

Vorkurs Mathematik

Einführung und Überblick

Thomas Zehrt

Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

Outline

- 1 Zahlenfolgen: Zinseszinsrechnung
- 2 Elementare Funktionen
 - Der Graph einer Funktion
 - Elementare Funktionen
- 3 Gleichungen und Ungleichungen
 - Struktur der Lösung
 - Polynome und ihre Nullstellen
 - Auflösen und Umkehrfunktion
 - Dividiere nie durch Variablen!!
 - Lass den Betrag nicht einfach weg!!
 - Sorgfältig Rechnen!
 - Fast keine Funktion ist linear!
- 4 Lösen linearer Gleichungssysteme durch Elimination
- 5 Deutung der Ableitung und des bestimmten Integral

Satz (Zinseszinsformel für einmalige Verzinsung)

Ein Anfangsguthaben K_0 , das zu einem Zinssatz p angelegt wird, wächst nach n Jahren zu einem Endkapital

$$K_n = K_0 \cdot (1 + p)^n$$

Ausgeschrieben:

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + p)$$

$$K_2 = K_0 \cdot (1 + p)^2 = K_0 \cdot (1 + p) \cdot (1 + p) = K_1 \cdot (1 + p)$$

$$K_3 = K_0 \cdot (1 + p)^3 = K_0 \cdot (1 + p)^2 \cdot (1 + p) = K_2 \cdot (1 + p)$$

Typische Fragen:

- Wie lange dauert es, bis sich K_0 bei festem p verdoppelt hat?

Löse $2 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1 + p)^n$ nach n auf:

$$n = n(p) = \frac{\ln(2)}{\ln(1 + p)}$$

- Doppeltes Anfangsguthaben \longrightarrow Doppeltes Endguthaben
- Doppelter Zins \longrightarrow ??

Example (Der Josephsrappen, *Richard Price, 1723-1791*)

Was hätte der Zinseszinseffekt aus vor 2000 Jahren angelegten 0.01 CHF gemacht?

- $p = 0.01 = 1\%$

$$K_{2000} = 0.01 \cdot 1.01^{2000} \approx 4'392'682, - \text{CHF}$$

- $p = 0.02 = 2\%$

$$K_{2000} = 0.01 \cdot 1.02^{2000} \approx 1'586'147'328'000'000, - \text{CHF}$$

Notenumlauf 2014 62'700'000'000, - CHF

Oft muss man Glieder von Zahlenfolgen aufaddieren → **Reihen** und **Partialsammenfolgen**

Example (Fundamentalaufgaben)

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

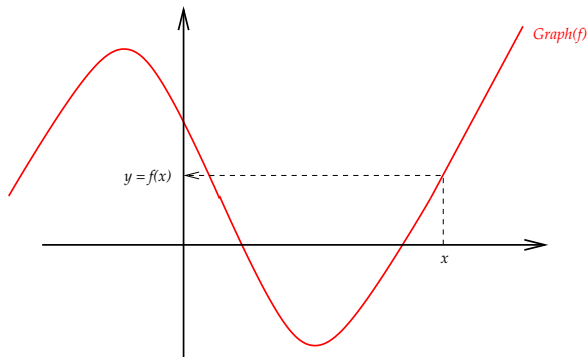
$$\sum_{k=1}^5 k \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^5 k$$

$$\sum_{k=2}^5 \frac{k}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{k=3}^5 k^2$$

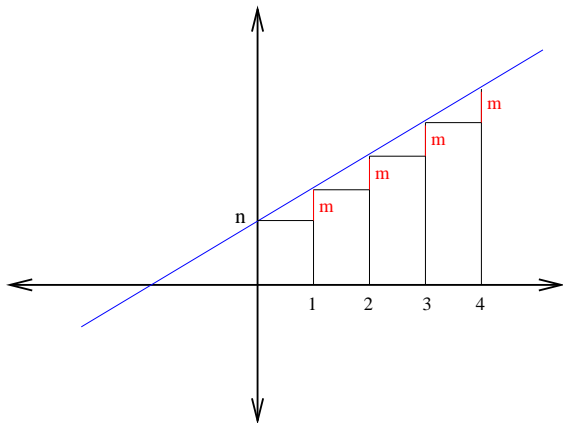
$$\sum_{k=1}^5 5 \quad \text{und} \quad \sum_{k=u}^o a_k$$

$$\sum_{k=1}^{5000} 100^k - \sum_{k=2}^{4999} 100^k$$

$$\text{Graph}(f) = \{ (x, f(x)) \mid x \in D \subset \mathbb{R} \}$$



Die **Gerade** $g(x) = mx + n$.



Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$g(x+1) = m \cdot (x+1) + n = mx + n + m = g(x) + m$$

Folgerung:

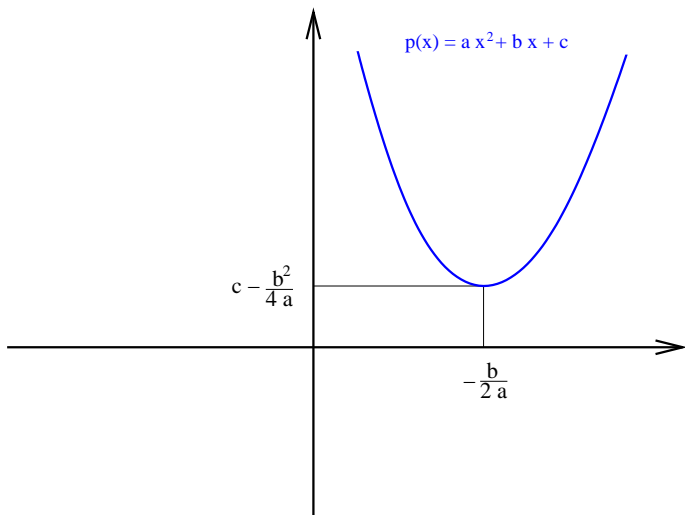
Eine Gerade ist durch zwei verschiedene Punkte **eindeutig** bestimmt, d.h. aus der Kenntnis von zwei Punkten auf der Geraden, kann die Geradengleichung hergeleitet werden.

Example (Fundamentalaufgabe)

Wie lautet die Gleichung der Geraden durch die beiden Punkte $(1, 1)$ und $(2, 3)$?

Oder durch irgendwelche zwei gegebene Punkte?

Die **Parabel** $p(x) = ax^2 + bx + c$ mit ihrem Scheitel.



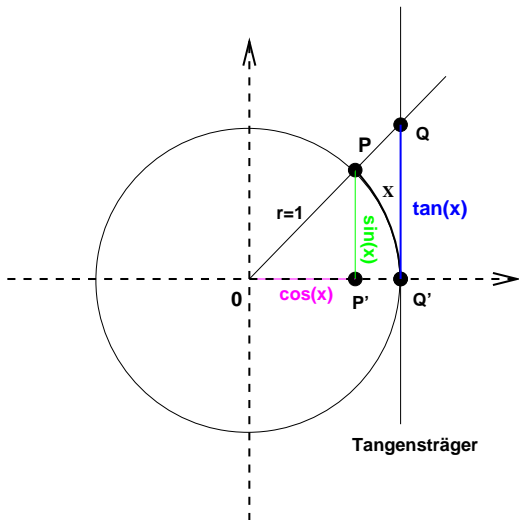
Folgerungen:

- Der Scheitel ist ein lokales (und globales) Extrema und lässt sich deshalb einfach durch Ableiten bestimmen:

$$p'(x) = 2ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

$$y = p(-b/2a) = c - \frac{b^2}{4a}$$

- $a > 0 \rightarrow$ Parabel nach oben geöffnet
- $a < 0 \rightarrow$ Parabel nach unten geöffnet

Die **Winkelfunktionen** $\sin(x)$, $\cos(x)$ und $\tan(x)$.

Exponential- und Logarithmusfunktionen

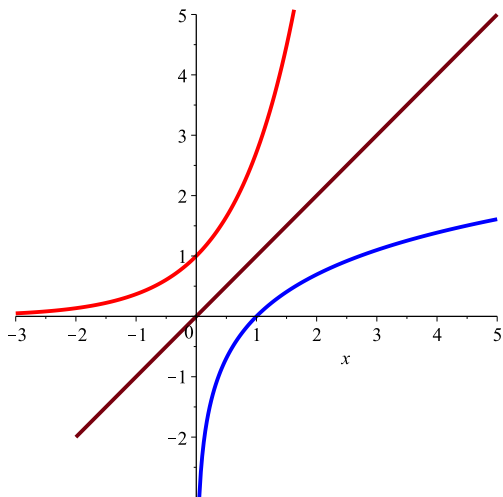
Als Logarithmus einer Zahl bezeichnet man den Exponenten, mit dem eine gegebene (und feste) Zahl, die Basis, potenziert werden muss, um die gegebene Zahl, den Numerus, zu erhalten.

Damit erklärt sich auch der direkte Zusammenhang zwischen Logarithmen und Exponentialfunktionen:

$$\log_{\mathbf{Basis}}(\mathbf{Numerus}) = \mathbf{Exponent} \iff \mathbf{B}^{\mathbf{E}} = \mathbf{N}$$

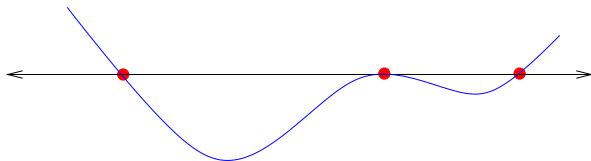
$$\log_5(125) = 3 \iff 5^3 = 125$$

Die Funktionen e^x (rot) und $\ln(x)$ (blau).

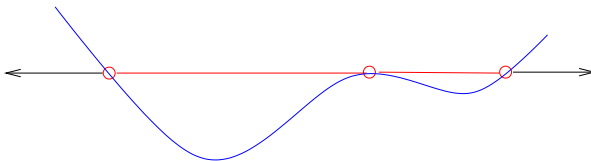


Wichtig:

Die Lösung von $f(x) = 0$ sind 3 (rote) **Punkte!**



Die Lösung von $f(x) < 0$ sind 2 (rote) **Intervalle!**



Wichtig:

x_i heisst Nullstelle von f , wenn $f(x_i) = 0$ gilt.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0$$

faktorisieren
(falls möglich)

ausmultiplizieren

$$a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) = 0$$

Lösungen x_1, x_2, \dots, x_n ablesen

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

faktorisieren
(falls möglich)

ausmultiplizieren

$$(x - 3) \cdot (x + 5) = 0$$

Lösungen 3 und -5 ablesen

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

faktorisieren
(falls möglich)

ausmultiplizieren

$$(x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) = 0$$

Lösungen 1, 2 und 3 ablesen

Example (Fundamentalaufgaben)

Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen:

① $x \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) = 0$

② $x \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) + x \cdot (x - 2) = 0$

③ $x \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) + 500 x \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) = 0$

Wichtig:

Zum Auflösen einer Gleichung $f(x) = a$ benötigt man die Umkehrfunktion f^{-1} von f . Aber nicht jede Funktion besitzt eine Umkehrfunktion!

$$f(x) = a \quad \longrightarrow \quad f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(a) \quad \longrightarrow \quad x = f^{-1}(a)$$

Achtung: Nicht streng monotone Funktionen können nur über einem Monotonieintervall umgekehrt werden!

- $\ln(x) = 2$ (\ln ist streng monoton, also umkehrbar)
 $\longrightarrow e^{\ln(x)} = e^2 \longrightarrow x = e^2$
- $e^x = 10$ (e ist streng monoton, also umkehrbar)
 $\longrightarrow \ln(e^x) = \ln(10) \longrightarrow x = \ln(10)$
- $\cos(x) = 1/2$ (\cos ist nicht streng monoton, also nicht umkehrbar)
Der \cos ist auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend. Die Funktion \arccos (am Taschenrechner) bezeichnet die zugehörige Umkehrfunktion (für dieses Intervall).
 $\longrightarrow \arccos(\cos(x)) = \arccos(1/2) \longrightarrow x = \arccos(1/2)$

ist die einzige Lösung im Intervall $[0, \pi]$. Die Ausgangsgleichung hat aber **unendlich viele** Lösungen! Könnten Sie alle finden?

- $\ln(x^2 - 1) = 0$

Der Logarithmus ist nur für Werte grösser als 0 definiert. Der Definitionsbereich der Gleichung ist somit $x^2 - 1 > 0$ oder $x^2 > 1$ oder $|x| > 1$ (Betrag **nicht** vergessen). Beachten Sie, dass der Definitionsbereich somit aus den **beiden** Intervallen $(-\infty, -1)$ und $(1, \infty)$ besteht!

$$\longrightarrow e^{\ln(x^2-1)} = e^0 = 1$$

$$\longrightarrow x^2 - 1 = 1$$

$$\longrightarrow x^2 - 1 + 1 = 1 + 1$$

$$\longrightarrow (x^2)^{1/2} = \pm 2^{1/2}$$

Dividiere **nie** durch eine Variable (die 0 sein könnte), sondern klammere aus!

Example

$$x^2 - x = 0$$

Falsch

$$x^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \mid :x$$

$$\Leftarrow x - 1 = 0$$

Lösung: $x = 1$

Richtig

$$x^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 1) = 0$$

Lösung: $x = 0$ oder $x = 1$

Lass den Betrag (beim Lösen einer Gleichung oder Ungleichung) **nicht** einfach weg!

Example

$$|x - 2| = 5$$

Falsch

$$\Leftrightarrow x - 2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x = 5 + 2 = 7$$

Richtig

$$\Leftrightarrow x - 2 = 5 \text{ oder } x - 2 = -5$$

$$\Leftrightarrow x = 7 \text{ oder } x = -3$$

Example (Fundamentalaufgaben)

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen:

$$|x - 2| < 1$$

$$|x + 5| < 2$$

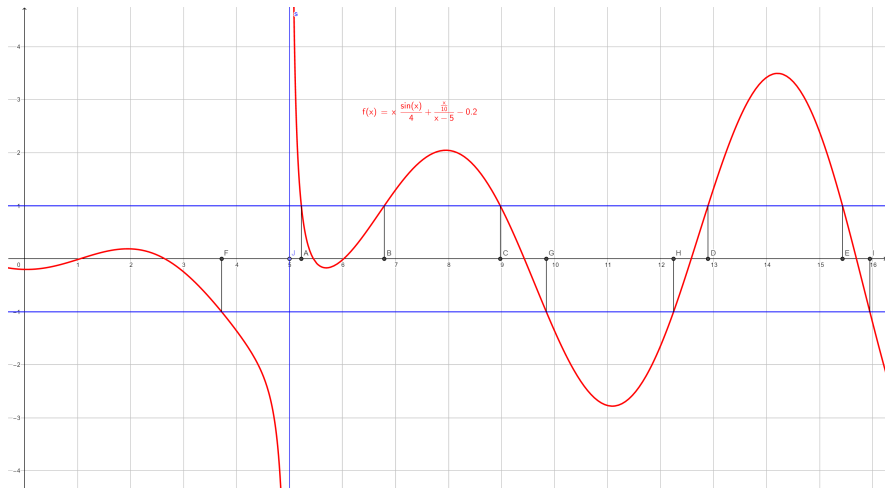
$$|x - 3| > 2$$

Allgemeiner

Sei $a, \epsilon \in \mathbb{R}$ mit $\epsilon > 0$. Bestimmen und skizzieren Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen: $|x - a| < \epsilon$, $|x - a| > \epsilon$, $|x - a| = \epsilon$, $|x - a| \leq \epsilon$ und $|x - a| \geq \epsilon$.

Example (Fundamentalaufgaben)

Der Graph von f sei gegeben. Skizzieren Sie die Lösungsmengen für $f(x) = 1$, $f(x) = -1$ und $|f(x)| = 1$ sowie $f(x) < 1$ und $|f(x)| < 1$.



Rechnen Sie sorgfältig!!

Example

$$3 = \sqrt{x+1} - 2$$

Falsch

$$3^2 = (x+1) - 2^2$$

Richtig(er)

$$3^2 = (\sqrt{x+1} - 2)^2$$

$$3^2 = (\sqrt{x+1})^2 - 4 \cdot \sqrt{x+1} + 2^2$$

Die rechte Umformung ist korrekt, aber nicht hilfreich, denn die Wurzel ist noch immer vorhanden. Besser erst die Wurzel separieren

$5 = \sqrt{x+1}$ und dann quadrieren!

Rechnen Sie sorgfältig!!

Example

$$3 = e^x - 2$$

Falsch

$$\ln(3) = x - \ln(2)$$

Richtig(er)

$$\ln(3) = \ln(e^x - 2)$$

Die rechte Umformung ist korrekt, aber auch hier kommen wir nicht weiter, denn es gibt keine \ln -Regel um die rechte Seite weiter zu vereinfachen. Besser erst den e -Term separieren $5 = e^x$ und dann Logarithmieren.

Fast keine Funktion ist linear!!

Eine lineare Funktion f ist durch die folgende Eigenschaft definiert:
Für alle reellen Zahlen a, b, λ, μ gilt:

$$f(\lambda \cdot a + \mu \cdot b) = \lambda \cdot f(a) + \mu \cdot f(b)$$

Also gilt für eine lineare Funktion:

$$\begin{aligned}f(a + b) &= f(a) + f(b) \\f(a - b) &= f(a) - f(b) \\f(-a + b) &= -f(a) + f(b)\end{aligned}$$

Fast keine Funktion ist linear!!

Alle folgenden Funktionen sind **NICHT** linear.

$$f(x) = x^2 \qquad (2 + 5)^2 \neq 2^2 + 5^2$$
$$\qquad (a + b)^2 \neq a^2 + b^2$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \qquad \sqrt{2 + 5} \neq \sqrt{2} + \sqrt{5}$$

$$f(x) = x^{-1} = 1/x \qquad (2 + 5)^{-1} \neq 2^{-1} + 5^{-1}$$

$$f(x) = \log(x) \qquad \log(2 + 5) \neq \log(2) + \log(5)$$

$$f(x) = 3x + 1 \qquad 3 \cdot (2 + 5) + 1 \neq 3 \cdot 2 + 1 + 3 \cdot 5 + 1$$

- System

$$2x + 3y = 4$$

$$-2x + 2y = 6$$

- (irgend)eine Gleichung nach (irgend)einer Variablen auflösen

$$2x + 3y = 4$$

$$y = \frac{6 + 2x}{2} = 3 + x$$

- Elimination dieser Variablen aus der anderen Gleichung

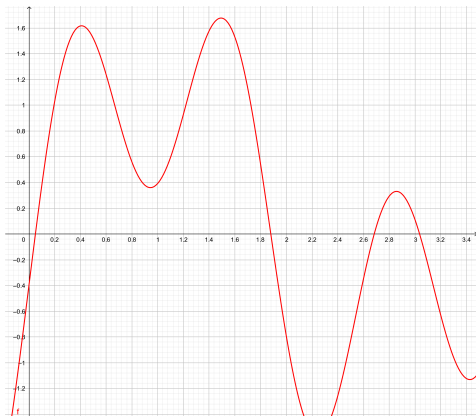
$$2x + 3(3 + x) = 4 \quad \text{auflösen nach } x \quad x = \underline{-1}$$

- die andere Variable bestimmen

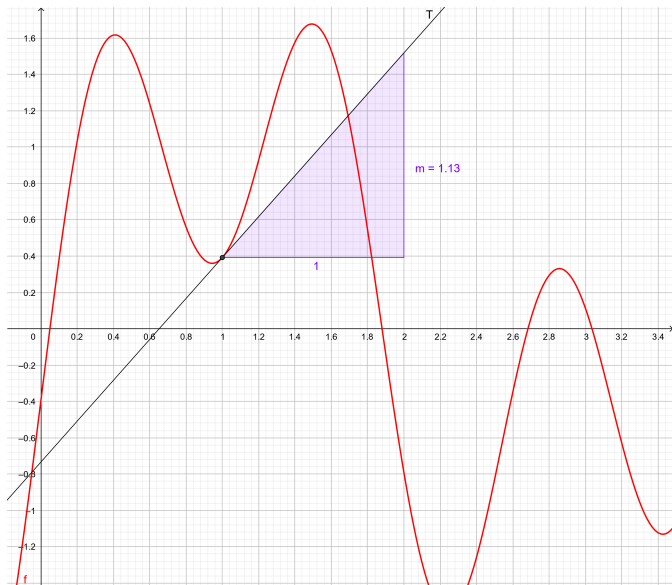
$$y = 3 + x = 3 + (-1) = \underline{2}$$

Example (Fundamentalaufgabe)

In der folgenden Abbildung sehen Sie den Graphen einer Funktion f . Bestimmen Sie mit Hilfe von Lineal und Zeichendreieck näherungsweise den Wert $f'(1)$.

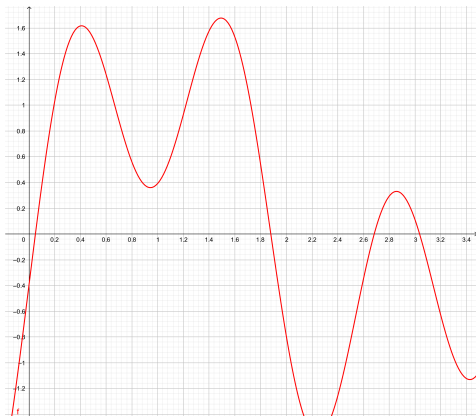


Deutung der Ableitung und des bestimmten Integral



Example (Fundamentalaufgabe)

In der folgenden Skizze sehen Sie den Graphen einer Funktion f .
Machen Sie in dieser Skizze kenntlich, wo man das bestimmte Integral $\int_1^2 f(x) dx$ sehen kann.



Deutung der Ableitung und des bestimmten Integral

