WWZ
Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der
Universität Basel

Dr. Thomas Zehrt

Bitte in Druckbuchstaben ausfüllen:

Name	
Vorname	

Mathematik 2
Probeprüfung 1

- Zeit: 90 Minuten, Maximale Punktzahl: 72
- Zur Orientierung: mit 36 Punkten haben Sie **sicher** bestanden.
- Die Prüfung umfasst 12 Aufgaben (1 bis 12) und die Bewertung der Teilaufgaben erfolgt gemäss den eingerahmten Punktzahlen.
- Provisorische Berechnungen sind auf separaten Blättern auszuführen. Diese Blätter sind -als Entwurf gekennzeichnet- ebenfalls abzugeben.
- Manche Aufgaben können auf verschiedene Arten gelöst werden. Eventuell gibt es einen sehr einfachen Weg. Überlegen Sie (kurz), bevor Sie drauf los rechnen!
- Die definitive Lösung darf von jeder Aufgabe nur eine Version enthalten und hat direkt im Anschluss an diese Aufgabe (bzw. auf der Rückseite des entsprechenden Aufgabenblattes) zu erfolgen. Dabei sollten alle Rechenschritte klar ersichtlich sein, denn die ,,Qualität" Ihrer Fehler wird bewertet. Ist die Antwort auf die Frage richtig und vollständig, erhalten Sie stets die volle Punktzahl.
- Bei den folgenden Fehlern erhalten Sie keine Punkte für die Aufgabe bzw. den Aufgabenteil:
  - eine Wahrscheinlichkeit < 0 oder > 1 oder eine negative Varianz (natürlich falsch) berechnet und nicht kommentiert;
  - Unabhängigkeit von Ereignissen bzw. Zufallsvariablen grundlos angenommen;
  - ein Summenzeichen bzw. Betragstriche (grundlos) weggelassen;
  - eine Gleichung durch eine Variable teilen, die Null sein könnte.
- Die ausgeteilten Formelsammlungen dürfen nicht beschriftet werden und sind ebenfalls mit der Prüfung abzugeben.

1. (a) Es seien die beiden Vektoren $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie einen zu $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ senkrechten Vektor der Länge 2. $\boxed{3}$

(b) Es seien die folgenden drei Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie falls möglich $(A - 2\,B^{-1})^T \cdot C$. $\boxed{3}$

Lösung:

2. Bestimmen Sie die Ränge der Matrizen $\boxed{1+1+1+3}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 7 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 8 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 9 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

und $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Begründen Sie, falls nötig, Ihre Behauptung.

<u>Lösung:</u>

3. (a) Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} p \cdot x & & & + & z & = & 1 \\ x & + & p \cdot y & & & = & 2 \\ & & y & + & p \cdot z & = & -3 \end{array}$$

i. Bestimmen Sie alle Lösungen für $p = 0$. $\boxed{2}$

ii. Für welche Parameter p hat das System genau eine Lösung? Begründen Sie Ihre Aussage. $\boxed{2}$

(b) Kann ein homogenes lineares Gleichungssystem keine Lösung haben? Begründen Sie Ihre Aussage. $\boxed{2}$

Lösung:

4. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen A und A^{-1}. $\boxed{4}$

   (b) Untersuchen Sie A und A^{-1} auf ihre Definitheit. $\boxed{2}$

   <u>Lösung:</u>

5. Gegeben ist die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2$ und $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die quadratische Approximation von f in $\mathbf{a}$. $\boxed{4}$

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f in $\mathbf{a}$ sowie deren Definitheit. $\boxed{2}$

Lösung:

6. (a) Wir betrachten für $a \neq 0$ die lineare Differenzengleichung $y_{k+1} + a \cdot y_k \; = \; 2.$

   i. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für $a = 2$. $\boxed{3}$

   ii. Für welche Werte a ist die Lösung konvergent (gedämpft)? $\boxed{1}$

   (b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der **nicht-linearen** Differenzengleichung

$$y_{k+1} \quad = \quad \frac{3}{k+1}\, y_k. \qquad \boxed{2}$$

Lösung:

7. X sei eine stetige Zufallsvariable mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ cx & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{für } 2 < x \end{cases} .$$

Dabei ist c eine geeignet zu wählende Konstante.

(a) Bestimmen Sie die Konstante c. $\boxed{1}$

(b) Skizzieren Sie die Dichtefunktion. $\boxed{1}$

(c) Berechnen Sie $P(X = 1.5 \text{ oder } X > 2)$. $\boxed{1}$

(d) Bestimmmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion F. $\boxed{3}$

Lösung:

8. Der zufällige Vektor (X, Y) genüge der folgenden Verteilung:

$X \setminus Y$	-1	0	1	
-1	0	0	1/8	
0	0	1/2	0	
1	1/4	0	1/8	

(a) Bestimmen Sie die Randverteilungen von X und Y. $\boxed{1}$

(b) Berechnen Sie $E(X)$ und $E(Y)$. $\boxed{1}$

(c) Berechnen Sie $Cov(X, Y)$. $\boxed{2}$

(d) Sind die beiden Zufallsvariablen unabhängig? Begründung! $\boxed{2}$

<u>Lösung:</u>

9. (a) Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit $E(X) = 3$ und $Var(X) = 4 = \sigma^2$.

   i. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(|X - 3| > 1)$. $\boxed{2}$

   ii. Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(-1 \leq X \leq 4 \mid X > 3)$. $\boxed{2}$

   (b) Was besagt der **Satz von Bernoulli**? $\boxed{2}$

Lösung:

10. Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch zweipunktverteilte Zufallsvariablen, d.h. für alle $i = 1, 2, \ldots$ gilt

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{mit } P(X_i = 1) = p \\ 0 & \text{mit } P(X_i = 0) = 1 - p \end{cases} .$$

Weiterhin sei $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

(a) Geben Sie die Verteilung der Zufallsvariablen S_3 an. $\boxed{2}$

(b) Berechnen Sie $E(S_n)$ und $Var(S_n)$. $\boxed{2}$

(c) Wie lautet die Grenzverteilung $(n \to \infty)$ von S_n ? $\boxed{2}$

<u>Lösung:</u>

11. Bei einer Flaschenabfüllanlage mit dem Sollwert 1000 ml ist die tatsächliche Füllmenge eine normalverteilte Zufallsvariable X. Eine Stichprobe im Umfang $n = 20$ ergab $\bar{x} = 996$ ml.

   (a) Konstruieren Sie ein Konfidenzintervall für den Mittelwert μ für $\alpha = 0.05$, wenn $\sigma_0^2 = Var(X) = 4$ gilt. $\boxed{3}$

   (b) Konstruieren Sie ein Konfidenzintervall für den Mittelwert μ für $\alpha = 0.05$, wenn $\sigma_0^2 = Var(X)$ unbekannt ist und für die Varianz der Stichprobe $S_X^2 = 4$ gilt. $\boxed{3}$

   Lösung:

12. Bei der Produktion von Bolzen beträgt der Sollwert für den Durchmesser 10 mm. Der Bolzendurchmesser X sei dabei normalverteilt mit dem unbekannten Erwartungswert μ und der durch die Konstruktion der Maschine festgelegten Standardabweichung $\sigma_0 = 0.5$ mm. Zur Überprüfung der Einstellung werden 100 Teile entnommen und daraus der mittlere Durchmesser $\overline{x} = 10.15$ mm berechnet. Prüfen Sie die Hypothese $H_0 : \mu = 10$ mm mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$. $\boxed{6}$

    <u>Lösung:</u>

Lösungen

1. $(a)\quad \pm\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad (b)\quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $rg(A) = 1$, $rg(B) = 2$, $rg(C) = 3$ und $rg(D) = 3$

3. $(a)\ i.\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $(a)\ ii.$ Der Rang der Koeffizientenmatrix ist genau dann 3, wenn $p \neq -1$ ist. In diesem Fall hat das System genau eine Lösung.

   (b) -

4. (a) A: $\lambda_1 = 3$, $\mathbf{x}^{(1)} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{x}^{(2)} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   A^{-1}: $\lambda_1 = 1/3$, $\mathbf{x}^{(1)} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{x}^{(2)} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   (b) Beide Matrizen sind positiv definit, denn alle Eigenwerte sind grösser als 0 (Satz von Sylvester).

5. $(a)\quad P(x) = 5 + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{pmatrix} + (x_1 - 1, x_2 - 2)\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{pmatrix}$

   $(b)\quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit da ...

6. $(a)\ i.\ \ y_k = (-2)^k\,(y_0 - 2/3) + 2/3, \qquad$ und $(a)\ ii.\ \ -1 < a < 1$

   (b) Hinweis: $y_{k+1} = \dfrac{3}{k+1}\,y_k = \dfrac{3}{k+1}\,\dfrac{3}{k}\,y_{k-1} = \dfrac{3}{k+1}\,\dfrac{3}{k}\,\dfrac{3}{k-1}\,y_{k-2} = \dots$

7. $(a)\ \ c = 2/3,\quad (b)\ \ -,\quad (c)\ \ P = 0$ und (d)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3} & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{für } 2 < x \end{cases} .$$

8. (a)

$X \setminus Y$	-1	0	1	
-1	0	0	1/8	1/8
0	0	1/2	0	1/2
1	1/4	0	1/8	3/8
	1/4	1/2	1/4	

   (b) $E(X) = 1/4$ und $E(Y) = 0$

   (c) $Cov(X,Y) = (-1 - 1/4)\cdot(1-0)\cdot(1/8) + (1 - 1/4)\cdot(-1-0)\cdot(1/4) + (1-1/4)\cdot(1-0)\cdot(1/8) = -1/4$

   (d) Abhängig, da z.B. $1/4 \cdot 1/8 \neq 0$

9. $(a)\ i.$ 0.618, $(a)\ ii.$ 0.382

   (b) -

10. (a)

x	0	1	2	3
$P(S_3 = x)$	$(1-p)^3$	$3(1-p)^2p$	$3(1-p)p^2$	p^3

   (b) $E(S_n) = n \cdot p$ und $Var(S_n) = n \cdot p \cdot (1-p)$

   (c) $N(n \cdot p; n \cdot p \cdot (1-p))$

11. (a) $[996 - 0.876, 996 + 0.876]$

   (b) $[996 - 0.935, 996 + 0.935]$

12. $t = 3 > 1.96$ also H_0 verwerfen