Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

Mathematischer Vorkurs — **Aufgabensammlung**
Dr. Thomas Zehrt — **Funktionen**

Aufgaben

1. Gemäss den Richtlinien für die Schweizerische Maturitätsprüfung in Mathematik (normales Niveau) können Sie die folgenden so genannten elementaren Funktionen beschreiben und erkennen: konstante Funktion, Identität, lineare Funktion, Quadratwurzelfunktion, Potenzfunktion, Betragsfunktion, $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x, a^x, $\ln(x)$ und $\log_a(x)$. Können Sie von diesen Funktionen, **ohne** einen Taschenrechner zu benutzen, eine (grobe, aber qualitativ richtige) Skizze anfertigen?

2. Geben Sie den grösstmöglichen Definitionsbereich $D(f) \subset \mathbb{R}$ für die Funktionen an.

$$a) \qquad f(x) = \sqrt{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2}$$

$$b) \qquad f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$c) \qquad f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$$

Falls nötig:

- Wurzeln sind nur für nicht-negative Werte definiert, d.h. für einen Ausdruck $A = A(x)$ in $\sqrt{A}$ muss $A \geq 0$ gelten.
- Division durch 0 ist nicht definiert, d.h. für einen Ausdruck $A = A(x)$ in $\frac{1}{A}$ muss $A \neq 0$ gelten

3. Untersuchen Sie die nachfolgenden Funktionen auf Monotonie und begründen Sie Ihre Aussage.

$$a)\quad f(x) = \frac{1}{5}\,x^5$$

$$b)\quad f(x) = \ln(x^3) \qquad x > 0$$

$$c)\quad f(x) = \frac{2}{x^2} \qquad x > 0$$

$$d)\quad f(x) = 2 - \frac{2}{x} \qquad x > 0$$

4. Skizzieren Sie die folgenden Funktionen. Welche Eigenschaften haben diese Funktionen?

$$a)\quad f(x) = x^3$$

$$b)\quad f(x) = \sqrt{x} \qquad x \geq 0$$

$$c)\quad f(x) = \frac{x-1}{x+1} \qquad x \neq -1$$

$$d)\quad f(x) = |x-1| \qquad x > 0$$

$$e)\quad f(x) = (x-1)^2$$

$$f)\quad f(x) = 3 - \frac{2}{x} \qquad x > 0$$

5. Geben Sie für die Funktion

$$f(x) = 2e^{-x} + 3$$

den Definitions- und Wertebereich an, berechnen Sie die Umkehrfunktion zu f und geben Sie auch deren Definitions- und Wertebereich an.

> **Falls nötig:** Die Funktion ordnet jedem x genau ein y zu, also sollte die Umkehrfunktion jedem y ein passendes x zuordnen. Zur Bestimmung der Umkehrfunktion müssen Sie also die Gleichung $y = 2e^{-x} + 3$ nach x auflösen.

6. Bestimmen Sie $f \circ f \circ f$, wenn

$$y = f(x) = \frac{1}{1-x}$$

mit $D(f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ (reelle Zahlen ausser 0 und 1) ist. Was ist der maximale Definitionsbereich der Komposition?

Falls nötig:

$$\begin{aligned} f\circ f\circ f(x) \;=\; f(f(f(x))) &= \frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{\frac{1-x}{1-x}-\frac{1}{1-x}}} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}}} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{\frac{-x}{1-x}}} \\ &= ? \end{aligned}$$

7. Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen (jede Teilaufgabe im selben Koordinatensystem). Kontrollieren Sie Ihre Skizzen mit Geogebra.

   (a)

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= x^3 \\ f_2(x) &:= (x+2)^3 \\ f_3(x) &:= x^3-3 \\ f_4(x) &:= (x+1)^3-1 \\ f_5(x) &:= 2x^3 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= |x| \\ f_2(x) &:= |x+1| \\ f_3(x) &:= |x|+1 \\ f_4(x) &:= 2|x| \\ f_5(x) &:= |2x| \end{aligned}$$

8. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

   $a)$ $\sqrt[5]{x^7y^3(2y)^{13}}$

   $b)$ $\sqrt[4]{x^{-3}\sqrt{x^2y^3}y^3(5y)^3}$

   $c)$ $\sqrt[2]{\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y}}$

9. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so, dass im Nenner keine Wurzeln mehr vorkommen.

$$a)\quad \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$$

$$b)\quad \frac{2+3\sqrt{5}}{4-\sqrt{15}}$$

$$c)\quad \frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

Falls nötig: Beachten Sie, dass man jeden beliebigen Ausdruck mit 1 multiplizieren kann, ohne dass er seinen Wert ändert. Manchmal ist es hilfreich, mit einer geschickt gewählten 1 zu multiplizieren, um dann gewisse Rechenregeln (z.B. die binomischen Formeln) anwenden zu können. Solche geschickt gewählten Einsen könnten hier von folgender Gestalt sein:

$$1 = \frac{a+\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}} \quad \text{oder} \quad \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Also multiplizieren Sie z.B. $\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$ mit $\frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$ und nutzen Sie die binomischen Formeln.

10. Lösen Sie nach x auf.

$$a)\quad y = \frac{\sqrt{x+1}+5}{\sqrt{x+1}-3}$$

$$b)\quad y = 5^{3x-1}+7$$

11. Bestimmen Sie die Scheitelpunkte der folgenden Parabeln.

$$a)\quad f(x) = x^2-4x+2$$

$$b)\quad f(x) = 4x^2+56x+196$$

$$c)\quad f(x) = \frac{1}{2}x^2+2x-\frac{5}{2}$$

12. Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen gelten. Diese Aufgabe **kann** durch Polynomdivision gelöst werden, muss aber nicht.

$$(x^5-3x^3+2x^2+2x-2) \quad : (x-1) \quad = x^4+x^3-2x^2+2$$

$$(x^7-4x^5+x^2+x-2) \quad : (x+2) \quad = x^6-2x^5+x-1$$

$$(x^4-x^3-2) \quad : (x^2-2) \quad = x^2-x+2+\frac{-2x+2}{x^2-2}$$

Falls nötig: Da das Ergebnis der (Polynom)division angegeben ist, kann man einfach eine Probe machen, denn natürlich gilt z.B. die Äquivalenz (falls $x^2 - 2 \neq 0$) der beiden Aussagen:

$$\begin{aligned} \frac{x^4 - x^3 - 2}{x^2 - 2} &= x^2 - x + 2 + \frac{-2x+2}{x^2-2} \\ \Longleftrightarrow \quad x^4 - x^3 - 2 &= \left[x^2 - x + 2 + \frac{-2x+2}{x^2-2}\right] \cdot (x^2 - 2) \end{aligned}$$

Um die Richtigkeit der unteren Aussage zu überprüfen, muss man nur das rechte Produkt expandieren und mit der linken Seite vergleichen.

13. Rechnen Sie die angegebenen Winkel jeweils in Grad bzw. Bogenmass um: $\frac{2}{3}\pi$, $-\frac{3}{2}\pi$, 10, 43° und −411°.

    Falls nötig: Winkel werden insbesondere in **Grad** und **Bogenmass** angegeben, allerdings werden wir Winkel meist im Bogenmass angeben, da diese Darstellung keine physikalische Masseinheit trägt. Die Umrechnung von beiden (Mass)Einheiten ineinander geschieht über eine Proportionalitätsgleichung.
    Dabei muss man sich eigentlich nur die folgende Regel einprägen:

Grad		Bogenmass
360°	=	2π

    Beispiele: Wir wollen einige gegebene Winkel in die jeweils andere Einheit umrechnen.

    (a) $220° = x$? (Bogenmass)
    $$\frac{220°}{360°} = \frac{x}{2\pi} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2\pi \cdot \frac{220°}{360°} \approx 3.84$$
    (b) 7.21 (Bogenmass) $= x$? (Grad)
    $$\frac{x}{360°} = \frac{7.21}{2\pi} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 360° \cdot \frac{7.21}{2\pi} \approx 413.1°$$

14. Berechnen Sie den Schnittpunkt (bzw. die Schnittpunkte) der Geraden $y = x + 1$ mit dem Kreis $(x-1)^2 + y^2 = 4$.

15. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$a) \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{5n}\right)^n$$

$$b) \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n+2}$$

$$c) \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{13}{2n}\right)^{n/2}$$

Lösungen der Aufgaben

1. –

2. *a)* $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq -1 \text{ und } x \neq 2\}$,
   b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, -2 \leq x \leq 2\}$,
   c) $D(f) = (-2, 0]$

3. a) streng monoton wachsend ,
   b) streng monoton wachsend ,
   c) streng monoton fallend,
   d) streng monoton wachsend

4. a) unbeschränkt, streng monoton wachsend und ungerade
   b) nach unten beschränkt, streng monoton wachsend
   c) unbeschränkt
   d) nach unten beschränkt
   e) nach unten beschränkt
   f) nach oben beschränkt, streng monoton wachsend

5. $D(f) = \mathbb{R},\ W(f) = (3, \infty)$
   $f^{-1}(x) = -\ln\left(\frac{x-3}{2}\right),\ D(f^{-1}) = (3, \infty),\ W(f^{-1}) = \mathbb{R}$

6. $(f \circ f \circ f)(x) = x$ mit $D(f \circ f \circ f) = \mathbb{R}$
   Man sollte aber besser sagen, dass $(f \circ f \circ f)(x) = x$ für alle $x \neq 0, 1$ gilt.

7. GeoGebra

8. *a)* $4 \cdot 8^{1/5} \cdot (x^7 \cdot y^{16})^{1/5}$ oder $2^{13/5} \cdot x^{7/5} \cdot y^{16/5}$,
   b) $5^{3/4} \cdot x^{-1/2} \cdot y^{15/8}$,
   c) $\sqrt[8]{x}\sqrt[6]{y}$

9. *a)* $-\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)^2$,
   b) $8 + 15\sqrt{3} + 12\sqrt{5} + 2\sqrt{15}$
   c) $\sqrt{5} + \sqrt{2} - \frac{1}{3}(\sqrt{35} + \sqrt{14})$

10. *a)* $x = \left(\frac{3y+5}{y-1}\right)^2 - 1$,
    b) $x = \frac{1}{3}\left(\frac{\ln(y-7)}{\ln(5)} + 1\right)$

11. *a)* $(2, -2)$
    b) $(-7, 0)$
    c) $(-2, -9/2)$

12. -

13. $\frac{2}{3}\pi = 120°$, $-\frac{3}{2}\pi = -270°$, $10 = 572.95°$, $43° = 0.75$ und $-411° = -7.17$

14. $(1, 2)$ und $(-1, 0)$

15. $a)$ $e^{3/5}$, $b)$ e^{-3} , $c)$ $e^{13/4}$