Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Universität Basel

Mathematik 2

Dr. Thomas Zehrt

Schätzen

Benötigtes Vorwissen: Der Stoff der Vorlesung „Statistik" wird als bekannt vorausgesetzt, insbesondere **Kapitel 11 „(Punkt)schätzen"** und **Kapitel 12 „Testen"**

Inhaltsverzeichnis

1 Punktschätzen

1.1 Erinnerung: Grundproblem

Ausgangspunkt ist wieder eine endliche oder unendliche Grundgesamtheit, wobei wir im endlichen Fall aber davon ausgehen wollen, dass die Anzahl N ihrer Elemente so gross ist, dass eine vollständige Untersuchung praktisch unmöglich ist. An den Elementen dieser Grundgesamtheit interessiert uns wieder ein Merkmal (Zufallsvariable) X (z.B. Alter, Masse, Länge, ...) mit der Verteilung $P(X \leq x)$ (bzw. der Verteilungsfunktion F) und falls wir dieses Merkmal untersuchen wollen, haben wir keine andere Möglichkeit als eine (Zufalls)Stichprobe vom Umfang $n << N$ zu entnehmen, diese zu untersuchen und von diesen Untersuchungsergebnissen auf die Grundgesamtheit zu schliessen. Wir wollen dieses einleuchtende Verfahren mittels Zufallsvariablen präzisieren.

Definition 1.1 *Eine Zufallsstichprobe vom Umfang n ist eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, wobei X_i die Merkmalsausprägung des i-ten Elementes in der Stichprobe bezeichnet. Dabei sollen alle diese Zufallsvariablen die selbe Verteilung wie X haben. Jede Realisierung $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dieser Zufallsvariablen heisst eine konkrete Stichprobe.*

Es gibt offensichtlich zwei (eigentlich vier) Möglichkeiten, eine Stichprobe von n Elementen zu nehmen:

1. mit Zurücklegen

   In diesem Fall sind die Zufallsvariablen $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tatsächlich unabhängig und identisch verteilt.

2. ohne Zurücklegen

   In diesem Fall sind die Zufallsvariablen $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ nicht identisch verteilt und auch nicht unabhängig. Falls N sehr gross ist, können wir aber noch glauben, dass die obigen Zufallsvariablen **fast** unabhängig und identisch verteilt sind.

Um also die Unabhängigkeit und identische Verteilung der Zufallsvariablen zu garantieren, beachten wir:

N klein	$\longrightarrow$	Stichprobe mit Zurücklegen
N gross oder unendlich	$\longrightarrow$	Stichprobe mit oder ohne Zurücklegen

Die Information, die man auf Grund der Stichprobe über die Grundgesamtheit gewinnen möchte, lässt sich meistens in Form so genannter Parameter darstellen. Das ist eine feste aber unbekannte reelle Zahl, die wir meist mit dem griechischen Buchstaben θ abkürzen werden, und im weiteren wird stets angenommen, dass die Verteilung von X von diesem unbekannten Parameter abhängt.

Schätzprinzip der schliessenden Statistik

Ein unbekannter Parameter der Grundgesamtheit wird durch den entsprechenden Parameter der Stichprobe geschätzt.

In der obigen Aufgabe könnte man z.B. jeden Stichprobenmittelwert und jede Stichprobenvarianz als (mehr oder weniger guten) Schätzwert für den Mittelwert und die Varianz der Gesamtheit ansehen.

Es ist klar, dass die Qualität der Schätzung von der konkreten Stichprobe abhängt.

Zur Schätzung eines Parameters θ wird aus den n Stichprobenvariablen ein Wert berechnet.

Definition 1.2 *Eine Funktion*

$$g \quad = \quad g(X_1, X_2, \ldots, X_n) \;=\; g(\mathbf{X})$$

der Stichprobenvariablen heisst Stichprobenfunktion (und ist selbst wieder eine Zufallsvariable). Wird eine Stichprobenfunktion zur Schätzung eines Parameters θ genutzt, so heisst sie Schätzfunktion oder Schätzer für θ und wird mit $\hat{\theta}$ bezeichnet.

Beachte: θ ist ein fester Wert also insbesondere **keine** Zufallsvariable, $\hat{\theta}$ ist eine Zufallsvariable.

1.2 Einige einfache Beispiele

1.2.1 Stichprobenmittel

Es sei $\mu := E(X)$ mit $X :=$ Merkmalsausprägung eines zufällig ausgewählten Elementes der Grundgesamtheit

Ist die Grundgesamtheit endlich mit den N Elementen $1, 2, \ldots, n$ und ihren zugehörigen Merkmalsausprägungen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so gilt hier natürlich

$$\mu \quad = \quad \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \ldots + x_N)$$

und μ ist das arithmetische Mittel.

Dann ist das Stichprobenmittel

$$\hat{\mu} \quad := \quad \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

eine Schätzfunktion für μ.

1.2.2 Stichprobenvarianzen

Sei X wie oben definiert und $\sigma^2 := Var(X)$ die Varianz der Grundgesamtheit. Nehmen wir weiterhin an, dass wir den Erwartungswert $\mu = E(X)$ der Gesamtheit nicht kennen, wir müssen also auch μ über unsere Stichprobe schätzen. Dann sollten wir die folgende Schätzfunktion nutzen:

$$\hat{\sigma}^2 \quad := \quad \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu})^2$$

1.2.3 Anteilssatz

Sei p der prozentuale Anteil der Elemente der Grundgesamtheit, die eine gewisse fixierte Eigenschaft A haben. Dann ist der Anteilssatz

$$\hat{p} \;:=\; \frac{\text{Anzahl der Elemente in der Stichprobe mit Eigenschaft } A}{n}$$

ein Schätzer für p.

1.3 Erinnerung: Erwartungstreue und Konsistenz

Eine Schätzfunktion ist eine Zufallsvariable, sie kann also bei jedem Versuch (Stichprobe) anders ausfallen. Schon garnicht kann man erwarten, dass $\hat{\theta}$ den Parameter θ exakt trifft.

Dagegen sollte eine gute Schätzfunktion zumindest **im Mittel** richtig schätzen, d.h. ihr Erwartungswert sollte gleich dem zu schätzenden Parameter sein.

Definition 1.3 *Eine Schätzfunktion $\hat{\theta}$ für den Parameter θ heisst erwartungstreu, wenn $E(\hat{\theta}) = \theta$ gilt.*

Der Erwartungswert des Schätzfehlers $E(\theta - \hat{\theta})$ heisst Verzerrung oder Bias $bias(\hat{\theta})$ der Schätzfunktion.

Sie heisst konsistent, wenn ihre Varianz mit wachsendem Stichprobenumfang n gegen 0 konvergiert:

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) \;=\; 0.$$

Satz 1 *Das Stichprobenmittel $\hat{\mu}$ für μ und die Stichprobenvarianz $\hat{\sigma}^2$ sind erwartungstreu und konsistent.*

Meist sollte man bei Schätzfunktionen die Erwartungstreue verlangen. Allerdings kann es Probleme geben, wo man die Erwartungstreue durch eine unverhältnismässig grosse Varianz erkaufen muss. Hier kann es sein, dass eine kleine Verzerrung gerne in Kauf genommen wird, falls man dafür die Varianz der Schätzfunktion deutlich reduzieren kann. Wir wollen hier noch ein Qualitätsmerkmal für Schätzfunktionen vorstelllen, das sowohl Verzerrung als auch Varianz berücksichtigt.

Definition 1.4 *Der mittlere quadratische Fehler (Mean Squared Error) einer Schätzfunktion $\hat{\theta}$ für einen Parameter θ ist definiert als*

$$MSE(\hat{\theta}) \;=\; E((\hat{\theta} - \theta)^2).$$

Mit dem Verschiebungssatz gilt dann

$$MSE(\hat{\theta}) \;=\; E((\hat{\theta} - \theta)^2) \;=\; Var(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2 \;=\; Var(\hat{\theta}) + bias(\hat{\theta})^2.$$

Es kann manchmal auch sinnvoll sein einen Schätzer zu wählen, der einen möglichst kleinen mittleren quadratischen Fehler realisiert.

Beispiel 1.1 *$X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Der Parameter μ soll geschätzt werden. Hierzu stehen folgende Schätzfunktionen zur Verfügung:*

- $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$
- $\hat{\mu}_2 = \frac{n+1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n^2}X_n$

1. *Bestimmen Sie die Erwartungswerte und die Varianzen der zwei Schätzfunktionen.*
2. *Untersuchen Sie die Schätzfunktionen auf Konsistenz.*

Lösung:

- $\hat{\mu}_1$ *ist erwartungstreu:*

$$E(\hat{\mu}_1) \;=\; E\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2\right) \;=\; \frac{1}{2}\underbrace{E(X_1)}_{=\mu} + \frac{1}{2}\underbrace{E(X_2)}_{=\mu} \;=\; \mu$$

- $\hat{\mu}_1$ *ist nicht konsistent, denn die Varianz ist konstant (nicht von n abhängig):*

$$Var(\hat{\mu}_1) \;=\; Var\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2\right) \;=\; \frac{1}{4}\underbrace{Var(X_1)}_{=\sigma^2} + \frac{1}{4}\underbrace{Var(X_2)}_{=\sigma^2} \;=\; \frac{\sigma^2}{2}$$

- $\hat{\mu}_2$ *ist erwartungstreu:*

$$\begin{aligned} E(\hat{\mu}_2) \;=\; E\left(\frac{n+1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n^2}X_n\right) &= \frac{n+1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\underbrace{E(X_i)}_{=\mu} + \frac{1}{n^2}\underbrace{E(X_n)}_{=\mu} \\ &= \frac{n+1}{n^2}(n-1)\mu + \frac{1}{n^2}\mu \\ &= \frac{n^2-1}{n^2}\mu + \frac{1}{n^2}\mu \;=\; \mu \end{aligned}$$

- $\hat{\mu}_2$ *ist konsistent:*

$$\begin{aligned} Var(\hat{\mu}_2) \;=\; Var\left(\frac{n+1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n^2}X_n\right) &= \left(\frac{n+1}{n^2}\right)^2\sum_{i=1}^{n-1}\underbrace{Var(X_i)}_{=\sigma^2} + \left(\frac{1}{n^2}\right)^2\underbrace{Var(X_n)}_{=\sigma^2} \\ &= \frac{(n+1)^2}{n^4}(n-1)\sigma^2 + \frac{1}{n^4}\sigma^2 \\ &= \frac{n^2+n-1}{n^3}\sigma^2 \;\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 1.1 *Untersuchen Sie die Schätzfunktion* $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ *für* μ *auf Erwartungstreue und Konsistenz.*

Lösung:

Beispiel 1.2 *$X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Der Parameter σ soll geschätzt werden. Hierzu stehen folgende Schätzfunktionen zur Verfügung:*

- $\hat{\sigma}_1^2 = \dfrac{1}{n-1} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{\mu})^2$
- $\hat{\sigma}_2^2 = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{\mu})^2$

Bestimmen Sie die Erwartungswerte der zwei Schätzfunktionen.

Lösung: *Beachten Sie zunächst, dass mit dem Verschiebungsatz folgendes gilt*

$$
\begin{aligned}
E(X_i^2) &= Var(X_i) + E(X_i)^2 \;=\; \sigma^2 + \mu^2 \\
E(\hat{\mu}^2) &= Var(\hat{\mu}) + E(\hat{\mu})^2 \;=\; \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2.
\end{aligned}
$$

Ausserdem zeigt man ganz direkt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{\mu})^2 &= \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - 2\hat{\mu} X_i + \hat{\mu}^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\hat{\mu} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i}_{=n\,\hat{\mu}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \hat{\mu}^2}_{=n\hat{\mu}^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\,\hat{\mu}^2.
\end{aligned}
$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\sigma}_1^2) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - \frac{n}{n-1} E(\hat{\mu}^2) \\
&= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\sigma^2 + \mu^2) - \frac{n}{n-1} \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \\
&= \frac{1}{n-1} n(\sigma^2 + \mu^2) - \frac{n}{n-1} \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \;=\; \sigma^2
\end{aligned}
$$

Selbstverständlich ist damit auch gezeigt, dass $\hat{\sigma}_2^2$ nicht erwartungstreu ist.

1.4 Maximum-Likelihood-Methode

Sei X Zufallsvariable mit, bis auf einen Parameter θ, bekannter Verteilung, d.h. der Typ der Verteilungsfunktion von X ist uns bekannt (z.B. Normalverteilung, Exponentialverteilung, Binomialverteilung usw.) aber einen der Parameter (z.B. μ in der Normalverteilung, λ in der Exponentialverteilung oder p in der Binomialverteilung) kennen wir nicht.

Mögliche Werte: $\theta \in \Theta$ mit

- Θ eine endliche Menge $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k\}$ oder
- ein (offenes) Teilintervall der reellen Zahlen $\Theta = (a, b)$.

Der Parameter θ soll anhand einer konkreten Stichprobe $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ geschätzt werden. Die Funktion

$$\boxed{L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i; \theta) = P(x_1; \theta) \cdot P(x_2; \theta) \cdots P(x_n; \theta)}$$

heisst Likelihood-Funktion zur konkreten Stichprobe $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Dabei gilt:

$$P(x_i; \theta) = \begin{cases} P(X = x_i), & X \text{ diskret} \\ f(x_i) \quad , & X \text{ stetig mit Dichte } f \end{cases}$$

Ein Parameterwert $\theta_{ML} = \hat{\theta}$ mit

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta_{ML}) \geq L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$$

für **alle** erlaubten $\theta \in \Theta$ heisst Maximum-Likelihood-Schätzer oder einfach ML-Schätzer für den Parameter θ.

1. Vorgehen für $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k\}$
   (a) Bestimme $\max\{L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta_1), \ldots, L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta_k)\}$
   (b) Bestimme ein (nicht notwendigerweise eindeutiges) θ_i, welches dieses Maximum realisiert. Es gilt dann $\theta_{ML} := \theta_i$.
2. Vorgehen für $\Theta = (a, b)$: Lösen der
   (a) Maximum-Likelihood-Gleichung

   $$\frac{\partial}{\partial \theta} L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = 0$$

   (b) oder der Ln-Maximum-Likelihood-Gleichung

   $$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = 0$$

Da wir das Verfahren für diskrete Zufallsvariablen schon aus der Vorlesung Statistik kennen, führen wir hier noch ein Beispiel für eine stetige (hier exponentialverteilte) Zufallsvariable aus.

Beispiel 1.3 *Es gelte $X \sim Ex(\lambda)$ und in n unabhängigen Versuchen habe X die Werte $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ angenommen. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda) &= P(x_1;\theta) \cdot P(x_2;\theta) \cdots P(x_n;\theta) \\
&= f_{Ex}(x_1, \lambda) \cdot f_{Ex}(x_2, \lambda) \cdot \cdots \cdot f_{Ex}(x_n, \lambda) \\
&= \lambda e^{-\lambda x_1} \cdot \lambda e^{-\lambda x_2} \cdot \cdots \cdot \lambda e^{-\lambda x_n} \\
&= \lambda^n e^{-\lambda(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)} \\
\ln(\, L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda)\,) &= \ln(\,\lambda^n\,) + \ln\left(\, e^{-\lambda(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)} \,\right) \\
&= n \ln(\,\lambda\,) - \lambda(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \\
\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln(\, L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda)\,) &= n\,\frac{1}{\lambda} - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \;=\; 0 \\
\lambda &= \frac{n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} \;=\; \frac{1}{\bar{x}}
\end{aligned}$$

2 Konfidenzschätzung von Parametern

2.1 Schwankungsintervalle

Bevor wir uns dem eigentlichen Problem dieses Abschnittes widmen, wollen wir uns kurz mit allgemeinen Schwankungsintervallen beschäftigen.

Sei X eine beliebige Zufallsvariable (z.B. eine Stichprobenfunktion), $\alpha \in [0,1]$ und $\mu = E(X)$. Weiterhin bezeichne $\min(X)$ bzw. $\max(X)$ den kleinsten bzw. grössten Wert, den X annehmen kann.

Definition 2.1 *Ein $(1-\alpha)$-Schwankungsintervall $I_{1-\alpha}(X)$ ist (irgend)ein Intervall, in dem die Werte von X mit der gegebenen (und im allg. sehr grossen) Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ liegen, d.h. es gilt:*

$$P(X \in I_{1-\alpha}(X)) \quad = \quad 1-\alpha.$$

Es scheint seltsam, warum man hier $1-\alpha$ anstelle von α direkt nutzt. Das müsste hier nicht sein, ist aber für spätere Anwendungen besser und hat sich allgemein eingebürgert. Die Wahrscheinlichkeit, dass X **nicht** in $I_{1-\alpha}$ fällt ist gleich α:

$$P(X \notin I_{1-\alpha}(X)) \quad = \quad \alpha.$$

Beschränken wir uns nun auf **stetige** Zufallsvariablen, sind die drei folgenden $(1-\alpha)$-Schwankungsintervalle von besonderer Bedeutung. Wir benutzen zur einfachen Darstellung die entsprechenden Quantile von X. Machen Sie sich aber (falls nötig) nochmals klar, dass die gegebenen Intervalle die gewünschte Wahrscheinlichkeit enthalten.

- das linke $(1-\alpha)$-Schwankungsintervall: $I^l_{1-\alpha}(X) := (\min(X), X_{1-\alpha})$,
- das rechte $(1-\alpha)$-Schwankungsintervall: $I^r_{1-\alpha}(X) := (X_\alpha, \max(X))$ und
- das zentrale $(1-\alpha)$-Schwankungsintervall: $I^z_{1-\alpha}(X) := (X_{\frac{\alpha}{2}}, X_{1-\frac{\alpha}{2}})$.

Beispiel 2.1 *Sei $X \sim N(10; 5^2)$ und $\alpha = 0.2$ also $1-\alpha = 0.8$. Das zentrale 0.8-Schwankungsintervall ist $I^z_{0.8}(X) := (X_{0.1}, X_{0.9})$. Um nun die Quantile von X zu bestimmen, erinnern wir uns daran, dass $\Phi(X_p, \mu, \sigma^2) = p$ gelten muss, also hier*

$$\begin{aligned}
& \Phi(X_{0.1}, 10, 5^2) &=& \quad 0.1 \\
\iff \quad & \Phi\left(\frac{X_{0.1}-10}{5}\right) &=& \quad 0.1 \\
\iff \quad & \Phi\left(-\frac{X_{0.1}-10}{5}\right) &=& \quad 1-0.1 = 0.9 \\
\Longrightarrow \quad & -\frac{X_{0.1}-10}{5} &=& \quad 1.28 \ \textit{(Tabelle)} \\
\iff \quad & X_{0.1} &=& \quad 10-6.4 \ = \ 3.6
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\Phi(X_{0.9}, 10, 5^2) &= 0.9 \\
\iff \Phi\left(\frac{X_{0.9} - 10}{5}\right) &= 0.9 \\
\implies \frac{X_{0.9} - 10}{5} &= 1.28 \;\textit{(Tabelle)} \\
\iff X_{0.9} &= 16.4
\end{aligned}$$

und somit gilt $I^z_{0.8}(X) := (3.6, 16.4)$.

Technisch gesehen müssen wir es also nur schaffen, Quantile zu einem beliebigen Wert p zu bestimmen. Für die wichtige Klasse der normalverteilten Zufallsvariablen wollen wir das allgemein tun. Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ und z_p das p-Quantil einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen (das mit Hilfe der Tabelle in der Formelsammlung leicht bestimmt werden kann). Das p-Quantil von X ist durch die Eigenschaft $P(X \le X_p) = p$ bestimmt und wir können folgende Umformungen vornehmen:

$$\begin{aligned}
P(X \le X_p) &= p \\
\iff \Phi(X_p, \mu, \sigma^2) &= p \\
\iff \Phi\left(\frac{X_p - \mu}{\sigma}\right) &= p \\
\iff \frac{X_p - \mu}{\sigma} &= z_p \text{ (Tabelle)} \\
\iff X_p &= \mu + \sigma \cdot z_p.
\end{aligned}$$

2.2 Allgemeine Problembeschreibung

Gegeben sei eine Stichprobe $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ der Zufallsvariablen X. Dabei sei die Verteilung von X **bis auf einen Parameter** bekannt.

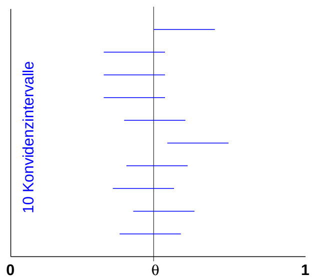
Für den unbekannten Parameter θ wird ein Zufallsintervall mit den Grenzen $I_u(\mathbf{X})$ und $I_o(\mathbf{X})$ bestimmt, dass den Parameter θ mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit von mindestens $1-\alpha$ überdeckt:

$$\boxed{P(\ I_u(\mathbf{X})\ \leq\ \theta\ \leq\ I_o(\mathbf{X})\ )\ \geq\ 1-\alpha}$$

Die Länge des Konfidenzintervalls $L = I_o - I_u$ ist ein Mass für die Genauigkeit der Schätzung. Die Länge L wächst mit fallendem α. Grössere Stichproben verkürzen i.A. das Konfindenzintervall.

Ein **konkretes** Konfidenzintervall enthält den zu schätzenden Parameter, oder es enthält ihn nicht!! Werden sehr viele Stichproben (vom Umfang n) genommen und zu diesen jeweils konkrete Konfidenzintervalle berechnet, so kann man erwarten, dass $(1-\alpha)\cdot 100\%$ dieser Konfindenzintervalle den zu schätzenden Parameter enthalten.

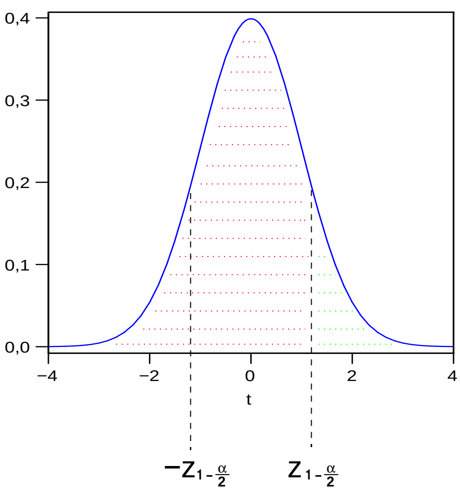
Beispiel: $1-\alpha = 0.9$ für 10 Konfidenzintervalle



In der folgenden Rechnung wird noch der folgende Fakt verwendet:

Sei Z standardnormalverteilt oder t-verteilt und z_p sei das entsprechende p-Quantil. Da die zugehörigen Dichtefunktionen gerade Funktionen sind, gilt zunächst $-z_p\ =\ z_{1-p}$ und:

$$P(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}})\ =\ P(|Z| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}})\ =\ 1-\alpha$$



2.3 Konfidenzschätzungen für Normalverteilungen

2.3.1 Konfidenzschätzung des Erwartungswertes μ falls $\sigma^2 = \sigma_0^2$ bekannt

Satz 2 *Gegeben sei eine Stichprobe* $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *der* $N(\mu, \sigma_0^2)$*-verteilten Zufallsvariablen* X. *Das Konfidenzintervall ist*

$$\boxed{[I_u(\mathbf{X}), I_o(\mathbf{X})] = \left[\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]}$$

und der Parameter μ *liegt mit der Wahrscheinlichkeit* $1 - \alpha$ *in diesem Intervall.*

Herleitung:

- Punktschätzer für μ: $\overline{X} \;=\; \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$
- Konstruktion eines bzgl. $\overline{X}$ symmetrischen Konfidenzintervalls:
  - Es gilt: $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma_0^2/n)$
  - Standardisierung: $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
  - Es folgt: $P\left(\left|\dfrac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma_0}\right| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \;=\; 1 - \alpha$ also

$$\begin{array}{rlcll}
 & -z_{1-\frac{\alpha}{2}} & \leq & \dfrac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma_0} & \leq \; z_{1-\frac{\alpha}{2}} \\
\longrightarrow & -\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\, z_{1-\frac{\alpha}{2}} & \leq & \overline{X} - \mu & \leq \; \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\, z_{1-\frac{\alpha}{2}} \\
\longrightarrow & -\overline{X} - \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\, z_{1-\frac{\alpha}{2}} & \leq & -\mu & \leq \; -\overline{X} + \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\, z_{1-\frac{\alpha}{2}} \\
\longrightarrow & \overline{X} - \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\, z_{1-\frac{\alpha}{2}} & \leq & \mu & \leq \; \overline{X} + \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\, z_{1-\frac{\alpha}{2}}
\end{array}$$

Die Länge des Konfidenzintervalls ist hier

$$L \;=\; 2\, z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}.$$

Wollten wir eine genauere Schätzung (Verkürzung des Konfidenzintervalls auf eine Länge $\leq L_0$ bei konstantem α), so müssen wir den Stichprobenumfang vergrössern. Konkret ergibt sich aus der Forderung

$$2\, z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \;\leq\; L_0 \;\;\longrightarrow\;\; n \;\geq\; \left(\frac{2\, z_{1-\frac{\alpha}{2}}\, \sigma_0}{L_0}\right)^2$$

Aufgabe 2.1 *Bei einer Flaschenabfüllanlage mit dem Sollwert* 1000 *ml ist die tatsächliche Füllmenge eine normalverteilte Zufallsvariable X mit Standardabweichung $\sigma = 3$ ml. Eine Stichprobe im Umfang $n = 50$ ergab $\overline{x} = 999$ ml. Konstruieren Sie ein Konfidenzintervall für den Mittelwert μ für $\alpha = 0.05$. Wie gross ist der erforderliche Stichprobenumfang n um $L \leq 2$ ml zu erzwingen?*

Lösung:

- X ist die (tatsächliche) Füllmenge einer Flasche und $X \sim N(\mu, \sigma_0^2 = 9)$
- eine (konkrete!) Stichprobe vom Umfang $n = 50$ ergab $\bar{x} = (x_1 + \ldots + x_{50})/50 \; = \; 999$
- $\alpha = 0.05$
-
$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \;=\; z_{0.975} \frac{3}{\sqrt{50}} \;=\; 1.96 \frac{3}{\sqrt{50}} \;=\; 0.83$$
- Konfidenzintervall: $[999 - 0.83, 999 + 0.83] \;=\; [998.17, 999.83]$

  Dieses Intervall enthält den **wahren** Wert μ fast sicher (mit der Wahrscheinlichkeit von 95%). Insbesondere liegt der Sollwert 1000 nicht in diesem Intervall. Eine Neueinstellung der Maschine scheint somit nötig.

  Die Länge des Konfidenzintervalls ist $999.83 - 998.17 \;=\; 1.66$.
- Ganz allgemein gilt für die Länge des Konfidenzintervalls (rechte minus linke Intervallgrenze):
$$L \;=\; \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} - \left(\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right) \;=\; 2 z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}.$$
  Übernehmen wir nun die Daten aus der obigen Aufgabe (ausser n) und fordern $L \leq 2$ erhalten wir:
$$L \;=\; 2 \cdot 1.96 \frac{3}{\sqrt{n}} \;\leq\; 2$$
  und nach dem Auflösen nach n ergibt sich der mindestens nötige Stichprobenumfang von
$$n \;\geq\; (1.96 \cdot 3)^2 \;=\; 34.57.$$

□

2.3.2 Konfidenzschätzung des Erwartungswertes μ falls σ^2 unbekannt

Satz 3 *Gegeben sei eine Stichprobe* $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *der* $N(\mu, \sigma^2)$*-verteilten Zufallsvariablen* X*, wobei* σ^2 *unbekannt ist. Dann ist das Konfidenzintervall gegeben durch:*

$$\boxed{[I_u(\mathbf{X}), I_o(\mathbf{X})] = \left[\overline{X} - t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_X}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_X}{\sqrt{n}}\right]}$$

Herleitung:

- Punktschätzer für μ: $\overline{X} \;=\; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

  Punktschätzer für σ^2: $S_X^2 \;=\; \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$

- Konstruktion eines bzgl. $\overline{X}$ symmetrischen Konfidenzintervalls:
  - Da $\overline{X}$ und S_X^2 unabhängig sind, gilt: $\dfrac{\overline{X} - \mu}{S_X/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ ist t-verteilt.
  - Es folgt: $P\left(\left|\dfrac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{n}}{S_X}\right| \le t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right) \;=\; 1 - \alpha$ und Auflösen liefert das Ergebnis.

Aufgabe 2.2 *Bei einer Flaschenabfüllanlage mit dem Sollwert* 1000 *ml ist die tatsächliche Füllmenge eine normalverteilte Zufallsvariable* X*. Eine Stichprobe im Umfang* $n = 50$ *ergab* $\overline{x} = 999$ *ml und* $s_X = 2.8$ *ml. Konstruieren Sie ein Konfidenzintervall für den Mittelwert* μ *für* $\alpha = 0.05$*.*

Lösung:

$$\begin{aligned}
[I_u(\mathbf{x}), I_o(\mathbf{x})] &= \left[\overline{x} - t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s_X}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s_X}{\sqrt{n}}\right] \\
&= \left[999 - t_{49;1-\frac{0.05}{2}} \frac{2.8}{\sqrt{50}},\ 999 + t_{49;1-\frac{0.05}{2}} \frac{2.8}{\sqrt{50}}\right] \\
&= \left[999 - t_{49;0.975} \frac{2.8}{\sqrt{50}},\ 999 + t_{49;0.975} \frac{2.8}{\sqrt{50}}\right] \\
&\approx \left[999 - 2.01 \frac{2.8}{\sqrt{50}},\ 999 + 2.01 \frac{2.8}{\sqrt{50}}\right] \\
&\approx [999 - 0.7959,\ 999 + 0.7959] \\
&= [998.2041,\ 999.7959]
\end{aligned}$$

□

3 Übungsaufgaben

1. Zwei Statistiker entwickeln unabhängig voneinander jeweils eine Schätzfunktion für den unbekannten Parameter θ. Für die Schätzfunktion T_1 des ersten Statistikers gilt $E(T_1) = 3\theta$ und $Var(T_1) = 1$ und für die Schätzfunktion T_2 des zweiten Statistikers gilt $E(T_2) = 2\theta$ und $Var(T_2) = 9$. Die beiden Statistiker beschliessen, eine Linearkombination $T = a \cdot T_1 + b \cdot T_2$ ihrer Schätzfunktionen zu bilden. Welche Bedingungen müssen a und b erfüllen, damit T erwartungstreu für θ ist?

2. $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Der Parameter μ soll geschätzt werden. Hierzu stehen folgende Schätzfunktionen zur Verfügung:

   - $T_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$
   - $T_2 = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{2} X_n$
   - $T_3 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} X_i$
   - $T_4 = \overline{X}$

   (a) Bestimmen Sie die Erwartungswerte der vier Schätzfunktionen.

   (b) Bestimmen Sie die Varianzen der vier Schätzfunktionen.

   (c) Untersuchen Sie die Schätzfunktionen auf Konsistenz.

3. Aus einer normalverteilten Grundgesamtheit mit der bekannten Varianz $\sigma_0^2 = 9$ wurde eine Stichprobe gezogen. Das Stichprobenmittel ergab sich zu $\overline{x} = 5$.

   (a) Ermitteln Sie das 95%-Konfidenzintervall für μ, wenn der Stichprobenumfang

      i. $n = 10$

      ii. $n = 100$

      betragen hat.

   (b) Wie gross muss der Stichprobenumfang mindestens gewählt werden, damit das Konfidenzintervall für μ eine Länge von höchstens 0.4 hat (Daten wie oben)?

4. Aus einer normalverteilten Grundgesamtheit mit der unbekannten Varianz σ^2 wurde eine Stichprobe gezogen. Das Stichprobenmittel war dabei $\overline{x} = 5$ und die Stichprobenvarianz $s^2 = 10$. Ermitteln Sie das 95%-Konfidenzintervall für μ, wenn der Stichprobenumfang

   (a) $n = 10$

   (b) $n = 100$

   betragen hat.