Einführung und Überblick

Thomas Zehrt

Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

Outline

1. Zahlenfolgen: Zinseszinsrechnung
2. Elementare Funktionen
   - Der Graph einer Funktion
   - Gerade, Parabel, Winkelfunktionen, e- und $\ln$-Funktion
3. Gleichungen und Ungleichungen
   - Struktur der Lösung
   - Polynome und ihre Nullstellen
   - Auflösen und Umkehrfunktion
   - Dividiere nie durch Variablen!!
   - Lass den Betrag nicht einfach weg!!
   - Sorgfältig Rechnen!
4. Lösen linearer Gleichungssysteme durch Elimination
5. Deutung der Ableitung
6. Deutung des bestimmten Integrals

Satz (Zinseszinsformel für einmalige Verzinsung)

Ein Anfangsguthaben K_0, das zu einem Zinssatz p angelegt wird, wächst nach n Jahren zu einem Endkapital

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot (1+p)^n}$$

Ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 \cdot (1+p) \\ K_2 &= K_0 \cdot (1+p)^2 = K_0 \cdot (1+p) \cdot (1+p) = K_1 \cdot (1+p) \\ K_3 &= K_0 \cdot (1+p)^3 = K_0 \cdot (1+p)^2 \cdot (1+p) = K_2 \cdot (1+p) \end{aligned}$$

Typische Fragen:

- Wie lange dauert es, bis sich K_0 bei festem p verdoppelt hat?

  Löse $2 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+p)^n$ nach n auf:
  $$n = n(p) = \frac{\ln(2)}{\ln(1+p)}$$

- Doppeltes Anfangsguthaben $\longrightarrow$ Doppeltes Endguthaben

- Doppelter Zins $\longrightarrow$??

Example (Der Josephsrappen, *Richard Price, 1723-1791*)
Was hätte der Zinseszinseffekt aus vor 2000 Jahren angelegten 0.01 CHF gemacht?

- $p = 0.01 = 1\%$

$$K_{2000} \quad = \quad 0.01 \cdot 1.01^{2000} \ \approx \ 4'392'682,- \text{ CHF}$$

- $p = 0.02 = 2\%$

$$\begin{array}{rcl} K_{2000} & = & 0.01 \cdot 1.02^{2000} \ \approx \ 1'586'147'328'000'000,- \text{ CHF} \\ & & \text{Notenumlauf 2014} \qquad 62'700'000'000,- \text{ CHF} \end{array}$$

Oft muss man Glieder von Zahlenfolgen aufaddieren → **Reihen** und **Partialsummenfolgen**

Example (Fundamentalaufgaben)

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

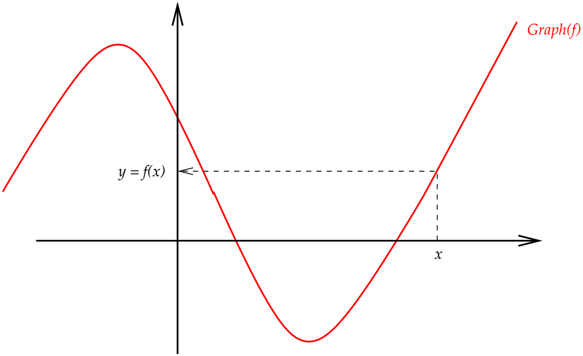
$$\sum_{k=1}^{5} k \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{5} k$$

$$\sum_{k=2}^{5} \frac{k}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{k=3}^{5} k^2$$

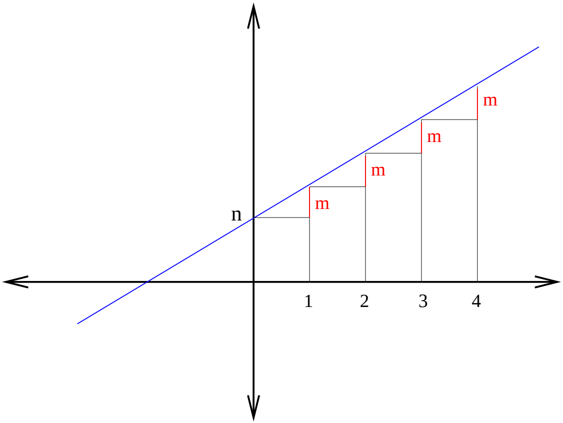
$$\sum_{k=1}^{5} 5 \quad \text{und} \quad \sum_{k=u}^{o} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{5000} 100^k - \sum_{k=2}^{4999} 100^k$$

$$Graph(f) \quad = \quad \{ \ (x, f(x)) \mid x \in D \subset \mathbb{R} \ \}$$



Die **Gerade** $g(x) = mx + n$.



Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

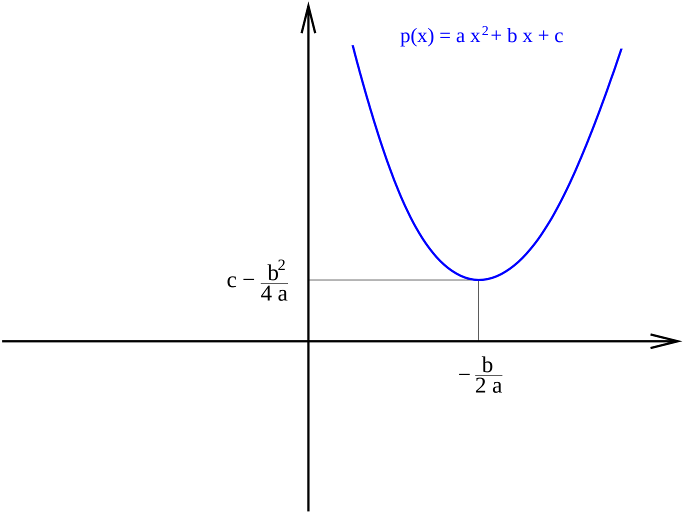
$$g(x+1) \;=\; m \cdot (x+1) + n \;=\; mx + n + m \;=\; g(x) + m$$

Folgerung:
Eine Gerade ist durch zwei verschiedene Punkte **eindeutig** bestimmt, d.h. aus der Kenntnis von zwei Punkten auf der Geraden, kann die Geradengleichung hergeleitet werden.

Example (Fundamentalaufgabe)

Wie lautet die Gleichung der Geraden durch die beiden Punkte $(1, 1)$ und $(2, 3)$?
Oder durch irgendwelche zwei gegebene Punkte?

Die **Parabel** $p(x) = ax^2 + bx + c$ mit ihrem Scheitel.



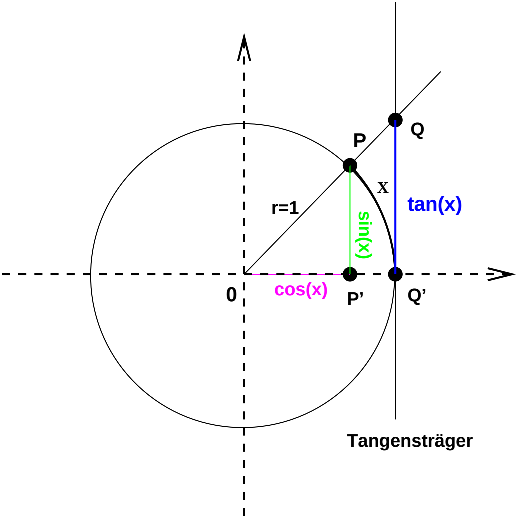
Folgerungen:

- Der Scheitel ist ein lokales (und globales) Extrema und lässt sich deshalb einfach durch Ableiten bestimmen:

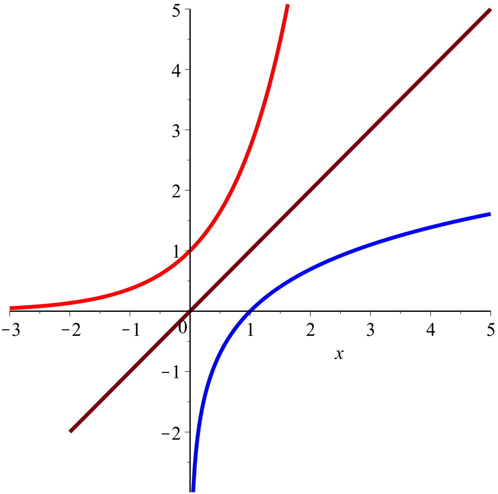
$$
\begin{aligned}
p'(x) \; = \; 2ax + b \; = \; 0 \quad \rightarrow \quad & x \; = \; -\frac{b}{2a} \\
& y \; = \; p(-b/2a) \; = \; c - \frac{b^2}{4a}
\end{aligned}
$$

- $a > 0 \quad \rightarrow$ Parabel nach oben geöffnet
  $a < 0 \quad \rightarrow$ Parabel nach unten geöffnet

Die **Winkelfunktionen** $\sin(x)$, $\cos(x)$ und $\tan(x)$.

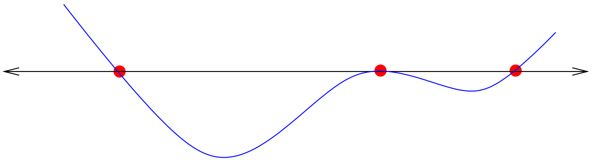


Die Funktionen e^x (rot) und $\ln(x)$ (blau).

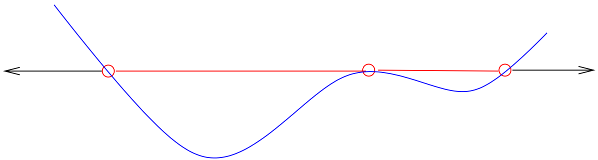


Wichtig:

Die Lösung von $f(x) = 0$ *sind* 3 *(rote)* **Punkte***!*



Die Lösung von $f(x) < 0$ *sind* 2 *(rote)* **Intervalle***!*



Wichtig:

x_i *heisst Nullstelle von* f, *wenn* $f(x_i) = 0$ *gilt.*

$$\boxed{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = 0}$$

faktorisieren
(falls möglich)

ausmultiplizieren

$$a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_n) = 0$$

Lösungen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *ablesen*

$$\boxed{x^2 + 2x - 15 \;=\; 0}$$

faktorisieren
(falls möglich)

ausmultiplizieren

$$(x-3)\cdot(x+5) \;=\; 0$$

Lösungen 3 und -5 ablesen

$$\boxed{x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0}$$

faktorisieren
(falls möglich)

ausmultiplizieren

$$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3) = 0$$

Lösungen 1, 2 und 3 ablesen

Example (Fundamentalaufgaben)

Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen:

1. $x \cdot (x-2) \cdot (x+3) = 0$
2. $x \cdot (x-2) \cdot (x+3) + x \cdot (x-2) = 0$
3. $x \cdot (x-2) \cdot (x+3) + 500\, x \cdot (x-2) \cdot (x+3) = 0$

Wichtig:

Zum Auflösen einer Gleichung $f(x) = a$ *benötigt man die Umkehrfunktion* f^{-1} *von* f*. Aber nicht jede Funktion besitzt eine Umkehrfunktion!*

$$\boxed{f(x) \;=\; a \quad\longrightarrow\quad {\color{red}f^{-1}}(\,f(x)\,) \;=\; {\color{red}f^{-1}}(a) \quad\longrightarrow\quad x \;=\; {\color{red}f^{-1}}(a)}$$

Achtung: Nicht streng monotone Funktionen können nur über einem Monotonieintervall umgekehrt werden!

- $\ln(x) = 2$ ($\ln$ ist streng monoton, also umkehrbar)
  $\longrightarrow \quad e^{\ln(x)} = e^2 \quad \longrightarrow \quad x = e^2$

- $e^x = 10$ (e ist streng monoton, also umkehrbar)
  $\longrightarrow \quad ln(e^x) = ln(10) \quad \longrightarrow \quad x = ln(10)$
- $\cos(x) = 1/2$ ($\cos$ ist nicht streng monoton, also nicht umkehrbar)
  Der $\cos$ ist auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend. Die Funktion $\arccos$ (am Taschenrechner) bezeichnet die zugehörige Umkehrfunktion (für dieses Intervall).

  $$\longrightarrow \quad \arccos(\cos(x)) = \arccos(1/2) \quad \longrightarrow \quad x = \arccos(1/2)$$

  ist die einzige Lösung im Intervall $[0, \pi]$. Die Ausgangsgleichung hat aber **unendlich viele** Lösungen! Könnten Sie alle finden?

- $\ln(x^2 - 1) = 0$

  Der Logarithmus ist nur für Werte grösser als 0 definiert. Der Definitionsbereich der Gleichung ist somit $x^2 - 1 > 0$ oder $x^2 > 1$ oder $|x| > 1$ (Betrag **nicht** vergessen). Beachten Sie, dass der Definitionsbereich somit aus den **beiden** Intervallen $(-\infty, -1)$ und $(1, \infty)$ besteht!

  $$\begin{aligned}
  &\longrightarrow e^{\ln(x^2-1)} = e^0 = 1 \\
  &\longrightarrow x^2 - 1 = 1 \\
  &\longrightarrow x^2 - 1 + 1 = 1 + 1 \\
  &\longrightarrow (x^2)^{1/2} = \pm 2^{1/2}
  \end{aligned}$$

Dividiere nie durch eine Variable (die 0 sein könnte), sondern klammere aus!

Example

$$x^2 - x = 0$$

Falsch

$$x^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \mid : x$$

$$\Leftarrow x - 1 = 0$$

Lösung: $x = 1$

Richtig

$$x^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) = 0$$

Lösung: $x = 0$ oder $x = 1$

Lass den Betrag (beim Lösen einer Gleichung oder Ungleichung) nicht einfach weg!

Example

$$|x-2| = 5$$

Falsch	Richtig
$\Leftarrow x-2 = 5$	$\Leftrightarrow x-2 = 5$ oder $x-2=-5$
$\Leftrightarrow x = 5+2=7$	$\Leftrightarrow x = 7$ oder $x=-3$

Example (Fundamentalaufgaben)

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen:

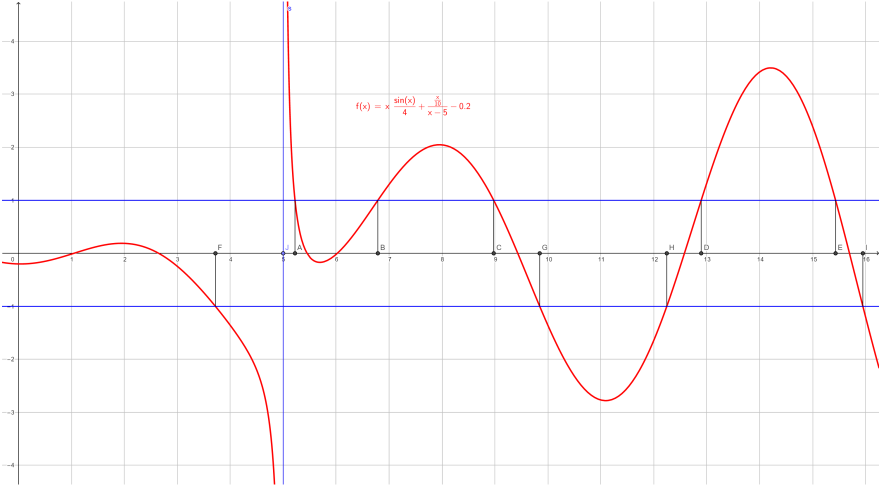
$$\begin{array}{rcl} |x-2| & < & 1 \\ |x+5| & < & 2 \\ |x-3| & > & 2 \end{array}$$

Allgemeiner

Sei $a, \epsilon \in \mathbb{R}$ mit $\epsilon > 0$. Bestimmen und skizzieren Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen: $|x-a| < \epsilon$, $|x-a| > \epsilon$, $|x-a| = \epsilon$, $|x-a| \leq \epsilon$ und $|x-a| \geq \epsilon$.

Example (Fundamentalaufgaben)

Der Graph von f sei gegeben. Skizzieren Sie die Lösungsmengen für $f(x) = 1, f(x) = -1$ und $|f(x)| = 1$ sowie $f(x) < 1$ und $|f(x)| < 1$.



Rechnen Sie sorgfältig!!

Example

$$3 = \sqrt{x+1} - 2$$

Falsch

$$3^2 = (x+1) - 2^2$$

Richtig(er)

$$3^2 = (\sqrt{x+1} - 2)^2$$

$$3^2 = (\sqrt{x+1})^2 - 4 \cdot \sqrt{x+1} + 2^2$$

Die rechte Umformung ist korrekt, aber nicht hilfreich, denn die Wurzel ist noch immer vorhanden. Besser erst die Wurzel separieren $5 = \sqrt{x+1}$ und dann quadrieren!

Rechnen Sie sorgfältig!!

Example

$$3 \;=\; e^x - 2$$

Falsch

$$\ln(3) = x - \ln(2)$$

Richtig(er)

$$\ln(3) \;=\; \ln(e^x - 2)$$

Die rechte Umformung ist korrekt, aber auch hier kommen wir nicht weiter, denn es gibt keine $\ln$-Regel um die rechte Seite weiter zu vereinfachen. Besser erst den e-Term separieren $5 = e^x$ und dann Logarithmieren.

- System

$$\begin{aligned} 2x+3y &= 4 \\ -2x+2y &= 6 \end{aligned}$$

- (irgend)eine Gleichung nach (irgend)einer Variablen auflösen

$$\begin{aligned} 2x+3y &= 4 \\ y &= \frac{6+2x}{2} = 3+x \end{aligned}$$

- Elimination dieser Variablen aus der anderen Gleichung

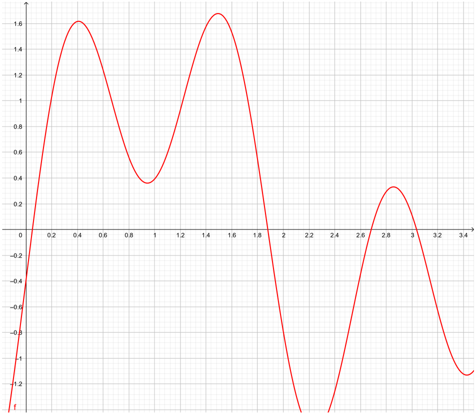
$$2x+3(3+x) = 4 \quad \text{auflösen nach } x \quad x = \underline{-1}$$

- die andere Variable bestimmen

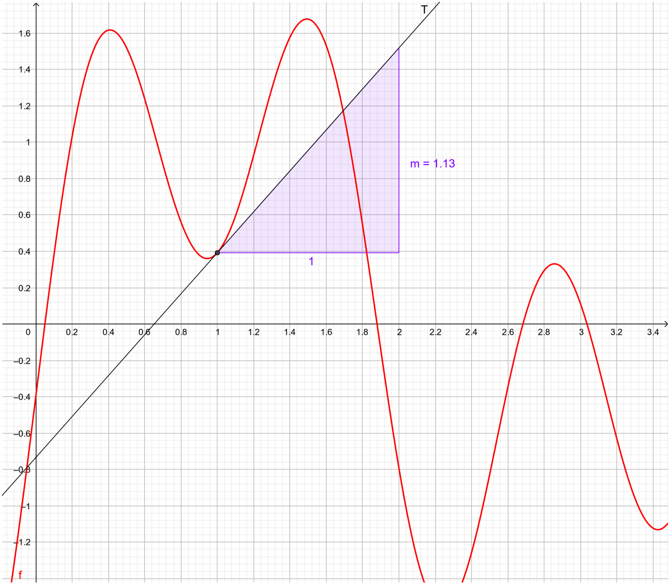
$$y = 3+x = 3+(-1) = \underline{2}$$

Example (Fundamentalaufgabe)

In der folgenden Abbildung sehen Sie den Graphen einer Funktion f. Bestimmen Sie mit Hilfe von Lineal und Zeichendreieck näherungsweise den Wert $f'(1)$.

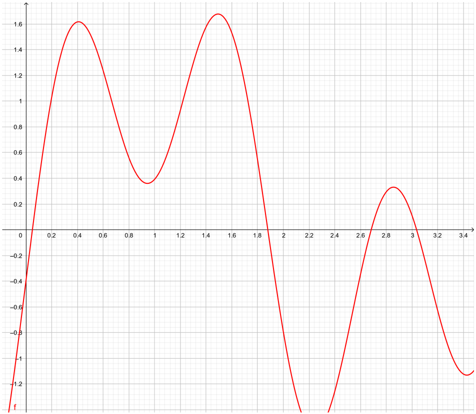


Deutung der Ableitung



Example (Fundamentalaufgabe)

In der folgenden Skizze sehen Sie den Graphen einer Funktion f. Machen Sie in dieser Skizze kenntlich, wo man das bestimmte Integral $\int_1^2 f(x)\,dx$ sehen kann.



Deutung des bestimmten Integrals