Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

Mathematischer Vorkurs
Dr. Thomas Zehrt

Differential- und Integralrechnung

Inhaltsverzeichnis

1 Differenzen- und Differentialquotient **2**

2 Differentiationsregeln **5**

3 Ableitung spezieller Funktionen **6**

4 Unbestimmtes und bestimmtes Integral **7**

4.1 Stammfunktion und unbestimmtes Integral 7

4.2 Das bestimmte Integral 8

4.3 Integralfunktionen 9

1 Differenzen- und Differentialquotient

Gegeben sei eine stetige Funktion $y = f(x)$.

Wir definieren zunächst den Term Δx als die Änderung der Variablen x. Wir könnten diese Änderung uch einfach durch einen anderen Variablennamen bezeichnen, z.B. durch h, aber diese Δ-Notation hat einige Vorteile. Ähnlich bezeichen wir durch $\Delta f(x, \Delta x)$ die echte Änderung der Funktion f, wenn sich die Variable x um Δx ändert:

$$\Delta f(x, \Delta x) \quad = \quad f(x + \Delta x) - f(x).$$

Definition 1.1 *Unter der durchschnittlichen Änderung der Funktion f im Intervall $[x, x + \Delta x]$ versteht man den Quotienten*

$$\frac{\Delta f(x, \Delta x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{\textit{Echte Änderung von} f}{\textit{Intervalllänge}} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Der Ausdruck $\frac{\Delta f(x,\Delta x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ wird auch als Differenzenquotient bezeichnet.

Im allgemeinen hängt der Differenzenquotient von den folgenden drei Grössen ab:

- der Funktion f,
- dem Punkt x und
- der Intervalllänge Δx.

Beispiele:

1. $y = f(x) = 2x + 3$

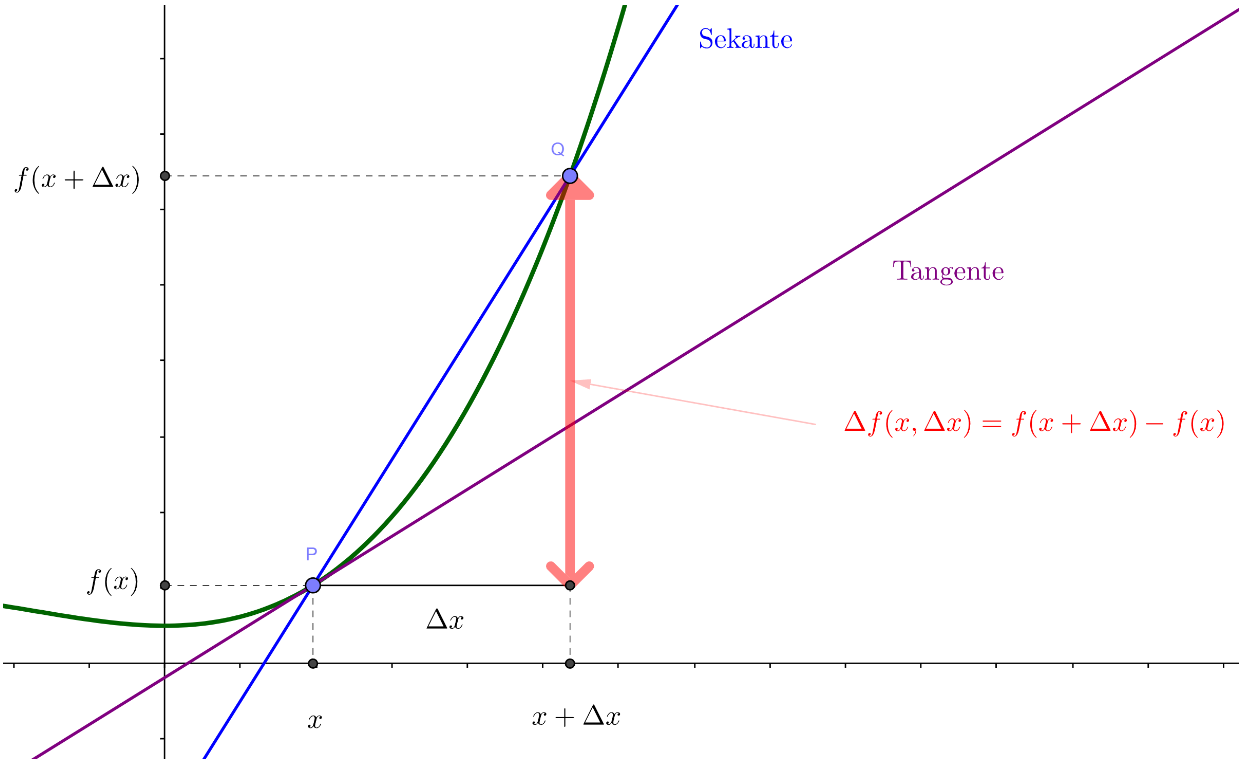
$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f(x, \Delta x)}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{2(x + \Delta x) + 3 - (2x + 3)}{\Delta x} \\
&= \frac{2x + 2\Delta x + 3 - 2x - 3}{\Delta x} \\
&= \frac{2\Delta x}{\Delta x} \\
&= 2
\end{aligned}$$

2. $y = f(x) = x^2$

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f(x, \Delta x)}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= 2x + \Delta x.
\end{aligned}$$

Natürlich hängt das Resultat direkt von der Funktion f ab und das Ergebnis (der Differenzenquotient) ist selbst eine Funktion, die auf die Eingabe der beiden Grössen x und Δx wartet, um uns daraus die durchschnittliche Änderung der Funktion auf dem Intervall $[x, x + \Delta x]$ zu berechnen.

Geometrische Deutung: Der Differenzenquotient ist gleich dem Tangens des Neigungswinkels σ der Sekante PQ. Lässt man nun den Punkt Q gegen P wandern, d.h. $\Delta x \to 0$ streben, so geht die Sekante in die Tangente im Punkt P über.



Definition 1.2 *Der Grenzwert*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

heisst der Differentialquotient oder 1. Ableitung der Funktion f an der Stelle x, falls dieser Grenzwert existiert. Er stellt in gewisser Weise die ,,momentane Änderung,, von f an der Stelle x dar.

Schreibweise:

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = Df(x)$$

Beispiele:

1. Für die Funktion $y = x^2$ wissen wir bereits, dass $\dfrac{\Delta f(x, \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$ gilt. Dann folgt einfach

$$\frac{df(x)}{dx} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x, \Delta x)}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) \;=\; 2x.$$

2. $y = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$

   $\dfrac{\Delta f(x, \Delta x)}{\Delta x} =$

   $\dfrac{df(x)}{dx} =$

2 Differentiationsregeln

Es gelten die folgenden (zum Teil einfach zu überprüfenden) Regeln:

Satz 2.1

1.	$y = k$ *konstant*	$y' = 0$	
2.	$y = a \cdot f(x)$ *mit* $a \in \mathbb{R}$	$y' = a \cdot f'(x)$	*Konstantenregel*
3.	$y = f(x) \pm g(x)$	$y' = f'(x) \pm g'(x)$	*Summenregel*
4.	$y = x^a$ *mit* $a \in \mathbb{R}$	$y' = a \cdot x^{a-1}$	*Potenzregel*
5.	$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	*Produktregel*
6.	$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *mit* $g(x) \neq 0$	$y' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$	*Quotientenregel*
7.	$y = f(g(x))$	$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	*Kettenregel*

Beispiele:

- (Potenzregel)

$$y = 5 \cdot x^5 \quad \Rightarrow \quad y' = 5 \cdot 5 \cdot x^{5-1} = 25 \cdot x^4$$

- (Summenregel und Potenzregel)

$$y = x^5 + x^4 \quad \Rightarrow \quad y' = 5 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3$$

- (Produkt-, Potenz- und Summenregel)

$$y = x^2 \cdot (x^3 + 7x - 1) \quad \Rightarrow \quad y' = 2x \cdot (x^3 + 7x - 1) + x^2 \cdot (3x^2 + 7)$$

- (Quotienten-, Potenz- und Summenregel)

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 7} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3x^2(x^2 - 7) - x^3(2x)}{(x^2 - 7)^2} \quad = \quad \frac{x^4 - 21x^2}{(x^2 - 7)^2}$$

- (Ketten-, Potenz- und Summenregel)

$$\begin{aligned} g(x) = x^2 - 7x^3 \quad f(u) = u^{21} \quad F(x) = f(g(x)) &= (x^2 - 7x^3)^{21} \\ \Rightarrow F'(x) \;=\; f'(g(x)) \cdot g'(x) \;&=\; 21(x^2 - 7x^3)^{20}(2x - 21x^2) \end{aligned}$$

3 Ableitung spezieller Funktionen

Satz 3.1 (Ableitungen der trigonometrischen Funktionen)

$$\boxed{\begin{array}{ll} y = \sin(x) & y' = \cos(x) \\[2ex] y = \cos(x) & y' = -\sin(x) \\[2ex] y = \tan(x) & y' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} \end{array}}$$

Satz 3.2 (Ableitungen der Logarithmus- und der Exponentialfunktionen)

$$\boxed{\begin{array}{ll} y = \ln(x) & y' = \dfrac{1}{x} \\[2ex] y = e^x & y' = e^x \\[2ex] y = a^x & y' = \ln(a) \cdot a^x \\[2ex] y = \log_a(x) & y' = \dfrac{1}{\ln(a)} \cdot \dfrac{1}{x} \end{array}}$$

4 Unbestimmtes und bestimmtes Integral

4.1 Stammfunktion und unbestimmtes Integral

Definition 4.1 *Eine Funktion $y = F(x)$ heisst Stammfunktion der Funktion $y = f(x)$, falls $F'(x) = f(x)$ gilt.*

Beispiel 4.1 *Man findet schnell eine Stammfunktion F für die Funktion $f(x) = x$, denn es gilt $(x^2/2)' = 2x/2 = x$, also ist $\frac{x^2}{2}$ eine Stammfunktion von f. Ebenfalls gilt für jede Zahl (Konstante) c die Gleichung $(x^2/2 + c)' = 2x/2 = x$, also ist auch jede Funktion der Gestalt $\frac{x^2}{2} + c$ eine Stammfunktion von f.*

Definition 4.2 (Das unbestimmte Integral) *Stammfunktionen einer Funktion $y = f(x)$ unterscheiden sich nur um eine additive Konstante. Die Menge aller Stammfunktionen von $y = f(x)$ nennt man unbestimmtes Integral und schreibt*

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Einige wichtige unbestimmte Integrale

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
0	$c,\ c \in \mathbb{R}$	1	$x + c,\ c \in \mathbb{R}$
$x^\alpha,\ \alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c,\ c \in \mathbb{R}$
e^x	$e^x + c,\ c \in \mathbb{R}$	e^{ax}	$\dfrac{e^{ax}}{a} + c,\ c \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + c,\ c \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c,\ c \in \mathbb{R}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + c,\ c \in \mathbb{R}$

4.2 Das bestimmte Integral

Definition 4.3 (Das bestimmte Integral) *Das bestimmte Integral ist gleich der Nettofläche unter der Kurve $y = f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$. Man schreibt dafür:*

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Eigenschaften des bestimmten Integrals

1. Es genügt vorauszusetzen, dass f stückweise stetig ist:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

2. Nimmt die Funktion auch negative Werte an, so ist der folgende Sachverhalt zu beachten: Das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

ist die Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse, **wobei Flächenstücke unterhalb der x-Achse negativ gezählt werden**.

3.

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$$

4.

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

5.

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

6.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

7. Für den Inhalt der Fläche **F** die von den Graphen der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossen wird gilt

$$area(\mathbf{F}) = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))dx \right|.$$

4.3 Integralfunktionen

Zunächst ist doch vollkommen unklar, ob überhaupt irgendein Zusammenhang zwischen dem unbestimmten und dem bestimmten Integral besteht. Was soll eine Stammfunktion F von f mit der Nettofläche unter dem Graphen von f zu tun haben? Die Antwort geben die beiden folgenden Hauptsätze.

Hält man die untere Integrationsgrenze a fest und variiert die obere Integrationsgrenze b, so erhält man für jeden Wert b genau einen (Netto)flächeninhalt $\int_a^b f(x)\,dx$. Um diese Variation besser verdeutlichen zu können ersetzt man b durch die Variable x und ersetzt die Integrationsvariable (was eigentlich nicht nötig ist, aber hoffentlich Missverständnissen vorbeugt) durch einen anderen Buchstaben, hier t.

Definition 4.4 *Die Funktion sei auf einem Intervall I stetig und $a, x \in I$. Dann heisst die Funktion*

$$F_a(x) \quad = \quad \int_a^x f(t)\,dt$$

Integralfunktion zu f (und a).

Bemerkungen

- Für positives f und $x > a$ lässt sich $F_a(x)$ als variabler Flächeninhalt unter dem Graphen von f ansehen.
- Je nach Festlegung der unteren Integrationsgrenze gibt es verschiedene Integralfunktionen für f.

Satz 4.1 (1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) *Es sei f auf einem Intervall I stetig. Dann ist jede Integralfunktion F_a von f mit $a \in I$ differenzierbar auf I und es gilt:*

$$F_a'(x) \;=\; \frac{d}{dx}\,F_a(x) \;=\; \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) \;=\; f(x).$$

Jede Integralfunktion ist somit eine Stammfunktion von f. (Die Umkehrung gilt allerdings nicht!)

Da also F_a eine Stammfunktion von f ist und sich jede andere Stammfunktion F von f nur um eine additive Konstante von F_a unterscheidet (d.h. $F_a(x) = F(x) + c$), gilt sofort:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,dt &= F_a(b) \\
&= F_a(b) - F_a(a) \\
&= (F(b) + c) - (F(a) + c) \\
&= F(b) - F(a)
\end{aligned}$$

für **jede** Stammfunktion F von f. Zusammengefasst ergibt das:

Satz 4.2 (2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) *Sei f eine auf dem Intervall $[a,b]$ stetige Funktion und F eine beliebige Stammfunktion von f. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b)-F(a).$$

Beispiel 4.2

1. *Sei $f(x)=x^2-1$ (oder $f(t)=t^2-1$). Dann gilt z.B.*

$$\begin{aligned}
F_3(x) &= \int_3^x f(t)\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_3^x = \frac{1}{3}x^3-x-\left(\frac{1}{3}3^3-3\right) = \frac{1}{3}x^3-x-6\\
F_0(x) &= \int_0^x f(t)\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_0^x = \frac{1}{3}x^3-x-\left(\frac{1}{3}0^3-0\right) = \frac{1}{3}x^3-x+0\\
F_a(x) &= \int_a^x f(t)\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_a^x = \frac{1}{3}x^3-x-\left(\frac{1}{3}a^3-a\right)
\end{aligned}$$

2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx \;=\; -\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \;=\; -\cos(\frac{\pi}{2})+\cos(0) \;=\; 1.$$

3. *Was halten Sie von der folgenden Rechnung*

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}dx \;=\; -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{2} \;=\; -\frac{1}{2}+1 \;=\; \frac{1}{2} \quad ???$$