

**MATHEMATIK
Grundlagenfach**

	Kapitel	Seite
Bildungsziele	M1	1
Programm für das normale Niveau		3
Programm für das erweiterte Niveau		6

MATHEMATIK

I. BILDUNGSZIELE

Der Mathematikunterricht ermöglicht dem Lernenden umfangreiche Methoden zu erwerben, die sich in Form von Denkweisen und von Strukturen ausprägen und als Kenntnisse, Fertigkeiten und Haltungen in Erscheinung treten.

Die **Kenntnisse**, die von der Kandidatin und vom Kandidaten an der schweizerischen Maturitätsprüfung erwartet werden sind im nachfolgenden Programmteil beschrieben.

Diese Kenntnisse setzen die Entwicklung und die Anreicherung folgender Fertigkeiten voraus:

- Geschick in der Benutzung mathematischer Werkzeuge;
- Beherrschung der Regeln, Prinzipien und Strenge im logischen Denken;
- Fähigkeit zur geometrischen Anschauung;
- Fähigkeit, mathematische Methoden auf bekannte Sachverhalte in verschiedenen Gebieten anzuwenden;
- Fähigkeit, Arbeits- und Untersuchungsmethoden zu verwenden;
- Fähigkeit, Aussagen klar und präzise zu formulieren;
- Fähigkeit, im Rahmen einer Modellbildung erhaltene Resultate kritisch zu beurteilen;
- Fähigkeit, Analogien aufzustellen;
- Fähigkeit, zu erklären und zu diskutieren.

Der Erwerb von Kenntnissen und Fertigkeiten setzt die Entwicklung von verschiedenen Verhaltensweisen voraus, wie etwa Leistungswille und Ausdauer, Selbständigkeit in der Arbeit, Einbildungskraft, Neugier, Offenheit, geistige Beweglichkeit, Intuition; Sinn für Genauigkeit und logische Kohärenz, intellektuelle Redlichkeit, Bereitschaft zur Analyse und zur Synthese, Sinn für die Ästhetik einer Theorie und einer geistigen Disziplin.

II. PRÜFUNGSVERFAHREN

A. Schriftliche Prüfung

Die Prüfung dauert 4 Stunden.

Es werden obligatorische und fakultative Probleme gestellt. Die ausgehändigten Prüfungsdokumente geben die Erfordernisse zum Erlangen der maximalen Bewertung an.

Die Benutzung von numerischen Tafeln, Formelsammlungen und Taschenrechnern ist erlaubt. Persönliche Notizen in den zugelassenen Nachschlagewerken sind nicht erlaubt. Die Rechner müssen Taschenformat haben. Sie dürfen einfache Graphen erzeugen, aber keine algebraische Rechenfähigkeit haben, keine Textverarbeitung ermöglichen und keine Fähigkeit zum Empfang und Senden von Informationen auf Distanz enthalten.

Die Prüfungen für das normale und das erweiterte Niveau sind verschieden.

B. Mündliche Prüfung

Die mündliche Prüfung dauert 15 Minuten.

Es gibt keine Vorbereitungszeit und es sind keine Hilfsdokumente zugelassen.

Das Thema wird nach dem Zufallsprinzip ausgewählt. Die mündliche Prüfung beinhaltet im wesentlichen die Entwicklung dieses ausgelosten Themas.

Die Kandidatin/der Kandidat gestaltet das Examen selbständig und strukturiert ihre/seine Darstellung. Sie/er integriert die Interventionen der Examinatorin/des Examinators.

III. BEWERTUNGSKRITERIEN

Im Allgemeinen ist davon auszugehen, dass der Qualität der Ausdrucksweise grosse Bedeutung beigemessen wird. Dies heisst für die Kandidatin/den Kandidaten:

- Klarer Sprachgebrauch unter Verwendung eines präzisen 'mathematischen' Vokabulars;
- Strukturieren des Diskurses, der Darstellung oder des Beweises;
- angemessene Reaktionen auf die Interventionen des Examinators;
- zum gegebenen Thema sprechen.

Im Speziellen gelten folgende Bewertungskriterien:

Aspekt der Kenntnisse

- Kenntnisse von Begriffen, Konventionen, Relationen, Techniken und Konzepten in Verbindung mit mathematischen Eigenschaften;
- Fähigkeit, Gegebenheiten, Eigenschaften und Relationen zu identifizieren;
- Fähigkeit, einen Taschenrechner, numerische Tafeln und Formelsammlungen zu verwenden;
- Fähigkeit, sich in einer korrekten Syntax auszudrücken;
- Beherrschung der mathematischen Sprache, der Rechentechniken und des formalen Rechnens.

Aspekt der Methoden und der der Disziplin eigenen Denkweise

- Fähigkeit zu formalisieren, mit Symbolen zu arbeiten und Modelle zu konstruieren;
- Beherrschung der Regeln, der Prinzipien und Strenge im logischen Denken;
- Genauigkeit in der Behandlung eines Problems und dessen Lösung;
- Fähigkeit zu abstrahieren und zu verallgemeinern;
- Exaktheit der Lösungen;
- Rechengenauigkeit.

Aspekt des kritischen Denkens und des unabhängigen Urteils

- Autonomie;
- Fähigkeit, Kenntnisse wiederzugeben, so dass sie klar strukturiert, in präziser Sprache und in korrekter Artikulation von Denkschritten mitgeteilt werden können;
- Unterscheidung von fundamentalen und nebensächlichen Sachverhalten;
- Fähigkeit, ein Resultat kritisch zu beurteilen.

IV. PROGRAMME

A. Programm für das normale Niveau

Algebra

Die Kandidatin/der Kandidat kann:

Gleichungen, Ungleichungen und Systeme

- Gleichungen und Systeme von Gleichungen 1. Grades mit einer, zwei oder drei Variablen lösen und verschiedene Lösungsmethoden beschreiben
- Ungleichungen mit einer Variablen lösen
- die Auflösungsformel der Gleichung zweiten Grades erklären, beweisen und anwenden
- Graphen einer Funktion zweiten Grades darstellen
- die Formel von Vieta beweisen und Polynome zweiten Grades faktorisieren
- Gleichungen lösen, die auf Gleichungen zweiten Grades zurückgeführt werden

Analysis

Die Kandidatin/der Kandidat kann:

übliche Funktionen

- Funktionen beschreiben (Definitionsbereich, Eigenschaften, Graphen) und folgende üblichen Funktionen anwenden: konstante Funktion, Identität, lineare und affine Funktion, Wurzelfunktion, Potenzfunktion, Betragsfunktion, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, e^x , a^x , $\ln(x)$, $\log_a(x)$

Grenzwerte, Stetigkeit

- den Grenzwert- und Stetigkeitsbegriff für Funktionen intuitiv darstellen
- Grenzwerte für $x \rightarrow a$ und $x \rightarrow \infty$ auch für unbestimmte Ausdrücke $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ berechnen
- die senkrechten und schiefen Asymptoten einer Funktion definieren und bestimmen

Ableitungen

- die Ableitbarkeit einer Funktion in einem Punkt und in einem Intervall definieren
- die graphischen Elemente, die in der Definition der Ableitung auftreten, interpretieren
- die Ableitung von Funktionen nach der Summenregel, Produktregel, Quotientenregel erklären und beweisen
- Ableitungen unter Verwendung der Definition und der Ableitungsregeln (inklusive der Kettenregel) berechnen
- den Satz, der die Beziehung zwischen erster Ableitung und Kurvenverlauf verknüpft, erklären und anwenden
- die Ableitung zur Lösung von Optimierungsproblemen anwenden
- eine vollständige Kurvendiskussion einer ableitbaren oder stückweise definierten Funktion (Definitionsbereich, Symmetrie, Periodizität, Asymptoten, Nullstellen, Extrema und Wendepunkte) durchführen und den zugehörigen Graphen darstellen

- Stammfunktionen, Integrale**
- eine Stammfunktion definieren, ihre Eigenschaften anwenden, Stammfunktionen der üblichen Funktionen berechnen
 - den Integralbegriff intuitiv und als Grenzwert von Summen darstellen
 - Stammfunktionen zur Berechnung von Integralen anwenden
 - die Integralrechnung zur Bestimmung von Flächeninhalten, die durch Graphen von Funktionen begrenzt sind, anwenden

Geometrie

Die Kandidatin/der Kandidat kann:

- Trigonometrie**
- auf dem Einheitskreis den Sinus und Kosinus eines Winkels oder einer reellen Zahl interpretieren und daraus die Periodizität der trigonometrischen Funktionen ablesen
 - die fundamentalen Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen gleicher Winkel, komplementärer Winkel, supplementärer Winkel und Gegenwinkel erklären und beweisen
 - die Additionstheoreme erklären und beweisen
 - einfache goniometrische Gleichungen des Typus $\sin(ax) = b$ lösen
 - den Sinus- und Kosinussatz erklären und beweisen
 - Dreiecksaufgaben lösen (rechtwinklige und beliebige Dreiecke)
- vektorielle Geometrie der Ebene und des Raumes**
- den Vektorbegriff, die Vektoraddition und die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar mit den zugehörigen Eigenschaften, sowie die Begriffe der Linearkombination von Vektoren und der kollinearen und komplanaren Vektoren darstellen
 - vektorielle Basen der Ebene und des Raumes und der zugehörigen Koordinatensysteme in Beziehung setzen, insbesondere orthonormierte Basen und Koordinatensysteme
 - die Koordinaten des Mittelpunktes einer Strecke, des Schwerpunktes eines Dreieckes und die Norm eines Vektors bestimmen
 - das Skalarprodukt (algebraische und trigonometrische Darstellung) definieren und seine Eigenschaften anwenden
 - das Vektorprodukt definieren und seine Eigenschaften anwenden
 - den Abstand zweier Punkte und des Winkels zwischen zwei Vektoren berechnen
 - die Fläche eines Parallelogramms und jene eines Dreieckes berechnen
- analytische Geometrie der Ebene**
- die Parametergleichungen und die Normalenform einer Geraden erstellen und damit den Richtungsvektor, den Normalenvektor, die Steigung und den senkrechten Achsenabschnitt im Ursprung herleiten
 - die gegenseitige Lage zweier Geraden diskutieren und ihren eventuell existierenden Schnittpunkt berechnen
 - den Zwischenwinkel zweier Geraden berechnen, den Abstand eines Punktes von einer Geraden, die Gleichungen der Winkelhalbierenden zweier Geraden bestimmen
 - die kartesische Kreisgleichung und die Gleichungen ihrer Tangenten erstellen

Stochastik

Die Kandidatin/der Kandidat kann:

beschreibende Statistik

- auf einfache Situationen die Begriffe Population, Bestand und relative Häufigkeit anwenden
- eine Verteilung anhand eines Kreis- oder Stabdiagrammes oder eines Histogrammes darstellen
- Masszahlen einer Verteilung (Mittelwert, Varianz und Standardabweichung) definieren und interpretieren

Wahrscheinlichkeiten

- die Begriffe Zufallsexperiment, Ergebnis, Ereignis, Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses darstellen
- die Ereignisse nicht-A, A oder B, A und B, unabhängige und unvereinbare (disjunkte) Ereignisse definieren
- den Satz

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

erklären und beweisen

- die Formel der bedingten Wahrscheinlichkeit anwenden

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- einen Ergebnisbaum anwenden
- die Binomialverteilung anwenden

B. Programm für das erweiterte Niveau

Algebra

Die Kandidatin/der Kandidat kann:

Gleichungen, Ungleichungen und Systeme

- Gleichungen und Systeme von Gleichungen 1. Grades mit einer, zwei oder drei Variablen lösen und verschiedene Lösungsmethoden beschreiben
- Ungleichungen mit einer Variablen lösen
- Systeme von Ungleichungen mit zwei Variablen graphisch lösen
- die Auflösungsformel der Gleichung zweiten Grades erklären, beweisen und anwenden
- Graphen einer Funktion zweiten Grades darstellen
- die Formel von Vieta beweisen und Polynome zweiten Grades faktorisieren
- Gleichungen lösen, die auf Gleichungen zweiten Grades zurückgeführt werden
- formale Gleichungen und Ungleichungen mit Parameterdiskussion lösen

komplexe Zahlen

- den Begriff der komplexen Zahl und ihrer verschiedenen Formen (algebraische, trigonometrische und Exponentialform) darstellen
- die Operationen unter all ihren obengenannten Formen definieren, ihre Eigenschaften und die Formel von Moivre darstellen
- eine komplexe Zahl in der Gauss'schen Ebene darstellen, ihre Teile identifizieren (Real- und Imaginärteil, Modul und Argument)
- Gleichungen in der Menge \mathbb{C} lösen
- eine Addition oder eine Multiplikation einer komplexen Zahl mit einer weiteren komplexen Zahl, mit der imaginären Zahl i , sowie die Abbildungen von \mathbb{C} nach \mathbb{C} vom Typ $(z \rightarrow a \cdot z + b)$ geometrisch interpretieren.

Analysis

Die Kandidatin/der Kandidat kann:

übliche Funktionen

- die folgenden üblichen Funktionen (Definitionsbereich, Eigenschaften, graphische Darstellung) beschreiben: konstante Funktion, Identität, lineare und affine Funktion, Potenzfunktion, Wurzelfunktion, Betragsfunktion, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$, e^x , a^x , $\ln(x)$, $\log_a(x)$

reelle Folgen

- das Prinzip der vollständigen Induktion erklären, und es zum Beweis von Sätzen anwenden
- eine Folge durch ihren allgemeinen Term oder durch vollständige Induktion, insbesondere eine arithmetische oder geometrische Folge, definieren
- die Begriffe der konvergenten Folgen und der Grenzwerte definieren und illustrieren
- die Formel für die Summe der n ersten Terme einer arithmetischen und geometrischen Folge darstellen und beweisen
- die Konvergenz einer geometrischen Folge und der zugehörigen Reihe diskutieren

Grenzwerte, Stetigkeit

- den Grenzwertbegriff einer Funktion in einem Punkt und im Unendlichen definieren und erklären
- die Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt und in einem Intervall definieren
- Grenzwerte für $x \rightarrow a$ und $x \rightarrow \infty$ und auch für unbestimmte Ausdrücke

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$$

berechnen

- senkrechte und schiefe Asymptoten einer Funktion definieren und bestimmen

Ableitungen

- die Ableitbarkeit einer Funktion in einem Punkt und in einem Intervall definieren
- die graphischen Elemente interpretieren, die in der Definition der Ableitung auftreten
- die Relation zwischen Ableitbarkeit und Stetigkeit erklären
- die Ableitung von Funktionen nach der Summenregel, Produktregel, Quotientenregel, die Ableitung von zusammengesetzten Funktionen und die Ableitung der Umkehrung einer Bijektion erklären und beweisen
- Ableitungen unter Verwendung der Definition und von Ableitungsregeln berechnen
- die Sätze von Rolle und die Sätze der endlichen Zuwächse (Lagrange), die Regel von de l'Hospital darstellen und illustrieren
- die Beziehung zwischen erster Ableitung und Kurvenverlauf erklären und anwenden
- die Beziehung zwischen zweiter Ableitung, Konkavität, Konvexität und Wendepunkt erklären und anwenden
- Ableitungen zur Lösung von Optimierungsproblemen anwenden
- eine vollständige Kurvendiskussion einer ableitbaren oder stückweise definierten Funktion (Definitionsbereich, Symmetrie, Periodizität, Asymptoten, Nullstellen, Extrema und Wendepunkte) durchführen und den zugehörigen Graphen darstellen

Stammfunktionen, Integrale

- den Begriff der Stammfunktion definieren, ihre Eigenschaften darstellen und beweisen
- Stammfunktionen unter Verwendung der Integrationsregel der Substitution und der Regel der partiellen Integration für übliche Funktionen berechnen erklären
- das Integral als Riemann'sche Summe präsentieren
- den Hauptsatz der Integralrechnung erklären und beweisen, diesen Satz zur Berechnung von Integralen anwenden
- die Integralrechnung zur Bestimmung von Flächeninhalten, die durch Graphen von Funktionen begrenzt sind, anwenden
- Volumen von Rotationskörpern berechnen.

- Trigonometrie**
- auf dem Einheitskreis den Sinus und Kosinus eines Winkels oder einer reellen Zahl interpretieren und daraus die Periodizität der trigonometrischen Funktionen ablesen
 - die fundamentalen Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen gleicher Winkel, komplementärer Winkel, supplementärer Winkel und Gegenwinkel erklären und beweisen
 - die Additionstheoreme erklären und beweisen
 - einfache goniometrische Gleichungen anhand der Sätze lösen, die aus den Additionstheoremen hergeleitet sind
 - den Sinus- und Kosinussatz erklären und beweisen
 - Dreiecksaufgaben lösen (rechtwinklige und beliebige Dreiecke)
- vektorielle Geometrie der Ebene oder des Raumes**
- den Vektorbegriff, die Vektoraddition und die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar mit den zugehörigen Eigenschaften, sowie die Begriffe der Linearkombination von Vektoren darstellen
 - die Begriffe der kollinearen und komplanaren Vektoren definieren und anwenden
 - vektorielle Basen der Ebene und des Raumes und der zugehörigen Koordinatensysteme in Beziehung setzen, insbesondere orthonormierte Basen und Koordinatensysteme
 - die Koordinaten des Mittelpunktes einer Strecke, des Schwerpunktes eines Dreieckes und die Norm eines Vektors bestimmen
 - das Skalarprodukt (algebraische und trigonometrische Darstellung) definieren und seine Eigenschaften anwenden
 - das Vektorprodukt und das Spatprodukt definieren und ihre geometrischen Eigenschaften angeben und diese Begriffe anwenden
 - den Abstand zweier Punkte und des Winkels zwischen zwei Vektoren berechnen
 - die Fläche eines Parallelogramms und jene eines Dreieckes berechnen
 - das Volumen eines Parallelepipeds berechnen
- analytische Geometrie der Ebene**
- die Parametergleichungen und die Normalenform einer Geraden erstellen und damit den Richtungsvektor, den Normalenvektor, die Steigung und den senkrechten Achsenabschnitt im Ursprung herleiten
 - die gegenseitige Lage zweier Geraden diskutieren und ihren eventuell existierenden Schnittpunkt berechnen
 - den Zwischenwinkel zweier Geraden berechnen, den Abstand eines Punktes von einer Geraden, die Gleichungen der Winkelhalbierenden zweier Geraden bestimmen
 - die kartesische Kreisgleichung und die Gleichungen ihrer Tangenten erstellen
 - die Ellipse, die Parabel und die Hyperbel (Brennpunkte, Leitgeraden, Exzentrizität, Asymptoten) definieren und ihre Eigenschaften darstellen, daraus die Hauptachsengleichungen herleiten
 - Parametergleichungen der Ellipse anwenden

- analytische Geometrie des Raumes**
- die Parametergleichungen der Gerade erstellen und daraus den Richtungsvektor herleiten
 - Parametergleichungen und kartesische Gleichung (Normalformen) der Ebene erstellen und daraus Richtungsvektoren und Normalenvektor ermitteln
 - die gegenseitigen Lagen zweier Geraden, einer Ebene und einer Geraden oder zweier Ebenen untersuchen und ihre eventuell existierende Schnittmenge bestimmen
 - den Abstand zweier Punkte und jenen eines Punktes von einer Geraden bestimmen
 - den Winkel zwischen zwei Geraden, zwischen einer Geraden und einer Ebene, zwischen zwei Ebenen bestimmen
 - die kartesischen Gleichungen der Kugel und der Tangentialebene erstellen.

lineare Algebra Die Kandidatin/der Kandidat kann:

- Vektorräume von 2 und 3 Dimensionen**
- die Struktur eines reellen Vektorraumes definieren und diese im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 und anderen Beispielen erkennen
 - Unterräume von Vektorräumen konstruieren und darin Basen und Dimension bestimmen

- lineare Abbildungen, Matrizen**
- eine lineare Abbildung zwischen linearen Vektorräumen erkennen und deren Kern und Bildraum berechnen
 - den Matrixbegriff zur Beschreibung der linearen Abbildung relativ zu einer Basis anwenden
 - die Summe von zwei linearen Abbildungen, das Produkt einer linearen Abbildung mit einer reellen Zahl, die Zusammensetzung zweier linearer Abbildungen mit Hilfe von Operationen auf den zugeordneten Matrizen beschreiben
 - den Begriff der Determinante einer 2×2 oder 3×3 Matrix definieren
 - die Umkehrung einer bijektiven linearen Abbildung mit Hilfe der inversen Matrix beschreiben
 - die Eigenwerte und Eigenvektoren einer linearen Abbildung definieren, geometrisch interpretieren und berechnen, die Unterräume, die einem Eigenwert zugeordnet sind, bestimmen
 - obige Begriffe anhand von Symmetrien, Rotationen, Ähnlichkeiten, Projektionen und Affinitäten im \mathbb{R}^2 und im \mathbb{R}^3 illustrieren.

Stochastik Die Kandidatin/der Kandidat kann:

- beschreibende Statistik**
- auf einfache Situationen die Begriffe Population, Bestand und relative Häufigkeit anwenden
 - eine Verteilung anhand eines Kreis- oder Stabdiagrammes oder eines Histogrammes darstellen
 - Masszahlen einer Verteilung (Mittelwert, Median, Varianz und Standardabweichung) definieren und interpretieren

Kombinatorik

- einfache Anordnungen (Variationen, Kombinationen) mit oder ohne Wiederholungen, Permutationen mit oder ohne Wiederholungen erkennen und unterscheiden, diese abzählen und zur Lösung einfacher kombinatorischer Probleme anwenden
- die Koeffizienten des Pascal'schen Dreieckes berechnen und im Zusammenhang mit dem binomischen Lehrsatz anwenden.

Wahrscheinlichkeiten

- die Begriffe Zufallsexperiment, Ergebnis, Ereignis, Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses darstellen
- die Ereignisse nicht-A, A oder B, A und B, unabhängige und unvereinbare (disjunkte) Ereignisse definieren
- das sichere und unmögliche Ereignis definieren
- den Satz

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

erklären und beweisen

- die Formel der bedingten Wahrscheinlichkeit anwenden

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- unabhängige Ereignisse und Folgen von Zufallsversuchen erkennen
- einen Ergebnisbaum anwenden
- die Binomialverteilung anwenden

Zufallsvariablen

- eine Zufallsvariable, eine diskrete und stetige Zufallsvariablen, ein Wahrscheinlichkeitsgesetz und eine Wahrscheinlichkeitsdichte definieren
- den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung einer Zufallsvariable berechnen, insbesondere im Falle einer Binomial- oder Normalverteilung.