Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum 10
Universität Basel

Mathematik 2 Zufallsvariablen 4:
Dr. Thomas Zehrt 2-dimensionale Zufallsvektoren

Benötigtes Vorwissen: Der Stoff der Vorlesung ,,Statistik" wird als bekannt vorausgesetzt, insbesondere das Kapitel **,,Zufallsvariablen"**. Als Zusammenfassung kann dafür der erste Teil dieses Skriptes dienen. Weiterhin wird der Stoff aus der Vorlesung ,,Mathematik 1", insbesondere die Kapitel über Integralrechnung, benötigt.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Gemeinsame Verteilung und Randverteilungen

Natürlich können bei einem Zufallsexperiment mit Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) gleichzeitig zwei (oder auch mehrere) durch den Ausgang ω bestimmte Zahlenwerte von Interesse sein (z.B. Körpergrösse und Gewicht einer zufällig ausgewählten Person). Dem Ergebnis ω des Experimentes werden somit zwei reelle Zahlen $X(\omega)$ und $Y(\omega)$ zugeordnet und wir haben damit zwei Abbildungen

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad Y : \Omega \to \mathbb{R}$$

F_X und F_Y seien die entsprechenden Verteilungsfunktionen.

Definition 1.1 *Wir bezeichnen (X, Y) als 2-dimensionalen Zufallsvektor mit den Komponenten X und Y. Die gemeinsame Verteilungsfunktion von (X, Y) ist dann*

$$\boxed{F(x, y) \;=\; P(\,(X \le x) \cap (Y \le y)\,)}$$

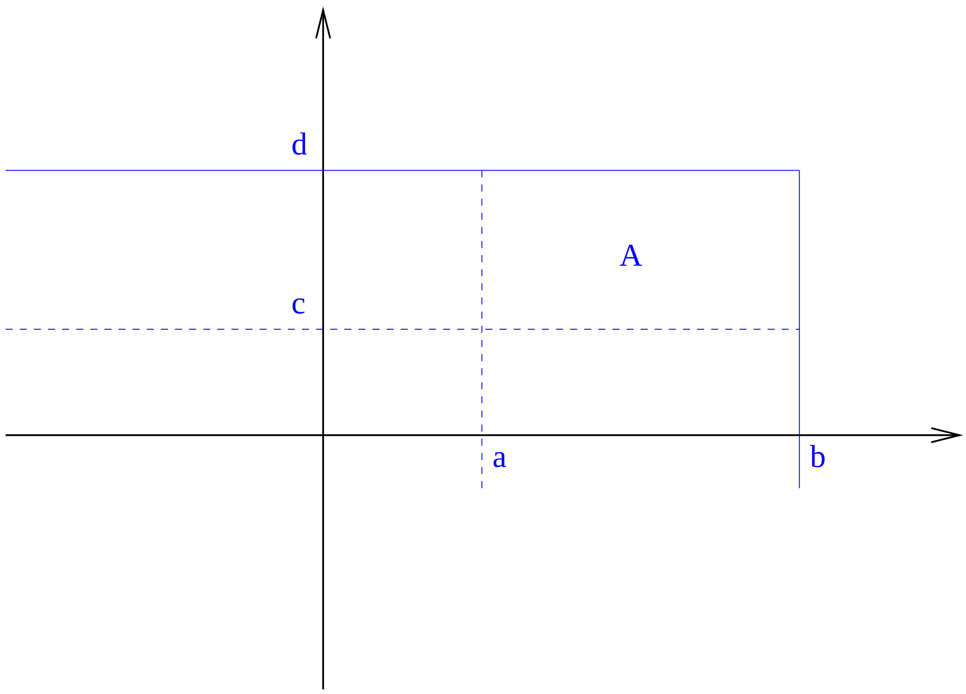
Dabei bezeichnet $P(\,(X \le x) \cap (Y \le y)\,)$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$\{\omega \in \Omega \;:\; X(\omega) \le x\} \cap \{\omega \in \Omega \;:\; Y(\omega) \le y\}.$$

Alle in der Praxis zu berechnenden Wahrscheinlichkeiten lassen sich meist problemlos auf Summen bzw. Differenzen von Werten der gemeinsamen Verteilungsfunktion zurückführen. Insbesondere kommen häufig Bereiche vor, die durch obere und untere Schranken für beide Zufallsvariablen bestimmt sind. Ganz anschaulich: das sind Rechtecke, also 2-dimensionale Intervalle.

Sei $A = (a, b] \times (c, d] \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck. So gilt

$$P(\; X \in (a, b] \cap Y \in (c, d]\;) \;=\; F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$



Die gemeinsame Verteilungsfunktion F von (X, Y) muss man von den Verteilungsfunktionen

$$F_X(x) \;=\; P(X \leq x) \quad \text{von } X \quad \text{und} \quad F_Y(y) \;=\; P(Y \leq y) \quad \text{von } Y$$

unterscheiden. Diese beiden Funktionen werden auch Randverteilungsfunktionen genannt. Sie sind wegen

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) &= P((X \leq x) \cap (Y < \infty)) &= \lim_{y \to \infty} F(x, y) \\ F_Y(y) &= P(Y \leq y) &= P((X < \infty) \cap (Y \leq y)) &= \lim_{x \to \infty} F(x, y) \end{aligned}$$

eindeutig durch die gemeinsame Verteilungsfunktion bestimmt. Umgekehrt kann man die gemeinsame Verteilung im allgemeinen **nicht** alleine aus den beiden Randverteilungsfunktionen bestimmen, denn diese beschreibt

- die Verteilung von X,
- die Verteilung von Y und
- Abhängigkeiten zwischen den beiden Zufallsvariablen X und Y.

Definition 1.2 *Die Zufallsvariablen X und Y heissen unabhängig, falls für* **alle** $x \in \mathbb{R}_X$ *und* **alle** $y \in \mathbb{R}_Y$ *die Ereignisse $(X \leq x)$ und $(Y \leq y)$ unabhängig sind, also falls*

$$\boxed{F(x, y) \;=\; P(\,(X \leq x) \text{ und } (Y \leq y)\,) \;=\; P(\,X \leq x\,) \cdot P(\,Y \leq y\,) \;=\; F_X(x) \cdot F_Y(y).}$$

Falls die beiden Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind, gilt für alle x und y stets $P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) \;=\; P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y)$ also:

$$F(x, y) \;=\; F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

In diesem Fall kann also die gemeinsame Verteilung aus den beiden Randverteilungen bestimmt werden.

Beispiel 1.1 *Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit der Verteilungsfunktion $F := F_X = F_Y$ (identische Verteilung). Dann besitzt die Zufallsvariable $Max = \max(X, Y)$ die folgende Verteilungsfunktion F_{Max}:*

$$\begin{aligned} F_{Max}(x) &= P(Max \leq x) \;=\; P(\max(X, Y) \leq x) \;=\; P(X \leq x \cap Y \leq x) \\ &= P(X \leq x) \cdot P(Y \leq x) \;=\; (F(x))^2. \end{aligned}$$

Für die Zufallsvariable $Min = \min(X, Y)$ und deren Verteilungsfunktion F_{Min} gilt:

$$F_{Min}(x) \;=\; P(Min \leq x) \;=\; 1 - (1 - F(x))^2.$$

1.2 Abhängigkeit und Korrelation

Die Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen der Zufallsvariablen X und Y fasst man oft zum Vektor der Erwartungswerte

$$E\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X) \\ E(Y) \end{pmatrix}$$

und zur Kovarianzmatrix

$$Cov\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(Y,X) & Var(Y) \end{pmatrix}$$

zusammengefasst.

Sind X und Y nun zunächst beliebige (aber der Einfachheit halber **diskrete**) Zufallsvariablen. Dann gilt für den Erwartungswert der Zufallsvariablen $X \cdot Y$:

$$E(X \cdot Y) = \sum_i \sum_j x_i \cdot y_j \cdot P(X = x_i \text{ und } Y = y_j).$$

Falls nun X und Y unabhängig sind, können wir diesen Ausdruck vereinfachen:

$$\begin{aligned} E(X \cdot Y) &= \sum_i \sum_j x_i \cdot y_j \cdot P(X = x_i \text{ und } Y = y_j) \\ &= \sum_i \sum_j x_i \cdot y_j \cdot P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) \\ &= \sum_i \sum_j x_i \cdot P(X = x_i) \cdot y_j \cdot P(Y = y_j) \\ &= \left(\sum_i x_i \cdot P(X = x_i)\right) \cdot \left(\sum_j y_j \cdot P(Y = y_j)\right) \\ &= E(X) \cdot E(Y) \end{aligned}$$

Definition 1.3 *Seien X und Y zwei* **beliebige** *Zufallsvariablen mit den Erwartungswerten $\mu_X = E(X)$ und $\mu_Y = E(Y)$. Die Grösse*

$$\boxed{Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}$$

heisst Kovarianz zwischen X und Y. Der Korrelationskoeffizient von X und Y ist

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}}.$$

Weiterhin können wir mit Hilfe des Verschiebungssatzes die folgende allgemeine Rechnung vornehmen:

$$\begin{aligned}
Var(X+Y) &= E((X+Y)^2) - [E(X+Y)]^2 \\
&= E(X^2 + 2X \cdot Y + Y^2) - [E(X) + E(Y)]^2 \\
&= E(X^2) + 2\,E(X \cdot Y) + E(Y^2) - [E(X)]^2 - 2\,E(X)\,E(Y) - [E(Y)]^2 \\
&= \underbrace{E(X^2) - [E(X)]^2}_{=Var(X)} + \underbrace{E(Y^2) - [E(Y)]^2}_{=Var(Y)} + 2(\underbrace{E(X \cdot Y) - E(X)E(Y)}_{=:Cov(X,Y)}) \\
&= Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y)
\end{aligned}$$

Satz 1 (Rechenregeln für Erwartungswert, Varianz und Kovarianz)
Seien X, Y Zufallsvariablen und a, b, c reelle Zahlen. Dann gelten die folgenden Rechenregeln:

1. $E(aX + bY + c) = a\,E(X) + b\,E(Y) + c$
2. $Var(aX + b) = a^2\,Var(X)$
3. *Verschiebungssatz der Varianz:* $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
4. $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2Cov(X,Y)$

Sind X und Y zusätzlich **unabhängige** *Zufallsvariablen so gilt:*

$$\begin{aligned}
E(X \cdot Y) &= E(X) \cdot E(Y) \\
Var(X \pm Y) &= Var(X) + Var(Y) \\
Cov(X,Y) &= 0
\end{aligned}$$

Im allgemeinen ist es mit diesen Regeln relativ leicht, Erwartungswerte und Varianzen von Summen von (unabhängigen) Zufallsvariablen auszurechen. Viel mehr Aufwand muss man aber treiben, wenn man die Verteilung einer Summe von Zufallsvariablen bestimmen möchte.

Beispiel 1.2 *X und Y seien die beiden diskreten (unabhängigen) Zufallsvariablen mit den folgenden Verteilungen:*

k	$P(X=k)$
-1	$1/3$
1	$1/3$
2	$1/3$

k	$P(Y=k)$
-1	$1/5$
1	$4/5$

$$\begin{aligned} E(X) &= -1\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ E(Y) &= -1\cdot\frac{1}{5}+1\cdot\frac{4}{5} = \frac{3}{5} \\ E(X+Y) &= \frac{2}{3}+\frac{3}{5} \end{aligned}$$

Die Verteilung der Zufallsvariablen $X+Y$ ist:

k	$P(X+Y=k)$	$P(X+Y\leq k)$
-2	$1/15$	$1/15$
0	$5/15$	$6/15$
1	$1/15$	$7/15$
2	$4/15$	$11/15$
3	$4/15$	$15/15$

Die Verteilung der Zufallsvariablen $X\cdot Y$ ist:

k	$P(X\cdot Y=k)$	$P(X\cdot Y\leq k)$
-2	$1/15$	$1/15$
-1	$5/15$	$6/15$
1	$5/15$	$11/15$
2	$4/15$	$15/15$

Beispiel 1.3 *Schwieriger ist es Summen und Produkte unabhängiger stetiger Zufallsvariablen X und Y mit den zugehörigen Dichtefunktionen f_X und f_Y zu verstehen. Wir geben hier ohne Begründung die Dichtefunktionen der Zufallsvariablen $X+Y$ und $X\cdot Y$ an. Insbesondere können wir natürlich* **nicht** *einfach die Dichtefunktionen addieren oder multiplizieren!*

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx \\ f_{X\cdot Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y\left(\frac{z}{x}\right)\, \left|\frac{1}{x}\right|\, dx \end{aligned}$$

Unabhängigkeit und Unkorelliertheit Sind die beiden Zufallsvariablen X und Y unabhängig, so gilt auch $Cov(X,Y) = 0$ und somit auch $\rho_{XY} = 0$. Unabhängige Zufallsvariablen sind also stets unkorreliert!

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht! Unkorrelierte Zufallsvariablen können (nicht müssen) also durchaus abhängig sein.

Beispiel 1.4 *X sei stetig gleichverteilt auf dem Intervall $[-1,1]$ und $Y = X^2$. Die beiden Variablen sind unkorreliert, denn*

$$Cov(X,X^2) \;=\; E(X\cdot X^2) - E(X)E(X^2) \;=\; 0$$

Sowohl X als auch X^3 haben eine gerade Dichtefunktion (Graph symmetrisch zur y-Achse), also gilt $E(X^3) = E(X) = 0$.

Aber X und Y sind nicht unabhängig. Eigentlich möchte man schon der Definition von Y eine (allerdings kausale!) Abhängigkeit von X ansehen. Es fällt aber auch nicht schwer, zwei (stochastisch) abhängige Ereignisse zu finden:

$$0 \;=\; P(X^2 < 1/4 \mid X > 1/2) \;\neq\; P(X^2 < 1/4) \;=\; 1/2$$

2 Diskrete Zufallsvektoren

2.1 Gemeinsame Verteilung und Randverteilung

Sind die beiden Zufallsvariablen X und Y diskret, dann ist durch

$$P(x,y) \;=\; P(\,(X=x)\cap(Y=y)\,)$$

die Wahrscheinlichkeitsfunktion von (X,Y) gegeben. Nehmen die beiden Zufallsvariablen nur endlich viele Werte an, also

$$\begin{array}{rcl} X & \in & \{x_1, x_2, \ldots, x_l\} \\ Y & \in & \{y_1, y_2, \ldots, x_m\} \end{array}$$

und setzen wir

$$p_{jk} \;=\; P(x_j, y_k) \;=\; P(\,(X=x_j)\cap(Y=y_k)\,)$$

können wir die Verteilungstabelle von (X,Y) erstellen:

$$\begin{array}{|cc|cccccc|r|}
\hline
 & & & & & Y & & & \text{Vert.} \\
 & & y_1 & y_2 & \ldots & y_k & \ldots & y_m & \text{von } X \\
\hline
 & x_1 & p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1k} & \ldots & p_{1m} & p_{1\bullet} \\
 & x_2 & p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2k} & \ldots & p_{2m} & p_{2\bullet} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
X & x_j & p_{j1} & p_{j2} & \ldots & p_{jk} & \ldots & p_{jm} & p_{j\bullet} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & x_l & p_{l1} & p_{l2} & \ldots & p_{lk} & \ldots & p_{lm} & p_{l\bullet} \\
\hline
\text{Vert. von Y} & & p_{\bullet 1} & p_{\bullet 2} & \ldots & p_{\bullet k} & \ldots & p_{\bullet m} & n \\
\hline
\end{array}$$

In der letzten Spalte (bzw. Zeile) sieht man die Verteilung der Zufallsvariablen X (bzw. Y). Diese beiden Verteilungen werden auch als Randverteilungen von (X,Y) bezeichnet und es gilt:

- $p_{j\bullet} \;=\; P(X=x_j) \;=\; \sum\limits_{k=1}^{m} P(\,(X=x_j)\cap(Y=y_k)\,) \;=\; \sum\limits_{k=1}^{m} p_{jk}$
- $p_{\bullet k} \;=\; P(Y=y_k) \;=\; \sum\limits_{j=1}^{l} P(\,(X=x_j)\cap(Y=y_k)\,) \;=\; \sum\limits_{j=1}^{l} p_{jk}$

2.2 Bedingte Verteilungen

Aus der gemeinsamen Verteilung zweier (diskreter) Zufallsvariablen können die so genannten bedingten Verteilungen hergeleitet werden. Sie geben jeweils Auskunft über die Verteilung einer der beiden Variablen, falls die jeweils andere Variable einen ganz bestimmten Wert (sicher) angenommen hat.

Definition 2.1 *Seien X und Y diskrete Zufallsvariablen und (X, Y) der zugehörige Zufallsvektor. Die bedingte Verteilung von X gegeben $Y = y_k$ ist*

$$\boxed{f_{X|Y}(x_j|y_k) \;=\; P(X = x_j \mid Y = y_k) \;=\; \frac{P(X = x_j \;\cap\; Y = y_k)}{P(Y = y_k)} \;=\; \frac{p_{jk}}{p_{\bullet k}}}$$

für $j = 1, 2, \ldots, l$. Die bedingte Verteilung von Y gegeben $X = x_j$ ist

$$\boxed{f_{Y|X}(y_k|x_j) \;=\; P(Y = y_k \mid X = x_j) \;=\; \frac{P(X = x_j \;\cap\; Y = y_k)}{P(X = x_j)} \;=\; \frac{p_{jk}}{p_{j\bullet}}}$$

für $k = 1, 2, \ldots, m$.

Beispiel 2.1 *In einer Urne befinden sich 6 Kugeln, drei mit einer „1“, zwei mit einer „2“ und eine mit einer „3“. Nacheinander werden zwei Kugeln gezogen. Es seien*

$$X = \begin{cases} 1 & \textit{entsprechend Aufschrift} \\ 2 & \textit{auf der 1. gezogenen} \\ 3 & \textit{Kugel} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1 & \textit{entsprechend Aufschrift} \\ 2 & \textit{auf der 2. gezogenen} \\ 3 & \textit{Kugel} \end{cases}$$

Ziehen mit Zurücklegen

$$\begin{aligned} P(X=1) = \frac{1}{2} &= P(Y=1) \\ P(X=2) = \frac{1}{3} &= P(Y=2) \\ P(X=3) = \frac{1}{6} &= P(Y=3) \end{aligned}$$

Da die beiden Ziehungen unabhängig sind, folgt z.B.

$$\begin{aligned} p_{11} &= P(\,(X=1)\cap(Y=1)\,) &&= P(X=1)\cdot P(Y=1) &&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} &&= \frac{1}{4} \\ p_{12} &= P(\,(X=1)\cap(Y=2)\,) &&= P(X=1)\cdot P(Y=2) &&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} &&= \frac{1}{6} \\ & &&\vdots \end{aligned}$$

Insgesamt

		Y 1	2	3	*Vert. von X*
X	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
	3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
Vert. von Y		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	

An der Tabelle der gemeinsamen Verteilung kann man leicht erkennen, dass die beiden Zufallsvariablen unabhängig sind, denn jeder Eintrag im Inneren ist gleich dem Produkt der beiden zugehörigen Randeinträge.

Die bedingte Verteilung von X gegeben $Y = y_1 = 1$ ist

$$\left(\frac{p_{11}}{p_{\bullet 1}}, \frac{p_{21}}{p_{\bullet 1}}, \frac{p_{31}}{p_{\bullet 1}}\right) = \left(\frac{1/4}{1/2}, \frac{1/6}{1/2}, \frac{1/12}{1/2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

also hier gleich der Verteilung von X, da Y keinen stochastischen Einfluss auf X hat (unabhängig).

Ziehen ohne Zurücklegen *Die Bestimmung der gemeinsamen Verteilung ist hier etwas schwieriger, da die beiden Zufallsvariablen* **nicht** *unabhängig sind. Es gilt z.B.*

$$\begin{aligned}
p_{11} &= P(\,(X=1)\cap(Y=1)\,) &&= P(X=1)\cdot P(Y=1|X=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{5}\\
p_{12} &= P(\,(X=1)\cap(Y=2)\,) &&= P(X=1)\cdot P(Y=2|X=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{5}\\
&&&\vdots
\end{aligned}$$

Insgesamt

		Y 1	2	3	*Vert. von* X
	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$
X	2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$
	3	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	0	$\frac{1}{6}$
Vert. von Y		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	

Weiterhin ist:

$$E(X) = E(Y) = \frac{5}{3} \qquad \text{und} \qquad Var(X) = Var(Y) = \frac{5}{9}$$

$$\begin{aligned}
E(X\cdot Y) &= \frac{1\cdot1}{5}+\frac{1\cdot2}{5}+\frac{1\cdot3}{10}+\frac{2\cdot1}{5}+\frac{2\cdot2}{15}+\frac{2\cdot3}{15}\\
&\quad +\frac{3\cdot1}{10}+\frac{3\cdot2}{15}+3\cdot3\cdot0 = \frac{8}{3}\\
Cov(X,Y) &= E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y) = -\frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Die negative Kovarianz bedeutet hier, dass grosse Werte von X *mit eher kleinen Werten von* Y *auftreten.*

Die bedingte Verteilung von X *gegeben* $Y = y_1 = 1$ *ist*

$$\left(\frac{p_{11}}{p_{\bullet1}},\frac{p_{21}}{p_{\bullet1}},\frac{p_{31}}{p_{\bullet1}}\right) = \left(\frac{1/5}{1/2},\frac{1/5}{1/2},\frac{1/10}{1/2}\right) = \left(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$$

also hier ungleich der Verteilung von X*, da* Y *hier einen stochastischen Einfluss auf* X *hat (abhängig).*

3 Stetige Zufallsvektoren

3.1 Gemeinsame Dichte und Randdichte

Definition 3.1 *Ein 2-dimensionaler Zufallsvektor (X, Y) heisst stetig, wenn es eine nicht-negative reelle Funktion $f(x, y)$ gibt, so dass*

$$\boxed{F(x,y) \;=\; P(\,(X \leq x) \cap (Y \leq y)\,) \;=\; \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(s,t)\, ds\, dt.}$$

Die Funktion f heisst (gemeinsame) Dichtefunktion von (X, Y).

Die beiden Randdichten f_X und f_Y bzw. die Randverteilungsfunktionen F_X und F_Y sind

$$\boxed{\begin{array}{llll} f_X(x) \;=\; \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy & \qquad & F_X(x) \;=\; \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt \\ f_Y(y) \;=\; \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx & \qquad & F_Y(y) \;=\; \displaystyle\int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\, dt \end{array}}$$

Gauss-Vektoren Wir wollen uns hier noch eine besonders wichtige 2-dimensionale Verteilung etwas genauer ansehen.

Sei $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ ein (stetiger) Zufallsvektor. Wir setzen hier ausdrücklich **nicht** voraus, dass X_1 und X_2 unabhängig sind. Auch nutzen wir hier Indizes, also $X = X_1$ und $Y = X_2$, da man die Resultate dann so formulieren kann, dass sie sich so leicht auf Gauss-Vektoren grösserer Länge verallgemeinern lassen. Sei also

$$\sigma_{12} \;:=\; Cov(X_1, X_2) \qquad \text{und} \qquad \rho \;=\; \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_1 \sigma_2}.$$

Weiterhin seien

$$C \;=\; \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \quad \mu \;=\; \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad \text{und } \mathbf{x} \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

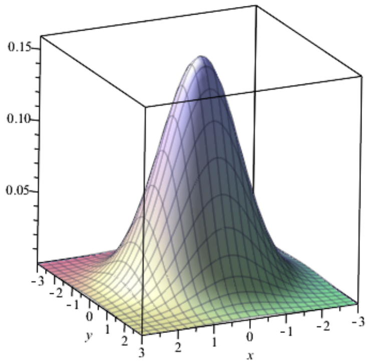
Definition 3.2 *Ein stetiger Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ heisst Gauss-Vektor, wenn die gemeinsame Dichtefunktion von $\mathbf{X}$ durch die folgende Funktion gegeben ist:*

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) \;=\; \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(C)}}\; e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \cdot C^{-1} \cdot (\mathbf{x}-\mu)}.$$

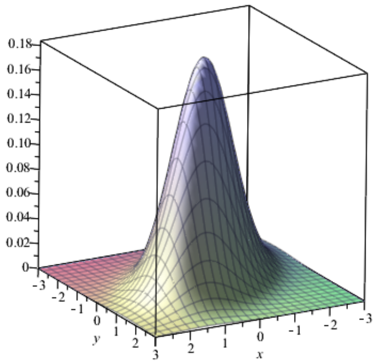
Wir schreiben dann auch $\mathbf{X} \sim N_2(\mu, C)$. Die obige Definition kann direkt auf Zufallsvektoren beliebiger Länge verallgemeinert werden.

Beispiel 3.1 *Wir wollen einige dieser Funktionen skizzieren. Wir setzen stets $\mu = (0, 0)$, denn eine Veränderung von μ verschiebt den Graphen von $f_{\mathbf{X}}$ (nur) parallel zur Grundebene.*

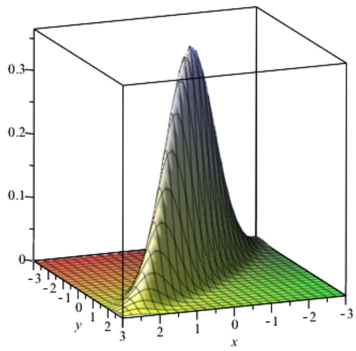
$\sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = 1,\ \rho = 0$



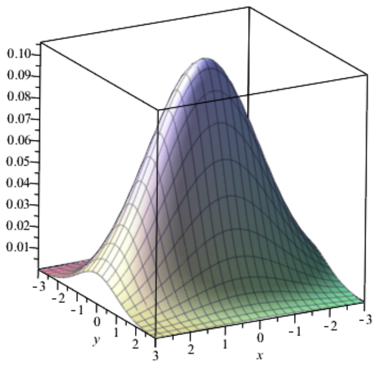
$\sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = 1,\ \rho = 0.5$



$\sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = 1,\ \rho = 0.9$



$\sigma_1 = 1.5,\ \sigma_2 = 1,\ \rho = 0$



Der Exponent der e-Funktion ist die quadratische Form

$$q(\mathbf{x}) \quad = \quad -\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \cdot C^{-1} \cdot (\mathbf{x}-\mu).$$

Expandiert man diese Form erhält man:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) \quad = \quad \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}.$$

Satz 2 *Die Randverteilungen von* $\mathbf{X} = (X_1, X_2) \sim N_2(\mu, C)$ *sind selbst wieder (eindimensionale) Normalverteilungen. Genauer gilt sogar* $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ *und* $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

Beweis:

Wir wollen nochmals ausdrücklich darauf hinweisen, dass der Satz für **alle** ρ gilt. Wir wollen den Beweis aber nur für den Fall $\rho = 0$ andeuten. In diesem Fall kann man die gemeinsame Verteilung in zwei Faktoren zerlegen, deren Gestalt wohlbekann sein sollte:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]} \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}}\right)}_{f_{X_1}(x_1)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}}\right)}_{f_{X_2}(x_2)} \end{aligned}$$

□

Hilfreich ist oft die so genannte Indikatorfunktion oder charakteristische Funktion einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathbb{I}_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & ,\mathbf{x} \in A \\ 0 & ,\mathbf{x} \notin A \end{cases}$$

Mit ihrer Hilfe kann man häufig Fallunterscheidungen bei der Definition bestimmter Funktione elegant vermeiden. So kann z.B. die Dichte der Exponentialverteilung mit Hilfe der passenden Indikatorfunktion einheitlich und ohne Fallunterscheidung geschrieben werden:

$$f_{Ex}(x) \;=\; \lambda\, e^{-\lambda x}\, \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$$

Beispiel 3.2 *Sei*

$$f(x,y) \;=\; \frac{1}{2} \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(x) \cdot \mathbb{I}_{[0,2]}(y) \;=\; \begin{cases} 1/2 & ,(x,y) \in [0,1] \times [0,2] \\ 0 & ,\ sonst \end{cases}$$

Für die Randdichte f_X ergibt sich für alle $x \in [0,1]$:

$$f_X(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy \;=\; \int_0^2 \frac{1}{2}\, dy \;=\; \left[\frac{1}{2} y\right]_{y=0}^{y=2} \;=\; 1.$$

und für die Randdichte f_Y ergibt sich für alle $y \in [0,2]$:

$$f_Y(y) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx \;=\; \int_0^1 \frac{1}{2}\, dx \;=\; \left[\frac{1}{2} x\right]_{x=0}^{x=1} \;=\; \frac{1}{2}.$$

Also gilt insgesamt

$$f_X(x) \;=\; \mathbb{I}_{[0,1]}(x) \qquad und \qquad f_Y(y) \;=\; \frac{1}{2}\, \mathbb{I}_{[0,2]}(y)$$

Für die Verteilungsfunktion gilt

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(s,t)\, ds\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2} \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(s) \cdot \mathbb{I}_{[0,2]}(t)\, ds\, dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{t=-\infty}^{t=y} \mathbb{I}_{[0,2]}(t) \left(\int_{s=-\infty}^{s=x} \mathbb{I}_{[0,1]}(s)\, ds \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{t=-\infty}^{t=y} \mathbb{I}_{[0,2]}(t) \Big[\, s \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(s)\, \Big]_{s=-\infty}^{s=x} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{t=-\infty}^{t=y} \mathbb{I}_{[0,2]}(t)\; x \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(x)\, dt \\
&= \frac{1}{2}\, x \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(x) \int_{t=-\infty}^{t=y} \mathbb{I}_{[0,2]}(t)\, dt \\
&= \frac{1}{2}\, x \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(x) \Big[\, t \cdot \mathbb{I}_{[0,2]}(t)\, \Big]_{t=-\infty}^{t=y} \\
&= \frac{1}{2}\, x \cdot y \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(x) \cdot \mathbb{I}_{[0,2]}(y)
\end{aligned}$$

Beispiel 3.3 *Sei*

$$f(x,y) \;=\; (x+y)\cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(x)\cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(y) \;=\; \begin{cases} x+y & ,(x,y)\in[0,1]\times[0,1] \\ 0 & ,\ \textit{sonst} \end{cases}$$

f ist tatsächlich eine Dichte, denn das Volumen zwischen dem Graphen von f und dem Rechteck $[0,1]\times[0,1]$ in der Grundebene ist:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\;dy\;dx \;&=\; \int_0^1\int_0^1 (x+y)\;dy\;dx \\
&=\; \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y)\;dy\right)\;dx \\
&=\; \int_0^1 \left[xy+\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1}\;dx \\
&=\; \int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}\right)\;dx \\
&=\; \left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right]_{x=0}^{x=1} \;=\; 1
\end{aligned}$$

Für die Randdichte f_X ergibt sich für alle $x\in[0,1]$:

$$\begin{aligned}
f_X(x) \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty} (x+y)\cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(x)\cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(y)\;dy \\
&=\; \int_0^1 (x+y)\cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(x)\;dy \\
&=\; \mathbb{I}_{[0,1]}(x)\int_0^1 (x+y)\;dy \\
&=\; \mathbb{I}_{[0,1]}(x)\left[xy+\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1} \\
&=\; \mathbb{I}_{[0,1]}(x)\left(x+\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

und für die Randdichte f_Y ergibt sich analog:

$$f_Y(y) \;=\; \mathbb{I}_{[0,1]}(y)\left(y+\frac{1}{2}\right).$$

3.2 Bedingte Dichten

Definition 3.3 *Sei (X,Y) ein Zufallsvektor mit gemeinsamer Dichtefunktion f. Die bedingte Dichte von X gegeben $Y=y$ ist für den festen Wert y mit $f_Y(y) > 0$ gegeben durch:*

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y) \;=\; \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}}$$

Die bedingte Dichte von Y gegeben $X=x$ ist für den festen Wert x mit $f_X(x) > 0$ gegeben durch:

$$\boxed{f_{Y|X}(y|x) \;=\; \frac{f(x,y)}{f_X(x)}}$$

Wir können uns $f_{X|Y}$ als eine Neubewertung der Verteilung von X vorstellen, wenn wir wissen, dass $Y = y$ eingetreten ist. **Wären** unsere beiden Zufallsvariablen **unabhängig**, ist eine solche Neubewertung nicht nötig. Dann gilt

$$\frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \;=\; f_{X|Y}(x|y) \;=\; f_X(x) \qquad \text{oder} \qquad f(x,y) \;=\; f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

Beispiel 3.4 *Sei*

$$f(x,y) \;=\; \frac{1}{2}\cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(x)\cdot \mathbb{I}_{[0,2]}(y) \;=\; \begin{cases} 1/2 & ,(x,y)\in[0,1]\times[0,2] \\ 0 & ,\ \textit{sonst} \end{cases}$$

Die Randdichten hatten wir im letzten Abschnitt berechnet:

$$f_X(x) \;=\; \mathbb{I}_{[0,1]}(x) \qquad \textit{und} \qquad f_Y(y) \;=\; \frac{1}{2}\,\mathbb{I}_{[0,2]}(y).$$

Die bedingten Dichten sind somit:

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) \;&=\; \frac{\frac{1}{2}\,\mathbb{I}_{[0,1]}(x)\cdot \mathbb{I}_{[0,2]}(y)}{\frac{1}{2}\,\mathbb{I}_{[0,2]}(y)} \;=\; \mathbb{I}_{[0,1]}(x) \\ f_{Y|X}(y|x) \;&=\; \frac{\frac{1}{2}\,\mathbb{I}_{[0,1]}(x)\cdot \mathbb{I}_{[0,2]}(y)}{\mathbb{I}_{[0,1]}(x)} \;=\; \frac{1}{2}\,\mathbb{I}_{[0,2]}(y) \end{aligned}$$

Beispiel 3.5

$$f(x,y) \;=\; (x+y)\cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(x)\cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(y)$$

und

$$f_X(x) \;=\; \mathbb{I}_{[0,1]}(x)\,\left(x+\frac{1}{2}\right) \qquad \textit{und} \qquad f_Y(y) \;=\; \mathbb{I}_{[0,1]}(y)\,\left(y+\frac{1}{2}\right).$$

$$f_{X|Y}(x|y) \;=\; \frac{(x+y)\cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(x)\cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(y)}{\mathbb{I}_{[0,1]}(y)\,\left(y+\frac{1}{2}\right)} \;=\; \frac{x+y}{y+\frac{1}{2}}\cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(x) \qquad \textit{für } y\in[0,1].$$

Anmerkung: $f_Y(y) > 0$ gilt für $0 \le y \le 1$. Ist $y < 0$ oder $y > 1$ ist $f_Y(y) = 0$ und $f_{X|Y}(x|y)$ zunächst nicht definiert.

$$f_{Y|X}(y|x) \;=\; \frac{(x+y)\cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(x)\cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(y)}{\mathbb{I}_{[0,1]}(x)\,\left(x+\frac{1}{2}\right)} \;=\; \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}\cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(y) \qquad \textit{für } x\in[0,1].$$

4 Bedingte Erwartungswerte

In einigen Anwendungen ist es nötig, den Erwartungswert einer bedingten Verteilung zu berechnen. In einem Portfolio aus zwei Anlageformen könnte es für einen Investor von Interesse sein, die erwartete Rendite der einen Anlageform zu kenne, falls die andere Anlageform einen Verlust generiert.

Definition 4.1 *Sei (X, Y) ein Zufallsvektor. Dann sind die bedingten Erwartungswerte wie folgt definiert.*

- *X und Y diskret:*

$$E(X|y_k) = \sum_{i=1}^{l} x_i \underbrace{f_{X|Y}(x_i|y_k)}_{=\frac{p_{ik}}{p_{\bullet k}}} \quad \text{bzw.} \quad E(Y|x_j) = \sum_{i=1}^{m} y_i \underbrace{f_{Y|X}(y_i|x_j)}_{=\frac{p_{ij}}{p_{j\bullet}}}$$

- *X und Y stetig:*

$$E(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\, dx \quad \text{bzw.} \quad E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{Y|X}(y|x)\, dy$$

Beispiel 4.1 *Für die Verteilung*

		Y 1	2	3	*Vert. von X*
	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
X	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
	3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
Vert. von Y		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	

Die bedingte Verteilung von X gegeben $Y = y_1 = 1$ ist

$$\left(\frac{p_{11}}{p_{\bullet 1}}, \frac{p_{21}}{p_{\bullet 1}}, \frac{p_{31}}{p_{\bullet 1}}\right) = \left(\frac{1/4}{1/2}, \frac{1/6}{1/2}, \frac{1/12}{1/2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

und damit folgt

$$E(X|1) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3}.$$

Abschliessend sei noch auf die folgende Gesetzmässigkeit hingewiesen:

Satz 3 (Gesetz der iterieren Erwartungen)

$$E(X) \;=\; E\left(E(X|y)\right) \;=\; \begin{cases} \sum\limits_{y_i} E(X|y_i)\cdot P(Y=y_i) & \text{, im diskreten Fall} \\ \int_{-\infty}^{\infty} E(X|y)\cdot f_Y(y)\,dy & \text{, im stetigen Fall} \end{cases}$$

Beispiel 4.2 *Falls X die Körpergrösse und Y das Geschlecht ist, dann ist der Erwartungswert der Körpergrösse der gesamten Bevölkerung gleich der durchschnittlichen Grösse der Männer, gewichtet mit dem Männeranteil, plus die durchschnittliche Grösse der Frauen, gewichtet mit dem Frauenanteil:*

$$E(X) \;=\; E(X|Y=\textit{männl.})\cdot P(Y=\textit{männl.}) + E(X|Y=\textit{weibl.})\cdot P(Y=\textit{weibl.})$$

Beispiel 4.3 *Wir betrachten die folgende zweidimensionale Zufallsvariable (X,Y):*

		Y 0	1	*Vert. von X*
	1	0.1	0.1	0.2
X	2	0.4	0.1	0.5
	3	0.1	0.2	0.3
Vert. von Y		0.6	0.4	

Wir ermitteln zunächst $E(X)$ mit Hilfe des Gesetzes der iterierten Erwartungen:

$$\begin{aligned} E(E(X|y)) &= E(X|Y=0)\cdot P(Y=0) + E(X|Y=1)\cdot P(Y=1) \\ &= \underbrace{\left(1\cdot\frac{0.1}{0.6} + 2\cdot\frac{0.4}{0.6} + 3\cdot\frac{0.1}{0.6}\right)\cdot 0.6}_{=1\cdot 0.1+2\cdot 0.4+3\cdot 0.1} + \underbrace{\left(1\cdot\frac{0.1}{0.4} + 2\cdot\frac{0.1}{0.4} + 3\cdot\frac{0.2}{0.4}\right)\cdot 0.4}_{=1\cdot 0.1+2\cdot 0.1+3\cdot 0.2} \\ &= 1\cdot(0.1+0.1) + 2\cdot(0.4+0.1) + 3\cdot(0.1+0.2) \\ &= 1\cdot 0.2 + 2\cdot 0.5 + 3\cdot 0.3 \;=\; E(X) \end{aligned}$$

5 Übungsaufgaben

1. Der zufällige Vektor (X, Y) genüge der folgenden Verteilung:

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	$1/8$	0	$1/8$
0	0	$1/2$	0
1	$1/8$	0	$1/8$

   (a) Bestimmen Sie die Randverteilungen von X und Y.

   (b) Berechnen Sie $E(X)$ und $E(Y)$.

   (c) Berechnen Sie $Cov(X, Y)$.

   (d) Sind die beiden Zufallsvariablen unabhängig? Begründung!

2. Die Zufallsvariablen X und Y nehmen die Werte $1, 2$ und 3 an. Dabei seien die folgenden Wahrscheinlichkeiten bekannt:

   $P(X = 1) = 0.5$, $P(X = 2) = 0.3$, $P(Y = 1) = 0.7$, $P(Y = 2) = 0.2$,

   $P(X = 1 \text{ und } Y = 1) = 0.35$, $P(X = 2 \text{ und } Y = 2) = 0.06$,

   $P(X = 3 \text{ und } Y = 1) = 0.20$.

   Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung. Sind X und Y unabhängig?

3. Der Zufallsvektor (X, Y) besitze die Dichte

$$f(x, y) \quad = \quad (xy + y) \cdot \mathbb{I}_{[-1,1]}(x) \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(y)$$

   (a) Bestimmen Sie die beiden Randdichten f_X und f_Y.

   (b) Bestimmen Sie die beiden bedingten Dichten $f_{X|Y}$ und $f_{Y|X}$.

4. Sei

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & , x, y \geq 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

   die gemeinsame Dichte eines Zufallsvektors (X, Y).

   (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\ (X > 1) \cap (Y < 1)\ )$.

   (b) Bestimmen Sie die beiden Randdichten f_X und f_Y.

   (c) Sind die beiden Zufallsvariablen X und Y unabhängig?

Lösungen einiger Übungsaufgaben

1. (a)

$X \setminus Y$	-1	0	1	
-1	1/8	0	1/8	1/4
0	0	1/2	0	1/2
1	1/8	0	1/8	1/4
	1/4	1/2	1/4	

   (b) $E(X) = E(Y) = 0$

   (c) $Cov(X, Y) = 0$

   (d) nicht unabhängig

2. Diese Aufgabe wurde schon im Kurs Statistik gestellt.

		Y			Vert. von X
		1	2	3	
	1	0.35	0.14	0.01	0.5
X	2	0.15	0.06	0.09	0.3
	3	0.2	0	0	0.2
Vert. von Y		0.7	0.2	0.1	

   Nicht unabhängig, da ....

   Ergänzung:

   $E(X) = 1.7$, $E(Y) = 1.4$, $Var(X) = 0.61$, $Var(Y) = 0.44$, $Cov(X, Y) = -0.0400$ und $\rho_{XY} = -0.077$.

3. (a)

$$f_X(x) = \frac{1}{2}(x+1) \cdot \mathbb{I}_{[-1,1]}(x) \qquad \text{und} \qquad f_Y(y) = 2y \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(y)$$

   (b)

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{2}(x+1)\, \mathbb{I}_{[-1,1]}(x) \qquad \text{und} \qquad f_{Y|X}(y|x) = 2y \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(y)$$

   Die beiden Zufallsvariablen sind also unabhängig.

4. (Musterlösung) Es gilt

$$
\begin{aligned}
P(\ (X>1)\cap(Y<1)\ ) &= \int_{-\infty}^{1}\int_{1}^{\infty} 2e^{-x}e^{-2y}\,dx\,dy \\
&= \int_{0}^{1} 2e^{-2y}\left[\int_{1}^{\infty} e^{-x}\,dx\right] dy \\
&= \int_{0}^{1} 2e^{-2y}\,\big[-e^{-x}\big]_{1}^{\infty}\,dy \\
&= \int_{0}^{1} 2e^{-2y}\,e^{-1}\,dy \\
&= 2\,e^{-1}\int_{0}^{1} e^{-2y}\,dy \\
&= 2\,e^{-1}\left[-\frac{1}{2}\,e^{-2y}\right]_{0}^{1} = e^{-1}(-e^{-2}+1) = 0.3181
\end{aligned}
$$

Für die beiden Randdichten gilt

$$
f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-2y}\,dy = e^{-x} & ,x \geq 0 \\ 0 & ,\text{ sonst} \end{cases}
$$

$$
f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,dx = 2e^{-2y} & ,y \geq 0 \\ 0 & ,\text{ sonst} \end{cases}
$$