Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

Mathematischer Vorkurs
Dr. Thomas Zehrt

Aufgabensammlung
Differential- und Integralrechnung

Aufgaben

1. (**Fundamentalaufgabe**) Angenommen, Sie können den Graphen einer Funktion $y = f(x)$ skizzieren. Wo kann man die reellen Zahlen

$$f'(a), f'(b), f'\left(\frac{a+b}{2}\right), \int_a^b f(x)dx\,, \int_{-\infty}^b f(x)dx \quad \text{und} \quad \int_a^{\infty} f(x)dx$$

„sehen" ?

2. Bestimmen Sie unter Verwendung der (Ableitungs)regeln die Ableitungen der folgenden Funktionen:

   (a) $y = 7 \cdot (4-x)^8$
   (b) $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x}$
   (c) $y = \sin(2x^2)$
   (d) $y = \sqrt{1 - \cos(3x)}$
   (e) $y = \dfrac{\sin(x)}{1 + e^x}$
   (f) $y = x \cdot \ln(4x)$
   (g) $y = e^{\sqrt{x}}$

3. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

   (a) $f_1(x) = \dfrac{3x+1}{x-4}$ für $x \neq 4$
   (b) $f_2(x) = xe^{\sqrt{x}}$
   (c) $f_3(x) = \ln\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$
   (d) $f_4(x) = 7^{3x}$
   (e) $f_5(x) = x^x$

Falls nötig: Die Funktion x^x kann in dieser Form weder mit der Potenzregel ($(x^n)' = nx^{n-1}$) abgeleitet werden (der Exponent ist nicht konstant) noch kann sie mit der Regel zum Ableiten von Exponentialfunktionen ($(a^x)' = \ln(a)a^x$) differenziert werden (die Basis ist nicht konstant).
Es ist ganz allgemein möglich, jede Exponentialfunktion a^x auf die Basis e umzuschreiben:

$$\begin{aligned} a^x &= \left(e^{\ln(a)}\right)^x &= e^{\ln(a)\cdot x} \\ x^x &= \left(e^{\ln(x)}\right)^x &= e^{\ln(x)\cdot x} \end{aligned}$$

4. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale. Versuchen Sie dabei die jeweilige Stammfunktion zu erraten und bestätigen Sie Ihr Ergebnis durch ableiten.

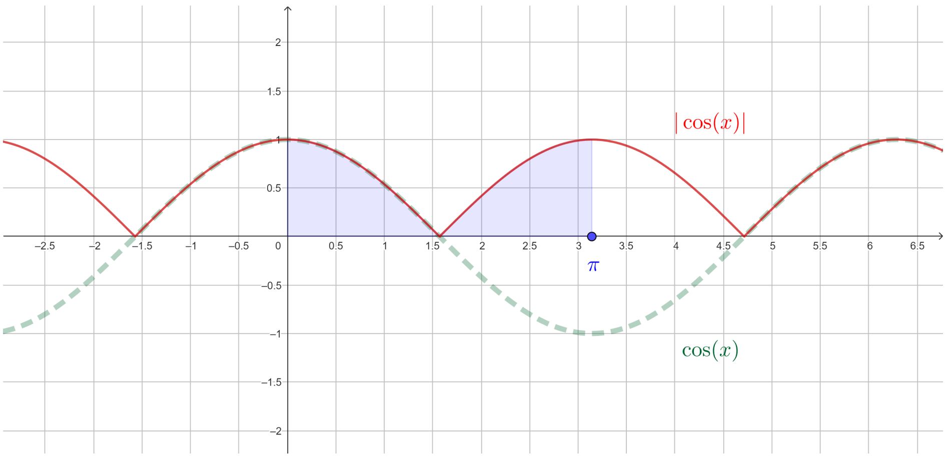
   (a) $\displaystyle\int_0^2 e^{0.5x}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^2 3^x\,dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^\pi |\cos(x)|\,dx$

   Falls nötig: Beachten Sie zunächst, dass es **keine** Integrationsregel der Art $\displaystyle\int |f(x)|\,dx = \left|\int f(x)\,dx\right|$ gibt. Sie können also nicht einfach die Stammfunktion vom Kosinus in den Betrag setzen; und dann die Grenzen einsetzen! Beginnen Sie mit einer Skizze der Funktion $|\cos(x)|$, dann sollte Ihnen eine Lïosungsweg einfallen.



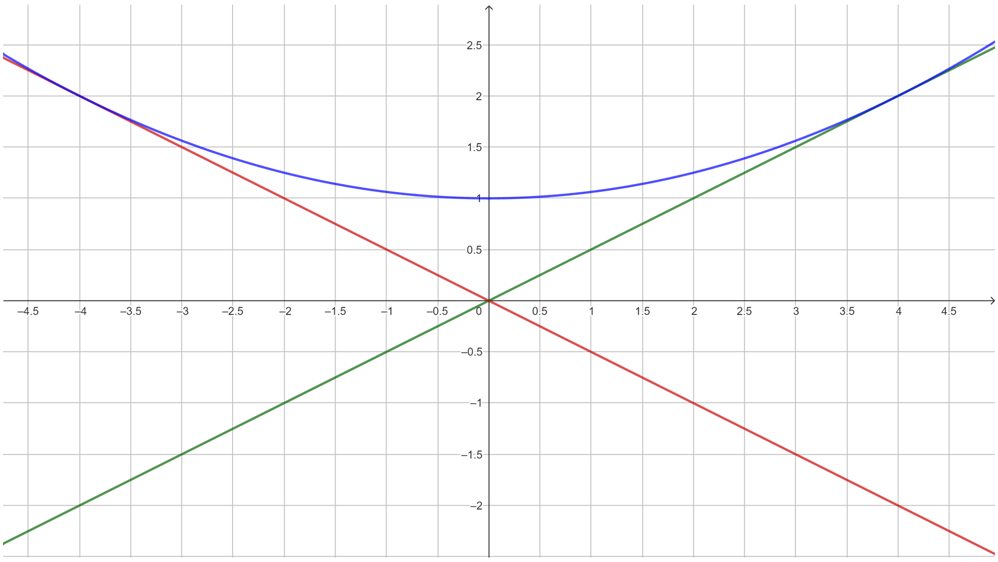
5. Sei $f(x) = x^2 + x + 1$. Bestimmen Sie die Integralfunktionen $F_{-2}(x)$, $F_0(x)$, $F_2(x)$ und $F_a(x)$ allgemein.

6. Gesucht ist die Fläche, die von den Funktionen

$$y = \frac{1}{2}x, \quad y = -\frac{1}{2}x \quad \text{ und } y = \frac{1}{16}x^2 + 1$$

eingeschlossen wird.

Falls nötig: Damit Sie wissen, was zu tun ist (also über welche Fläche wir hier sprechen), benötigt man eine (gute) Skizze (versuchen Sie es per Hand!).



Dazu ist es nötig, die Schnittpunkte der Geraden mit der (quadratischen) Parabel zu bestimmen. Machen Sie sich auch klar, dass eine Gerade und eine Parabel sich in zwei, einem oder keinem Punkt schneiden können.

7. Es sei die Kostenfunktion (sie gibt die (Produktionskosten)Kosten $k(x)$ als Funktion der produzierten Stückzahl x an)

$$k(x) := \begin{cases} x^2 + 5 & \text{für } x \in [0, 2] \\ x + 8 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

   gegeben. Skizzieren Sie die Funktion und berechnen Sie $\displaystyle\int_0^3 k(x)dx$.

8. Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von den beiden Parabeln $y = x^2$ und $y = -x^2 + 5$ begrenzt wird.

9. Finden Sie die Funktionsgleichung einer Kurve, deren Anstieg durch die Gleichung $f(x) = 3x - 2$ beschrieben wird und deren Funktionswert im Punkt $x = 4$ gleich 1 ist.

Lösungen der Aufgaben

1.

2. $a)\ -56(4-x)^7$,

   $b)\ \dfrac{2x-5}{3(x^2-5x)^{2/3}}$,

   $c)\ 4x \cdot \cos(2x^2)$,

   $d)\ \dfrac{3 \cdot \sin(3x)}{2\sqrt{1-cos(3x)}}$,

   $e)\ \dfrac{\cos(x)(1+e^x) - e^x \sin(x)}{(1+e^x)^2}$

   $f)\ 1 + \ln(4x)$ und

   $g)\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

3. $a)\ f_1' = \dfrac{-13}{(x-4)^2}$,

   $b)\ f_2' = \left(1 + \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right) e^{\sqrt{x}}$,

   $c)\ f_3' = \dfrac{-2x}{1+x^2}$,

   $d)\ f_4' = 3 \cdot \ln(7) \cdot 7^{3x}$

   $e)\ f_5' = (1 + \ln(x))x^x$

4. $a)\ \ 2e-2,\ \ b)\ \ \ln(2),\ \ c)\ \ 8/\ln(3),\ \ d)\ \ 2$

5. $F_{-2}(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{8}{3}$,

   $F_0(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x$,

   $F_2(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x - \dfrac{20}{3}$

   $F_a(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x - \dfrac{1}{3}a^3 - \dfrac{1}{2}a^2 - a$

6. $8/3$

7.

$$\begin{aligned}
\int_0^3 k(x)dx &= \int_0^2 (x^2+5)\ dx + \int_2^3 (x+8)\ dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 + 5x\right]_0^2 + \left[\frac{1}{2}x^2 + 8x\right]_2^3 \\
&= \frac{139}{6}
\end{aligned}$$

8. Schnittpunkte: $\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

   Fläche: $2 \cdot \int_0^{\sqrt{\frac{5}{2}}} (-x^2 + 5 - x^2)dx \;=\; \frac{10}{3}\sqrt{10} \;=\; 10.5409$

9. $g(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x - 15$