, Zentralwert: $x_{0.5}$, oberes Quartil: $x_{0.75}$

Aufgabe 3.2 *Die folgende Funktion sei die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Zufallsvariablen X.*

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & t \in [2, 4] \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Bestimmen Sie $x_{0.25}$, $x_{0.5}$ und $x_{0.75}$.

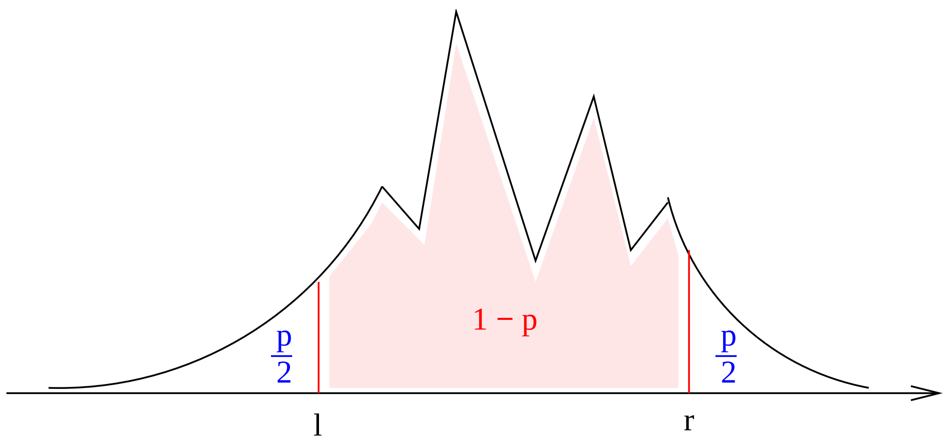
Lösung: Allgemein: $F(x_p) = \frac{1}{2}x_p - 1 = p$ oder $x_p = 2(p + 1)$

In der induktiven Statistik spielen p- und $(1-p)$-Quantile (zu $p = 0.025$, $p = 0.05$, ...) insbesondere in der Testtheorie eine wichtige Rolle.

Dort stellen diese Quantile Grenzen der Irrtumswahrscheinlichkeit dar, die die Grundlage für eine Testentscheidung bilden.

Aufgabe 3.3 *Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion f. Weiterhin sei eine Zahl p mit $0 < p < 1$ gegeben. Bestimmen Sie zwei Zahlen l und r, so dass*

$$P(l \leq X \leq r) \;\;=\;\; 1-p$$



In dieser Form ist die Frage nicht eindeutig zu beantworten. Deshalb verlangen wir noch, dass die restliche Wahrscheinlichkeit gleichmässig auf die beiden Aussenbereiche verteilt wird.

Lösung: Die Forderung $P(l \leq X \leq r) = 1-p$ ist mit der obigen Annahme gleichwertig zur Forderung:

$$p \;\;=\;\; P(-\infty \leq X \leq l) + P(r \leq X \leq \infty)$$

Verlangen wir nun eine gleichmässige Aufteilung der Wahrscheinlichkeit p auf diese beiden Aussenbereiche folgt:

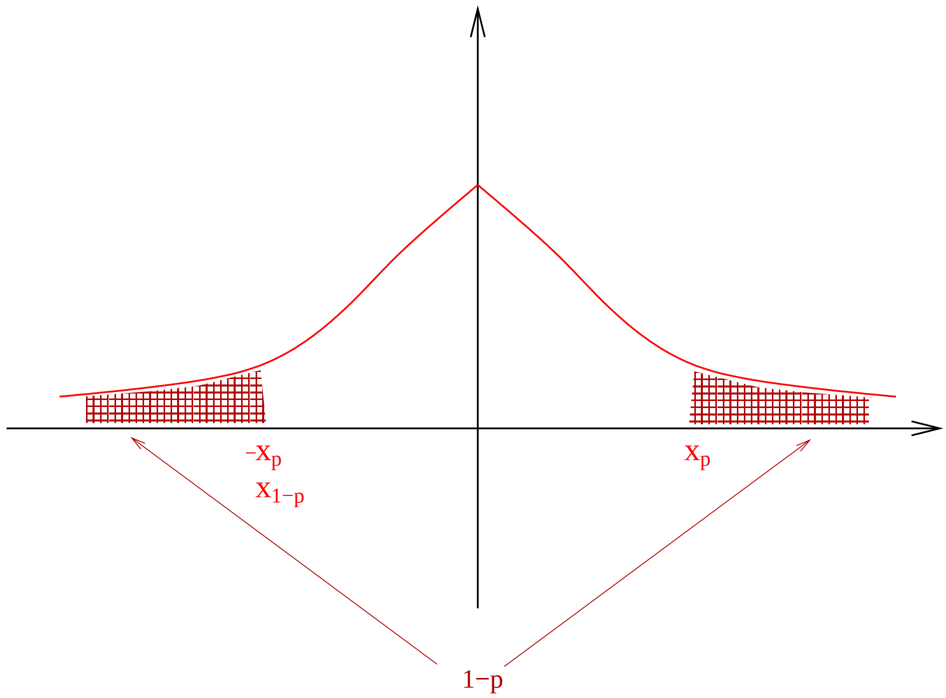
- $$\frac{p}{2} \;=\; P(-\infty \leq X \leq l) \;=\; F(l) \qquad \text{oder} \qquad l \;=\; x_{\frac{p}{2}} \qquad \text{das } \frac{p}{2} - \text{Quantil}$$

- $$\frac{p}{2} \;=\; P(r \leq X \leq \infty) \;=\; 1-F(r) \qquad \text{oder} \qquad r \;=\; x_{1-\frac{p}{2}} \qquad \text{das } (1-\frac{p}{2}) - \text{Quantil}$$

Falls X eine Zufallsvariable mit gerader Dichtefunktion f ist (d.h. es gilt $f(-t) = f(t)$ für alle t), so gilt stets

$$x_{1-p} \quad = \quad -x_p.$$

Das kann man (hoffentlich) leicht an folgender Zeichnung einsehen.



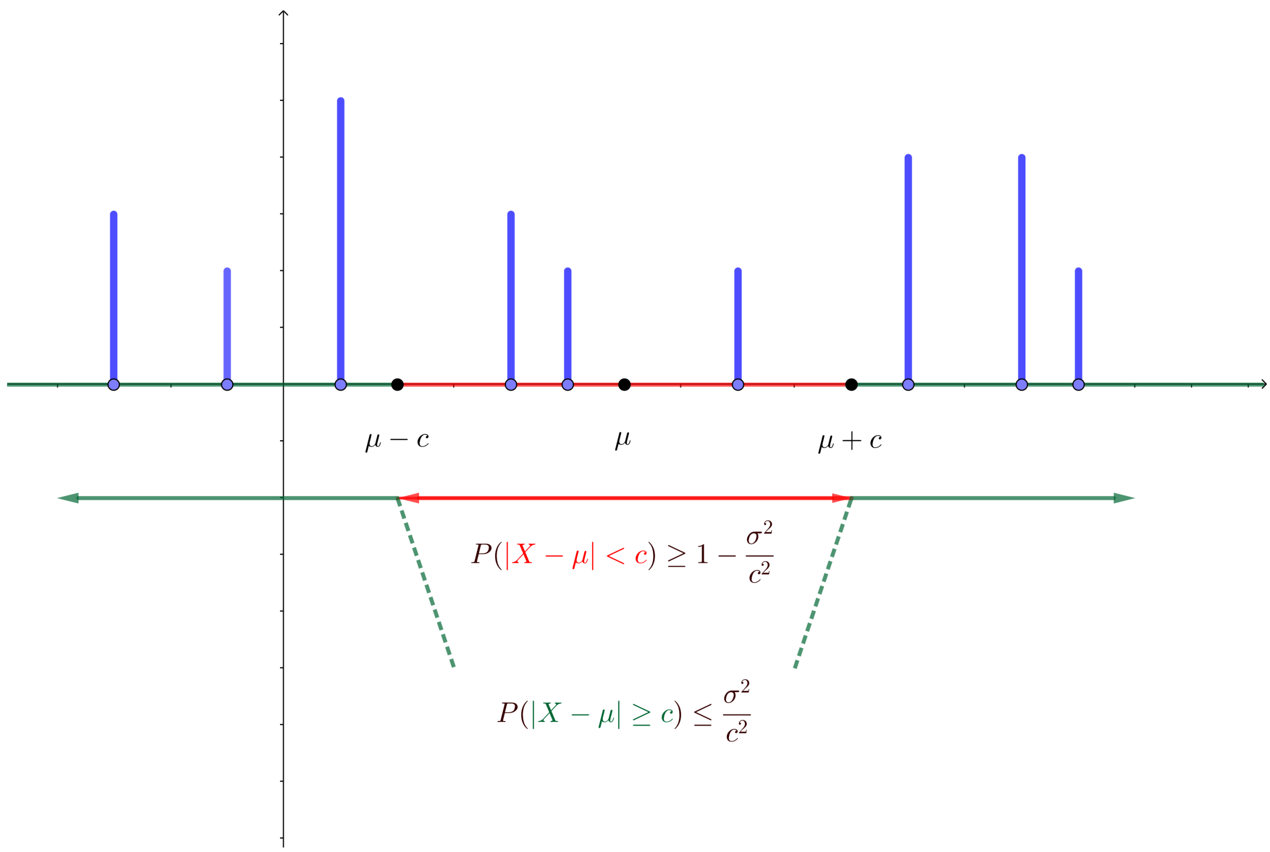
4 Die Ungleichung von Tschebyschev

Satz 5 (Die Ungleichung von Tschebyschev) *Sei X eine beliebige Zufallsvariable mit $\mu = E(X)$ und $\sigma^2 = Var(X)$. Dann gelten für jede positive Zahl c die folgenden beiden (äquivalenten) Ungleichungen:*

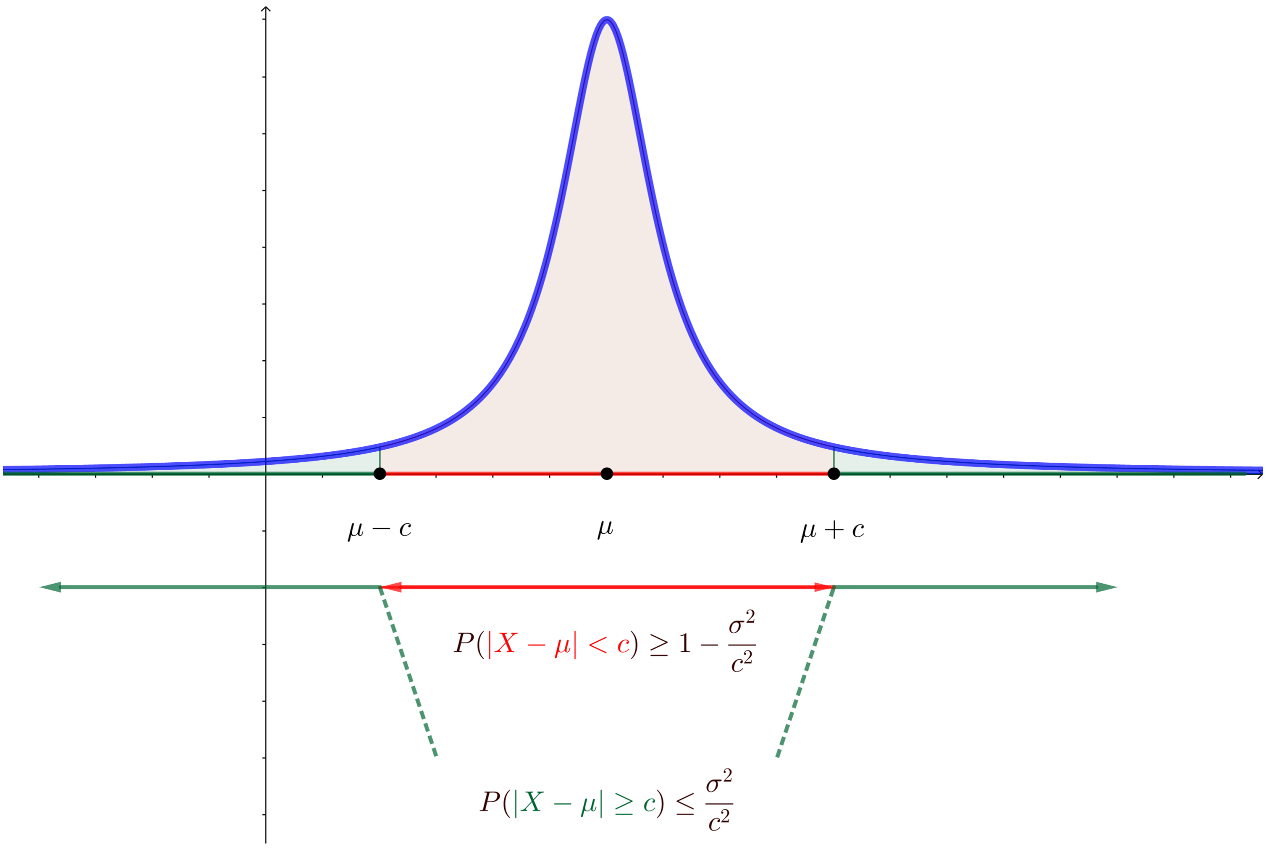
$$\boxed{P(\,|X-\mu| < c\,) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{c^2} \qquad \text{oder} \quad P(\,|X-\mu| \geq c\,) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}}$$

d.h. man kann relativ leicht die Wahrscheinlichkeit abschätzen, mit der X einen Wert innerherhalb (oder ausserhalb) des Intervalls $[\mu - c, \mu + c]$ annimmt.

Die Ungleichung von Tschebyschev für diskrete Zufallsvariablen



Die Ungleichung von Tschebyschev für stetige Zufallsvariablen



Beweis:

Wir beweisen die Ungleichung für stetige Zufallsvariablen. Der Beweis für diskrete Zufallsvariablen verläuft analog.

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (t-\mu)^2 \, f(t) \, dt \\
&\geq \int\limits_{\substack{t \ s.d. \\ |t-\mu| \geq c}} (t-\mu)^2 \, f(t) \, dt \\
&\geq \int\limits_{\substack{t \ s.d. \\ |t-\mu| \geq c}} c^2 \, f(t) \, dt \\
&= c^2 \, P(|X-\mu| \geq c)
\end{aligned}$$

und auflösen nach $P(|X-\mu| \geq c)$ ergibt die Ungleichung von Tschebyschev für den Aussenbereich. $\square$

Aufgabe 4.1 *Sei X eine stetige Zufallsvariable mit der Dichtefunktion*

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & t \in [2,4] \\ \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Wir wissen bereits, dass $E(X) = \mu = 3$ und $Var(X) = \sigma^2 = 1/3$ gilt. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(|X - \mu| < 1)$ mit Hilfe der Tschebyschev-Ungleichung. Können Sie die Wahrscheinlichkeit auch exakt bestimmen? (Selbstverständlich!)

Lösung: Es gilt nach einfacher Rechnung

$$P(|X-3| < 1) \;\geq\; 1 - \frac{\sigma^2}{c^2} \;=\; 1 - \frac{1/3}{1} \;=\; \frac{2}{3},$$

was nicht falsch ist. Natürlich kennen wir das exakte Ergebnis

$$P(|X-3| < 1) = P(2 < X < 4) = 1.$$

5 Standardisierung einer Zufallsvariablen

Definition 5.1 *Eine Zufallsvariable heisst standardisiert, wenn sie den Erwartungswert* 0 *und die Varianz* 1 *hat. Sei X eine Zufallsvariable. Dann heisst die Zufallsvariable*

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}}$$

Standardisierung von X.

Ich erinnere hier an das folgende (diskrete) Beispiel aus dem Kurs Statistik.

Beispiel 5.1 *Sei $X \sim B(2, 1/3)$, d.h. die Verteilung von X ist gegeben durch:*

0	1	2
$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$	$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

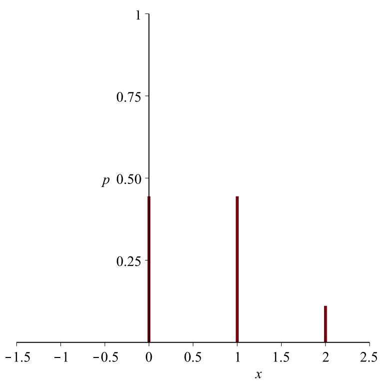
Es gilt: $E(X) = n \cdot p = \frac{2}{3}$, $Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = \frac{4}{9}$ und $\sqrt{Var(X)} = \frac{2}{3}$. Die Standardisierung von X ist somit

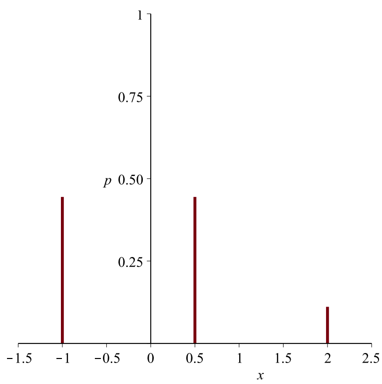
$$Z = \frac{X - 2/3}{2/3}$$

und hat die Verteilung:

$\frac{0-2/3}{2/3} = -1$	$\frac{1-2/3}{2/3} = \frac{1}{2}$	$\frac{2-2/3}{2/3} = 2$
$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

Links sehen Sie die Verteilung von X und rechts die Verteilung der Standardisierung von X. Die drei Wahrscheinlichkeiten sind unverändert. Aber die Positionen der Wahrscheinlichkeiten habe sich so verändert, dass einerseits der Erwartungswert (Schwerpunkt) die 0 *ist und andererseits die Varianz (Streuung) gleich* 1*. Man könnte sagen, dass sich die Verteilung* **qualitativ nicht** *verändert hat.*





Die Verteilung der Standardisierung einer **diskreten** Zufallsvariablen ist einfach zu konstruieren. Etwas komplizierter sieht das bei **stetigen** Zufallsvariablen aus, die über ihre Dichte- oder Verteilungsfunktion beschrieben sind. Der folgende Satz zeigt, wie man in diesem Fall die Dichtefunktion der Standardisierung konstruieren muss.

Satz 6 *Hat die stetige Zufallsvariable* X *mit* $\mu = E(X)$ *und* $\sigma = \sqrt{Var(X)}$ *die Dichtefunktion* f_X *und die Verteilungsfunktion* F_X*, so hat* $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ *die Dichtefunktion* $f_Z(x) = \sigma \cdot f_X(\mu + \sigma \cdot x)$*.*

Beweis: Es gilt

$$F_Z(x) \;=\; P\left(Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \leq x\right) \;=\; P(X \leq \mu + \sigma \cdot x) \;=\; F_X(\mu + \sigma \cdot x).$$

Durch Ableiten (Kettenregel) erhält man die Dichtefunktion.

$$f_Z(x) \;=\; \frac{d}{dx}F_Z(x) \;=\; \frac{d}{dx}F_X(\mu + \sigma \cdot x) \;=\; \sigma \cdot f_X(\mu + \sigma \cdot x).$$

$\square$

6 Übungsaufgaben

1. Eine stetige Zufallsvariable X besitze folgende Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 2 \\ -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3 & \text{für } 2 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{für } x > 4 \end{cases} .$$

   (a) Bestimmen Sie die Dichtefunktion der Zufallsvariablen X.

   (b) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $Var(X)$.

2. Gegeben sei die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 2t - 4 & \text{für } 2 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

   (a) Zeigen Sie, dass f eine Dichtefunktion ist.

   (b) Ermitteln Sie die zugehörige Verteilungsfunktion.

   (c) Bestimmen Sie $x_{0.25}$, $x_{0.5}$ und $x_{0.75}$.

3. (a) X sei eine stetige Zufallsvariable mit folgender Dichtefunktion

$$f(t) = \begin{cases} ct & \text{für } 1 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

   Für welchen Wert der Konstanten c ist die oben genannte Funktion tatsächlich eine korrekte Dichtefunktion?

   (b) Setzen Sie den entsprechenden Wert für c ein und bestimmen Sie $P(X > 2)$.

4. Von einer stetigen Zufallsvariablen X sei nur bekannt, dass sie den Erwartungswert 15 und die Varianz 4 besitzt.

   (a) Wie gross ist $P(10 \leq X \leq 20)$ mindestens?

   (b) Bestimmen Sie das kleinste, symmetrisch um 15 gelegene Intervall der Form $[15 - c, 15 + c]$, in welches mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.9 die Werte von X fallen.