Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

Mathematischer Vorkurs
Dr. Thomas Zehrt

Funktionen

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Definitionen

Definition 1.1 *Seien X und Y zwei beliebige Mengen. Eine Vorschrift, die jedem Element x aus der Menge X ($x \in X$) genau ein Element y aus der Menge Y ($y \in Y$) zuordnet, heisst Funktion.*

Die Menge X heisst der Definitionsbereich und die Menge Y der Wertebereich von f. Die Menge

$$f(X) \quad = \quad \{\, f(x) \;:\; x \in X \,\} \;=\; \{\, y \in Y \;:\; \textit{es gibt ein } x \in X \textit{ mit } f(x) = y \,\} \subset Y$$

heisst die Bildmenge von f.

Eigentlich besteht eine Funktion aus **drei** Daten:

- Definitionsbereich X
- Wertebereich Y
- Zuordnungsvorschrift f

Schreibweise:

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x) \qquad \text{oder} \end{aligned}$$

$$f : x \longmapsto f(x)$$

Eine gute und allgemeine Art, um sich Funktionen zu visualisieren ist es, die Mengen X und Y (symbolisch) zu zeichnen und Pfeile von Elementen aus X auf die zugeordneten Elemente in Y zu zeichnen.

Wichtig!

Wir wollen uns angewöhnen, zwischen der Funktion f und $f(x)$ konsequent zu unterscheiden:

f	die Funktion, d.h. eine **Vorschrift**, die jedem Element einer Menge genau ein Element einer anderen Menge zuordnet.
$f(x)$	Wert der Funktion f an der Stelle x, d.h. $f(x)$ ist ein **Element** der Menge Y.

Beispiel 1.1 *Wir betrachten die beiden Funktionen (in Kurzschreibweise):*

$$f(x) = x + 1 \qquad \textit{und} \qquad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Beim Betrachten der Funktion g mag man sich sofort (!) an die dritte binomische Formel erinnern. Es gilt $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ und nach dem Kürzen ergibt sich $g(x) = x + 1$!? Also sind die beiden Funktionen gleich!?? Nein, was gleich ist, sind die Werte von f und g an allen **gemeinsamen** *Stellen der Definitionsbereiche. Genau genommen muss man beide Funktionen unter Angabe der Definitionsbereiche wie folgt schreiben:*

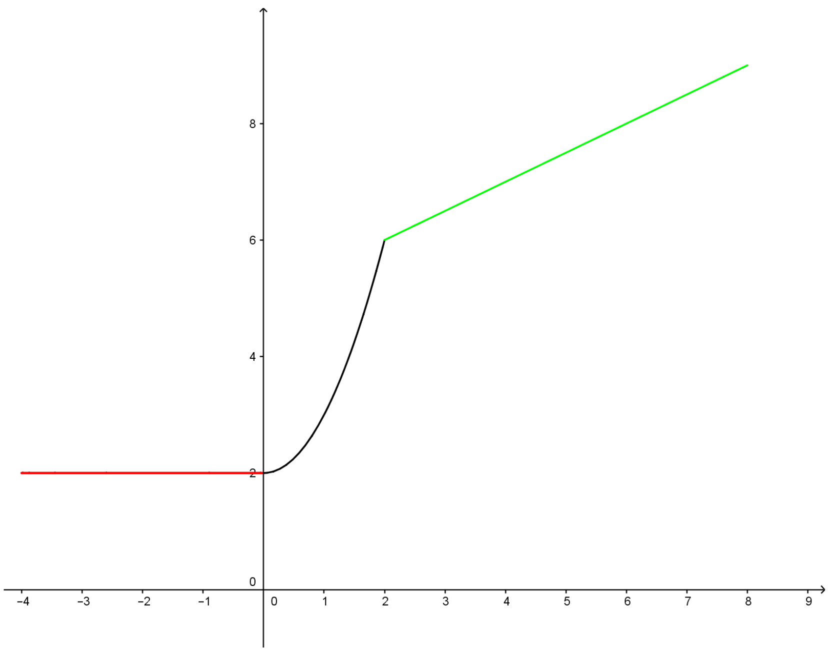
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} - \{1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \end{aligned}$$

und an dieser vollständigen Schreibweise erkennt man sofort den Unterschied zwischen den Funktionen f und g.

Beispiel 1.2 *Funktionen können auch stückweise definiert werden. Ein Beispiel ist die Funktion:*

$$f(x) := \begin{cases} 2 & \textit{für } x < 0 \\ x^2 + 2 & \textit{für } x \in [0, 2] \\ 0.5x + 5 & \textit{für } x > 2 \end{cases}$$



1.2 Der Graph einer Funktion

Wir beschränken uns hier auf Funktionen, deren Definitionsbereich $X = \mathbb{R}$ (oder $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) und deren Wertebereich $Y = \mathbb{R}$ ist.

Sei die Funktion

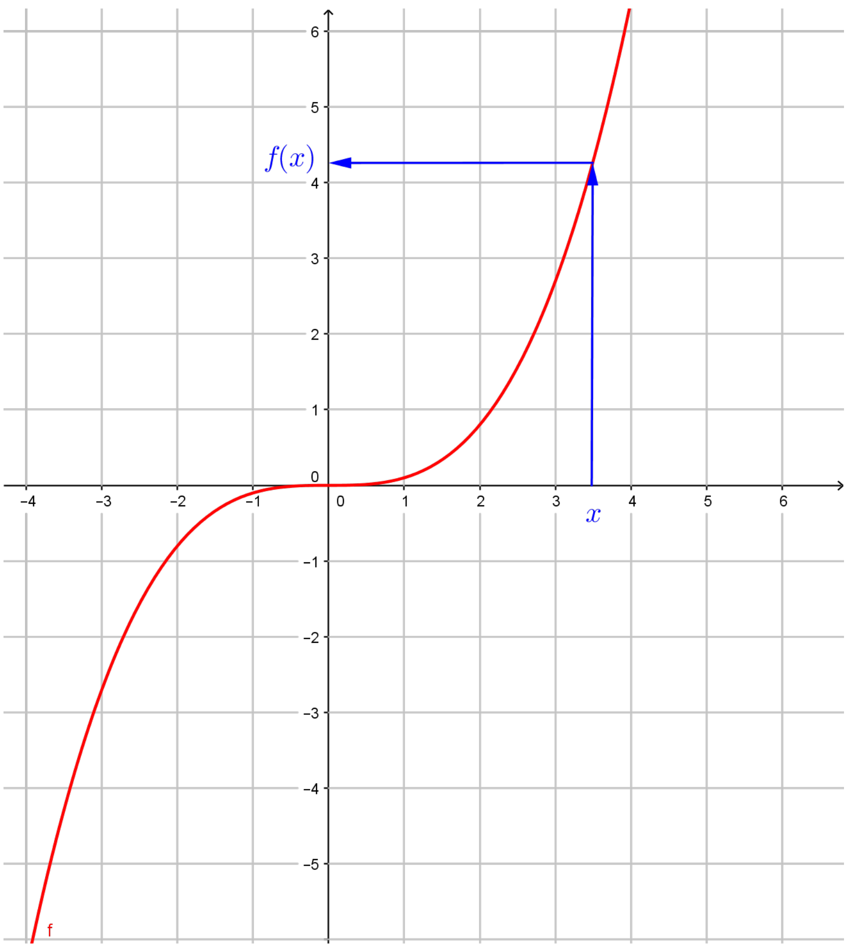
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

gegeben, so zeichnet man für jedes $x \in \mathbb{R}$ in der x-y-Ebene einen Punkt mit den Koordinaten $(x, f(x))$.

Formal und ganz allgemein lässt sich der Graph von f als Teilmenge des kartesischen Produktes der beiden Mengen X und Y schreiben:

$$Graph(f) \ := \ \{\ (x, f(x)) \ : \ x \in X \ \} \ \subset \ X \times Y \ = \ \{\ (x, y) \ : \ x \in X \text{ und } y \in Y \ \}$$

Zudem kann man am Graphen von f auch die Zuordnungsvorschrift der Funktion erkennen.



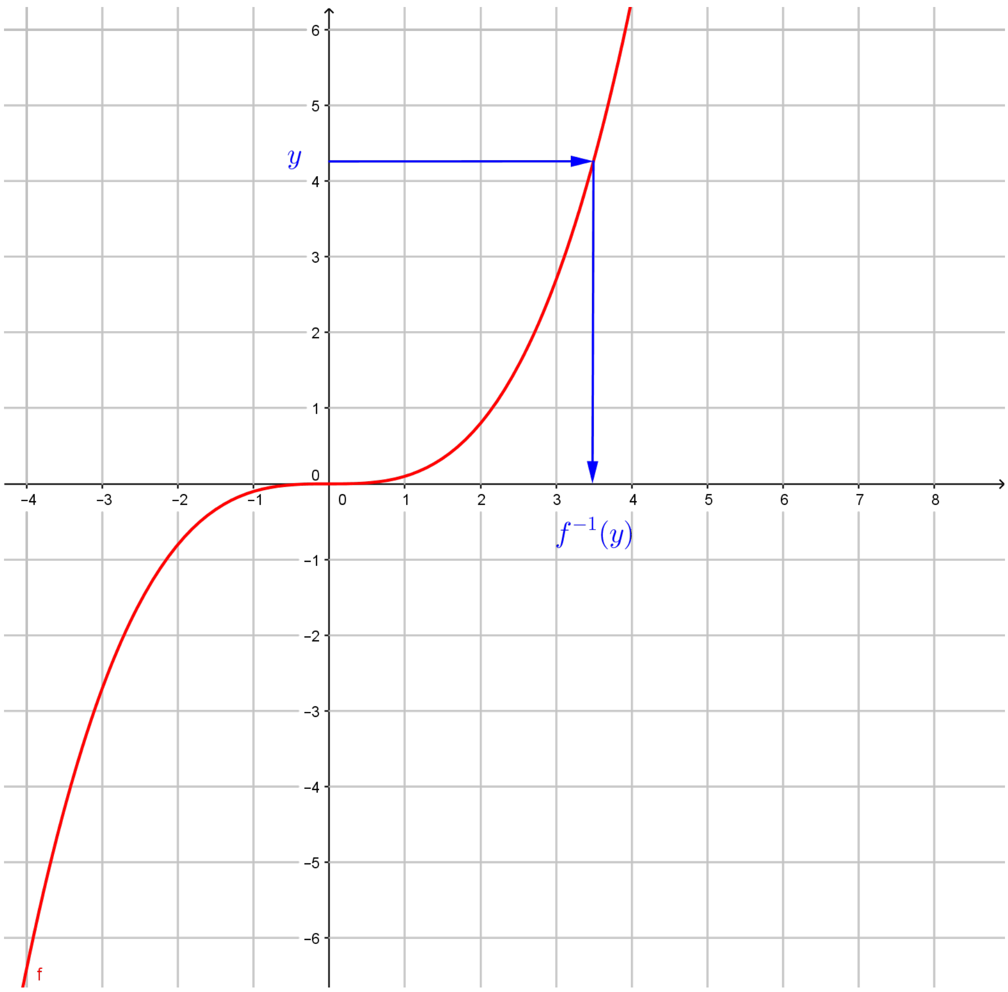
1.3 Umkehrbarkeit

Eine Funktion ordnet jedem Wert x des Definitionsbereichs **genau einen** Wert y des Wertebereichs zu. Es ist aber durchaus erlaubt, dass verschiedene x-Werte auf den selben y-Wert abgebildet werden. Schon an einfachen Beispielen kann man erkennen:

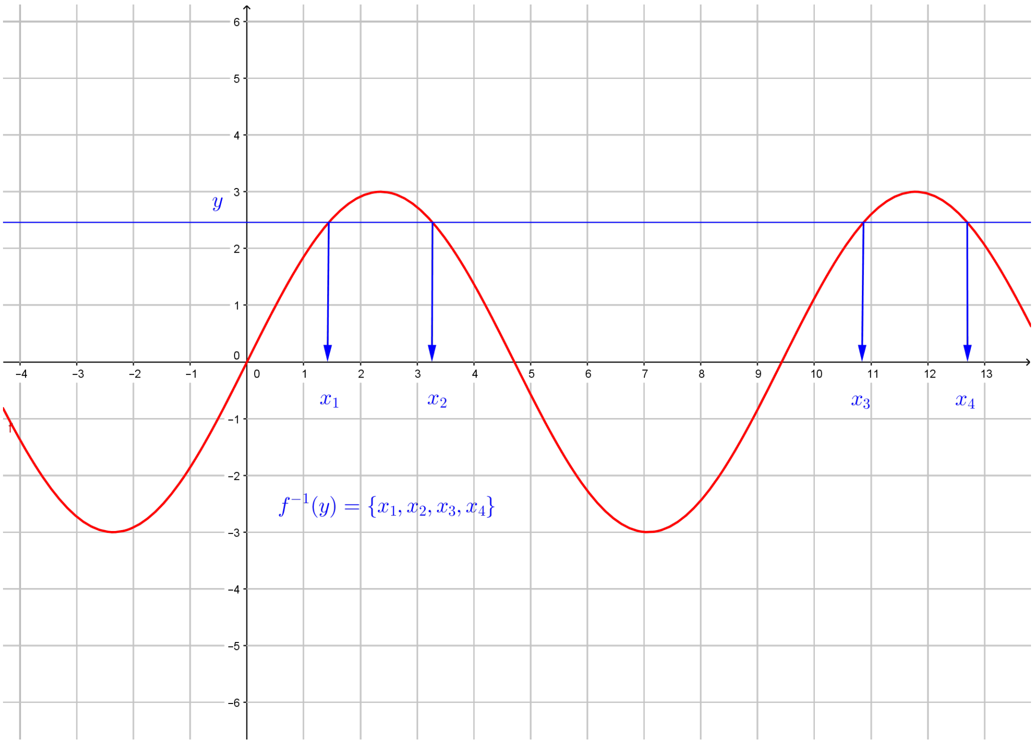
Nicht jede Funktion ist umkehrbar!

Man nennt Funktionen, bei denen die Umkehrung der zugrunde liegenden Zuordnung wieder eine Funktion ist, umkehrbare Funktionen. Eine umkehrbare Funktion hat also die Eigenschaft, dass keine zwei Elemente des Definitionsbereichs auf das selbe Element des Wertebereichs abgebildet werden. Auch am Graphen einer reellen Funktion kann man die Umkehrung der Funktion f, bzw. die eventuell auftretenden Probleme beim Umkehren, visualisieren

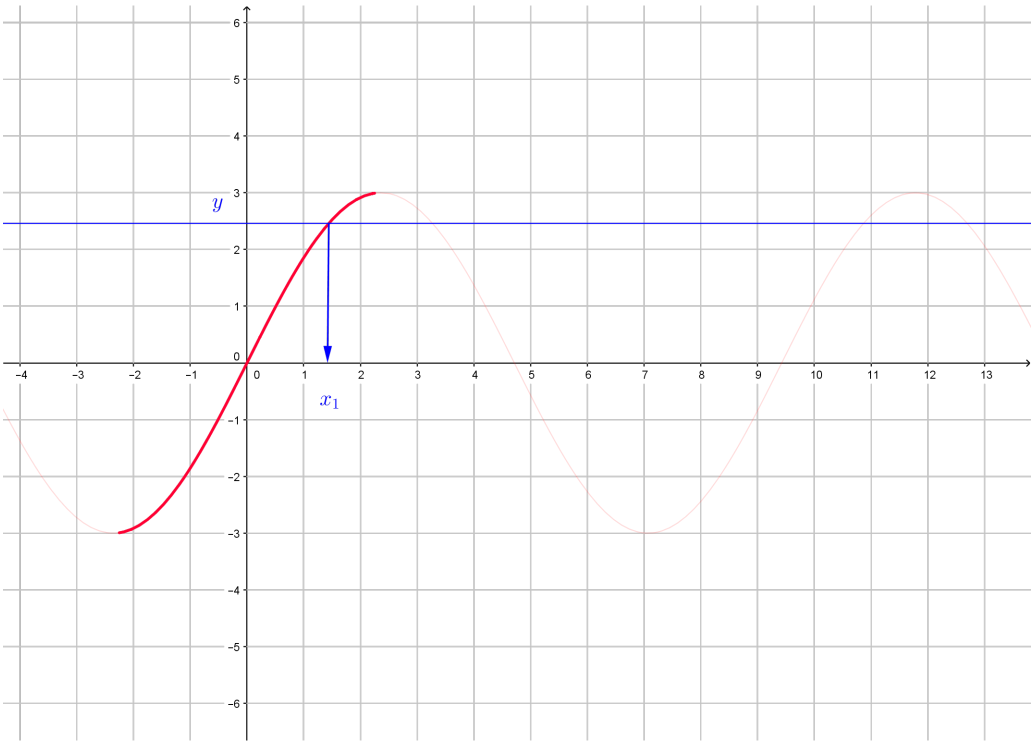
- Bei dieser Funktion funktioniert das Umkehren problemlos. Jedem y kann **genau ein** x mit $f(x) = y$ zugeordnet werden.



- Bei dieser Funktion kann für den Punkt y kein **eindeutig** bestimmtes x mit $f(x) = y$ gefunden werden. Es gibt hier (mindestens) vier Kandidaten und dieses Funktion ist somit nicht eindeutig, also **nicht** umkehrbar.



Das ist ein typisches Vorgehen, durch geschicktes Verkleinern des Definitionsbereichs auf Monotonieintervalle kann man die Umkehrbarkeit ,,einer Funktion“ erreichen.



Definition 1.2

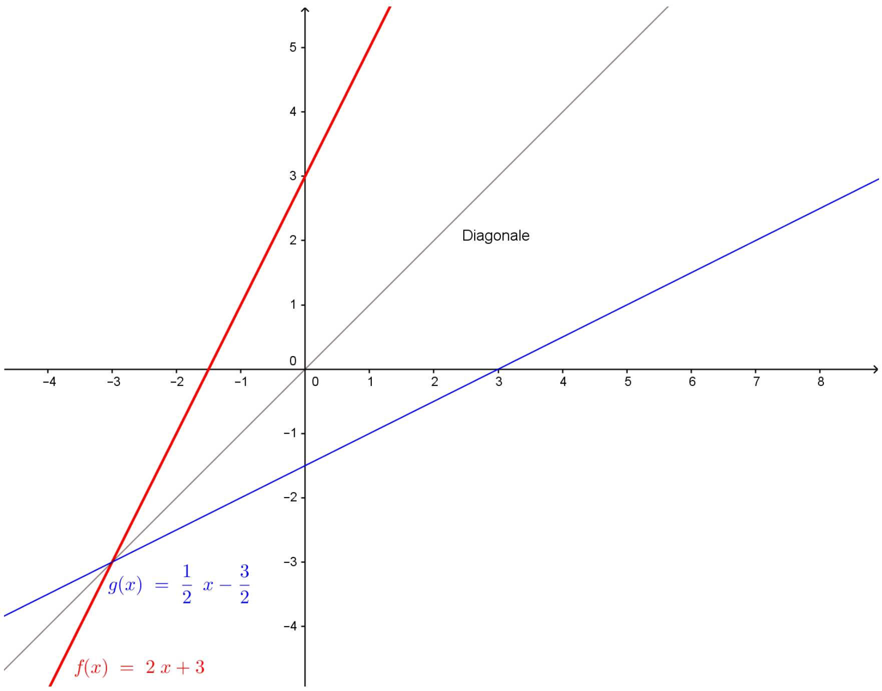
Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Funktion und $M \subset X$. Dann heisst f umkehrbar auf M, wenn jedes $y \in f(M)$ nur von genau einem Element aus M getroffen wird. Also: Für alle $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt (muss gelten) $f(x_1) \neq f(x_2)$. Die Funktion, die jedem Bildpunkt $f(x)$ das in diesem Fall **eindeutige** *x zuordnet, heisst Umkehrfunktion.*

Bezeichnung:

$$\begin{array}{rrcl} f^{-1}: & f(M) & \longrightarrow & M \\ & y = f(x) & \longmapsto & x \end{array}$$

Beispiel 1.3 *Die Funktion $y = f(x) = 2x+3$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und streng monoton wachsend. Die Umkehrfunktion erhält man hier, in dem man die Gleichung $y = 2x + 3$ nach x auflöst: $x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$.*

Meist tauscht man noch die Variablen x und y, damit man die beiden Funktionen problemlos im selben Koordinatensystem zeichnen kann.



Bemerkungen

1. Wendet man auf ein x zunächst eine umkehrbare Funktion f an und danach die Umkehrfunktion f^{-1} (auf $f(x)$), so erhält man wieder x zurück.

$f^{-1}(f(x)) = x$	$f(f^{-1}(y)) = y$

2. Den Graphen von f^{-1} erhält man, indem man den Graphen von f an der Geraden $y = x$ (Diagonale) spiegelt.

3. Am Graphen einer Funktion ist leicht zu erkennen, ob die Funktion umkehrbar ist. f ist genau dann umkehrbar, wenn **jede** Parallele zur x-Achse den Graphen in **höchstens** einem Punkt schneidet.

1.4 Wichtige Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion, deren Graph über dem gesamten Definitionsbereich mit wachsendem x ansteigt (oder abfällt) ist nach der letzten Bemerkung im vorhergehenden Kapitel umkehrbar. Solche Funktionen heissen auch monoton. Genauer gilt:

Definition 1.3 *Eine Funktion heisst*

monoton steigend	*falls gilt*	$f(x_1) \leq f(x_2)$
streng monoton steigend	*falls gilt*	$f(x_1) < f(x_2)$
monoton fallend	*falls gilt*	$f(x_1) \geq f(x_2)$
streng monoton fallend	*falls gilt*	$f(x_1) > f(x_2)$

für alle Paare $x_1 < x_2$.

Definition 1.4 *Eine Funktion heisst*

gerade	*falls* $f(-x) = f(x)$	*für alle* x
ungerade	*falls* $f(-x) = -f(x)$	*für alle* x

Die zwei typischen Beispiele für gerade und ungerade Funktionen sind sin (ungerade) und cos (grade). Geometrisch kann man beide Begriffe wie folgt deuten:

- gerade: Graph der Funktion kann durch Spiegelung an der y-Achse in sich überführt werden.
- ungerade: Graph der Funktion kann durch Spiegelung am 0-Punkt in sich überführt werden.

Definition 1.5 *Eine Funktion heisst*

nach oben beschränkt	*falls es eine Zahl* M *gibt, so dass* $f(x) \leq M$	*für alle* x
nach unten beschränkt	*falls es eine Zahl* m *gibt, so dass* $f(x) \geq m$	*für alle* x
beschränkt	*falls* f *nach oben* **und** *unten beschränkt ist*	

1.5 Komposition von Funktionen

Seien

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow U \\ x &\longmapsto g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow Y \\ u &\longmapsto f(u) \end{aligned}$$

zwei Funktionen, so dass der Wertebereich von g im Definitionsbereich von f enhalten ist. Dann kann man aus beiden Funktionen die so genannte zusammengesetzte Funktion oder Komposition von f und g bilden:

$$\begin{aligned} F = f \circ g : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(g(x)) \end{aligned}$$

Natürlich ist F auf dem Definitionsbereich von g definiert.

Es gilt ausserdem:

Sind f und g umkehrbar, so ist auch die Komposition $f \circ g$ umkehrbar und es gilt

$$\boxed{(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}}$$

Beispiel 1.4 *Die Funktion*

$$f(x) = \frac{3}{x^2 + 4}$$

kann als Komposition der folgenden Funktionen betrachtet werden:

- $u = f_1(x) = x^2$, *das Element x wird quadriert.*
- $v = f_2(u) = u + 4$, *zum Ergebnis wird 4 addiert.*
- $w = f_3(v) = 1/v$, *der Kehrwert wird gebildet.*
- $y = f_4(w) = 3 \cdot w$, *das Ergebnis wird mit 3 multipliziert.*

Also kann f wie folgt geschrieben werden:

$$f(x) = \underbrace{f_4(\, \underbrace{f_3(\, \underbrace{f_2(\, \underbrace{f_1(x)}_{u}\,)}_{v}\,)}_{w}\,)}_{y}\,.$$

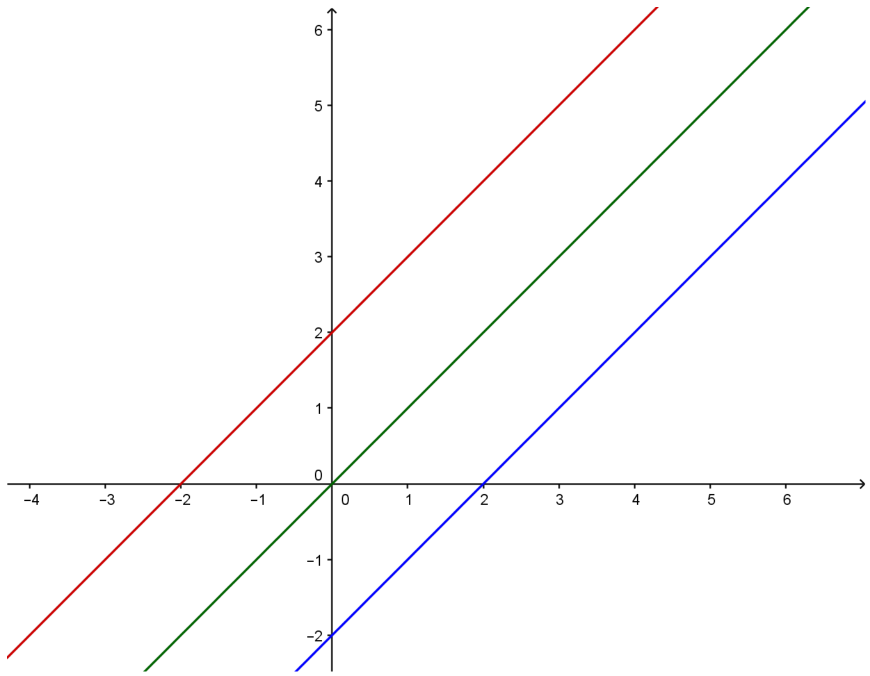
2 Einfache elementare Funktionen

2.1 Translationen

Sei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Die Funktion

$$\begin{aligned} t_c : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + c \end{aligned}$$

heisst Translation oder Verschiebung um c. Die Graphen der Translationen für $c = -2, 0, 2$ sind in der folgenden Skizze dargestellt.



Sei f eine beliebige Funktion und c eine reelle Zahl. Dann können wir die Komposition(en) von f mit der Translation t_c betrachten. Offenbar gibt es zwei Möglichkeiten, dies zu tun.

- $t_c \circ f : x \longmapsto f(x) + c$

  Der Graph von $t_c \circ f$ entsteht aus dem Graphen von f durch Verschiebung um c Einheiten in Richtung der y-Achse.

  Dabei bedeuten positive c eine Verschiebung nach oben.

- $f \circ t_c : x \longmapsto f(x + c)$

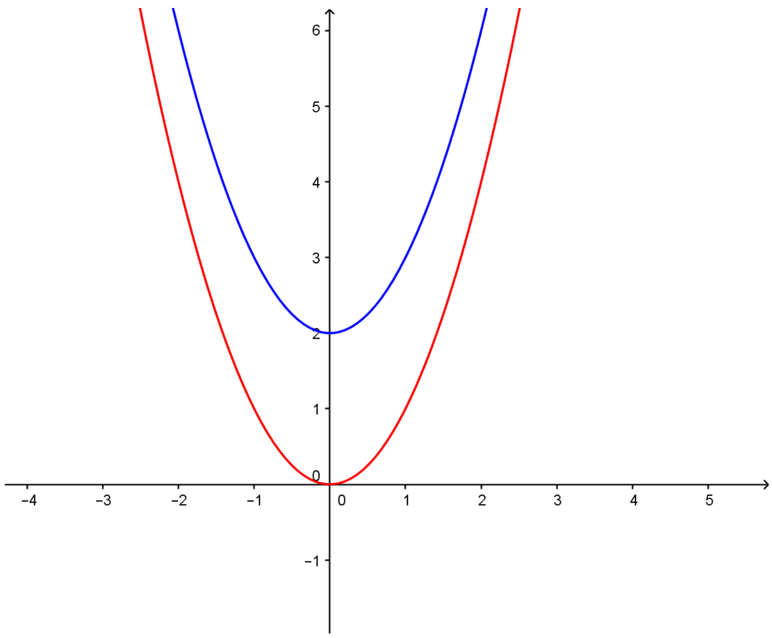
  Der Graph von $f \circ t_c$ entsteht aus dem Graphen von f durch Verschiebung um $-c$ Einheiten in Richtung der x-Achse. Dabei bedeuten positive c eine Verschiebung nach **links**.

Beispiel

Sei $c = 2$ und $f(x) = x^2$. Dann ist

$$t_2 \circ f : x \quad \longmapsto \quad x^2 + 2$$

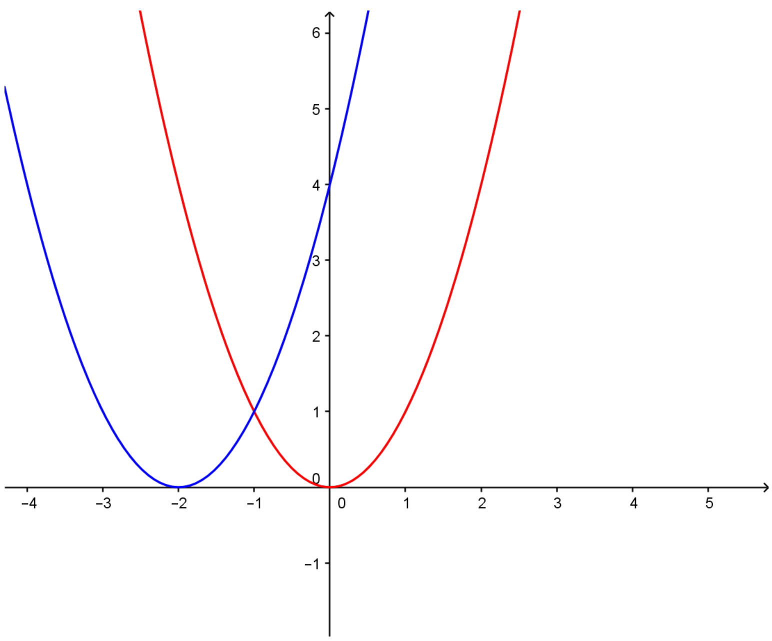
und der Graph von $t_2 \circ f$ entsteht durch Anheben des Graphen von f um 2 Einheiten.



Kehren wir die Reihenfolge um, so gilt

$$f \circ t_2 : x \quad \longmapsto \quad (x+2)^2.$$

Wie sieht der Graph dieser Funktion aus? Er entsteht aus dem Graphen von f durch Verschiebung um 2 Einheiten nach **links**!

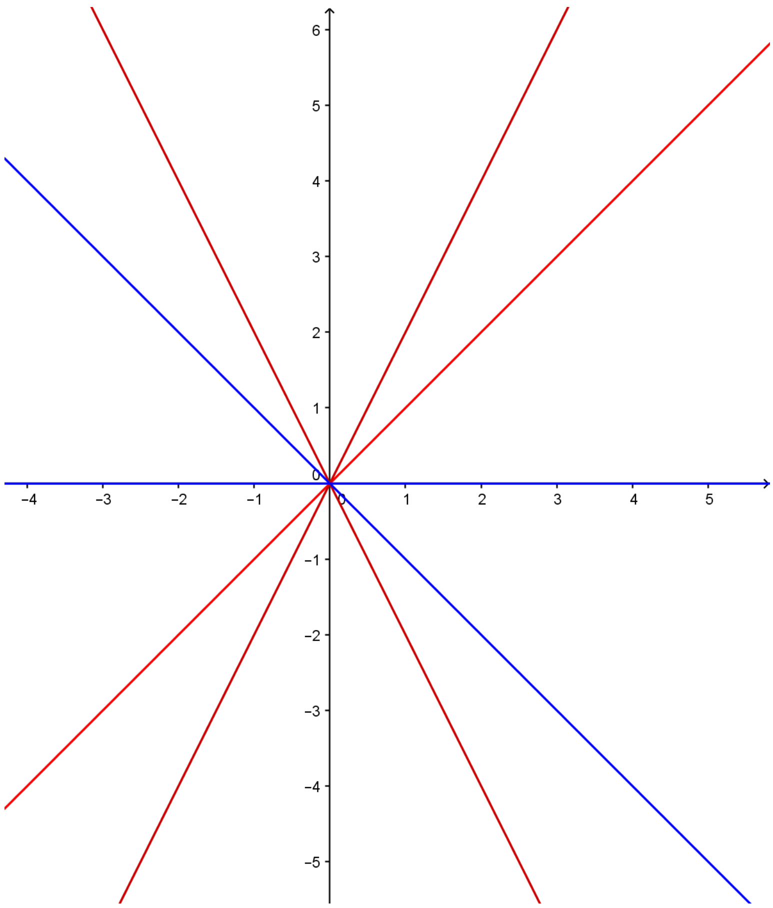


2.2 Skalierungen

Sei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Die Funktion

$$\begin{aligned} s_c : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto c \cdot x \end{aligned}$$

heisst Skalierung mit der Konstanten c. Die Graphen der Skalierungen für $c = -2, -1, 0, 1, 2$ sind in der folgenden Skizze dargestellt.

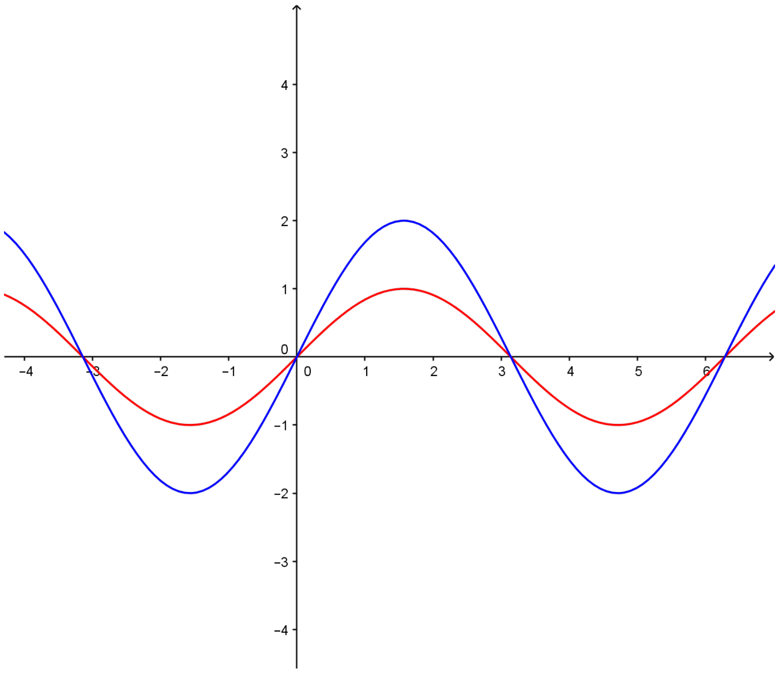


Eine Skalierung bedeutet zunächst nichts anderes als eine Änderung der Skala (oder des Massstabs) und je nach dem wie man eine Skalierung mit einer Funktion komponiert, ändert sich der Massstab auf der x- bzw. y-Achse.

Beispiel:
Sei $c = 2$ und $f(x) = \sin(x)$. Dann ist

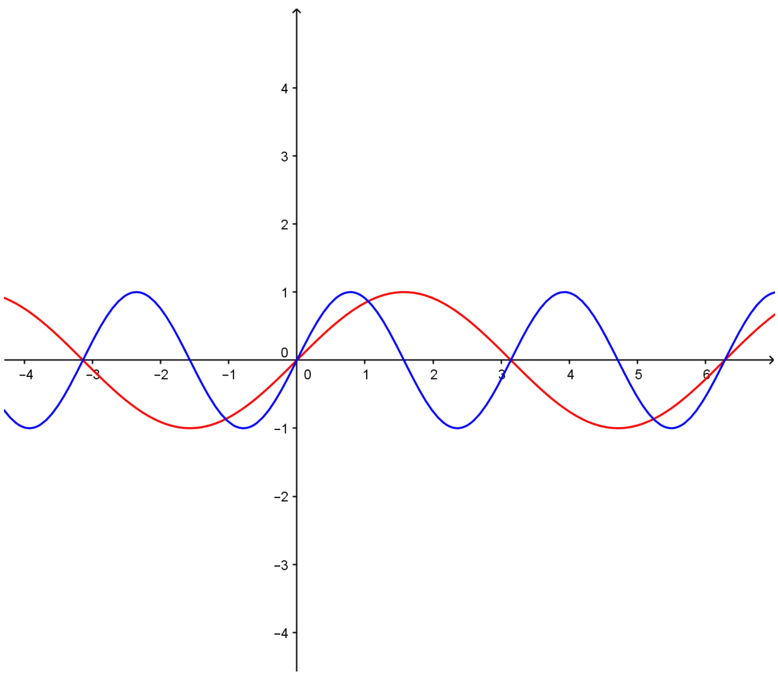
$$s_2 \circ f : x \quad \longmapsto \quad 2 \cdot \sin(x)$$

und der Graph von $s_2 \circ f$ (blau) entsteht aus dem Graphen von f (rot), indem jeder y-Wert verdoppelt wird.



Kehren wir die Reihenfolge um, so gilt

$$f \circ s_2 : x \quad \longmapsto \quad \sin(2 \cdot x).$$



Hier verdoppelt sich die ,,Durchlaufgeschwindigkeit", d.h. der neue Graph (blau) durchläuft 2 ganze Perioden, wenn der alte Graph (rot) nur eine Periode durchläuft.

2.3 Die Wurzelfunktion

Wir betrachten zunächst die Funktion

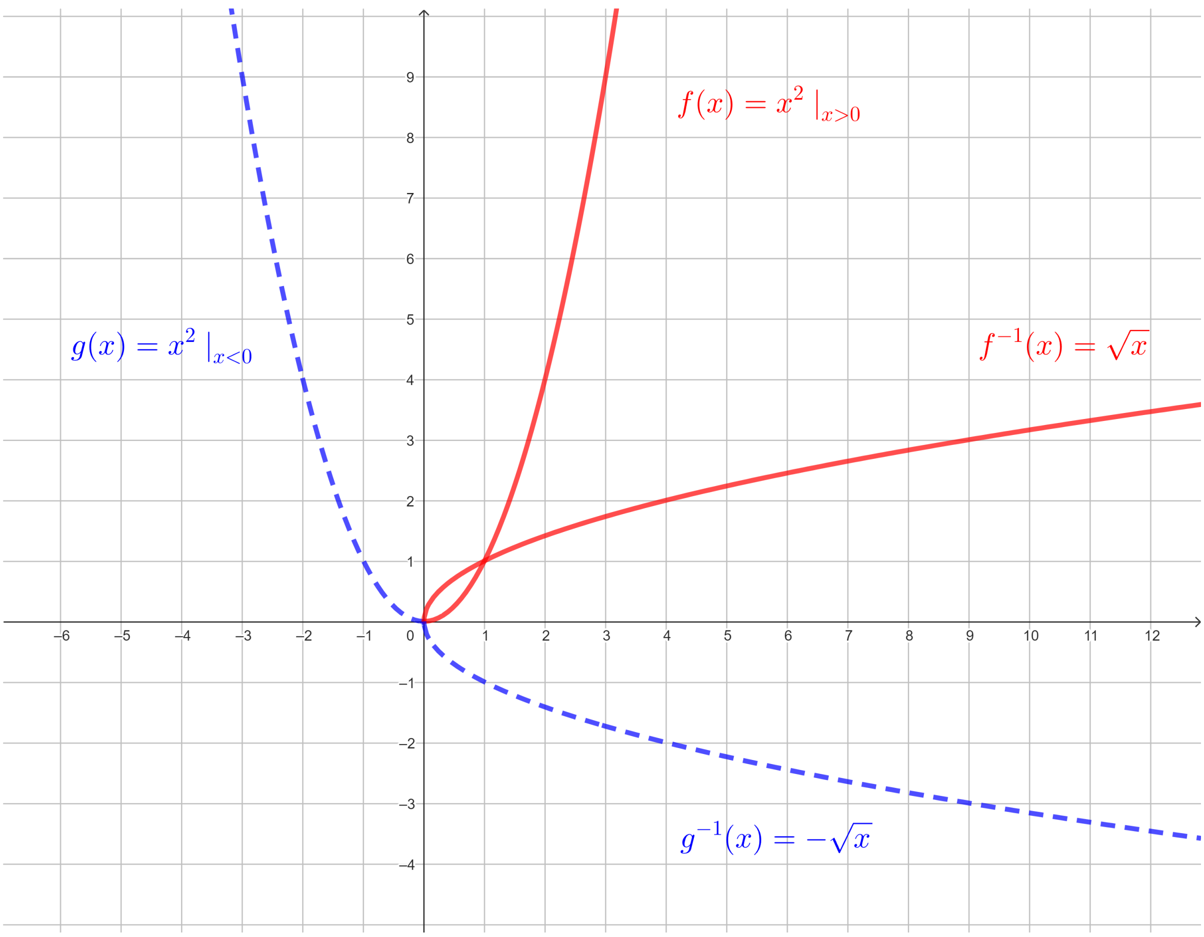
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2. \end{aligned}$$

Ist f umkehrbar? Nein, denn z.B. gilt $f(-2) = f(2) = (-2)^2 = 2^2 = 4$ und der Wert 4 wird von f (genau) zweimal getroffen. Somit weiss man nicht, welchen Wert man bei der Konstruktion der Umkehrfunktion der 4 zuordnen sollte, 2 oder -2?

Verkleinern wir deshalb den Definitionsbereich von f (so wenig wie möglich)! Indem wir die Quadratfunktion nur auf dem positiven Teil der x-Achse betrachten, erhalten wir die umkehrbare Funktion:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto x^2. \end{aligned}$$

Für diese Einschränkung der Quadratfunktion auf positive x-Werte schreibt man oft auch $f(x) = x^2 \mid_{x>0}$ bzw. analog $g(x) = x^2 \mid_{x<0}$. In der Zeichnung sehen Sie diese beiden Graphen und die Graphen der jeweils zugehörigen Umkehrfunktionen.



Dieses Vorgehen verallgemeinern wir nun auf alle Potenzfunktionen.

Definition 2.1 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto x^n \end{aligned}$$

umkehrbar. Die zugehörige Umkehrfunktion $f^{-1} := \sqrt[n]{.}$ wird als <u>Wurzelfunktion</u> bezeichnet:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen heisst <u>Radikand</u>.

Rechnen mit Wurzeln

Die Rechenregeln für Potenzen

$$\boxed{\begin{array}{llll} 1. & a^r \cdot a^s & = & a^{r+s} \\ 2. & \frac{a^r}{a^s} & = & a^{r-s} \\ 3. & (a^r)^s & = & (a^s)^r = a^{r \cdot s} \end{array}}$$

lassen sich mit der Entsprechung $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ direkt auf Wurzeln übertragen. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$\boxed{\begin{array}{lllllll} \sqrt[n]{x^m} & = & (x^m)^{\frac{1}{n}} & & & = & x^{\frac{m}{n}} \\ \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} & = & x^{\frac{1}{n}} \cdot y^{\frac{1}{n}} & = & (x \cdot y)^{\frac{1}{n}} & = & \sqrt[n]{x \cdot y} \\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} & = & (x^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} & = & x^{\frac{1}{m \cdot n}} & = & \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} \\ \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} & = & \dfrac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}} & = & \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}} & = & \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} \end{array}}$$

Beispiel 2.1 *Als kleine Umformübung wollen wir zeigen, dass $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[m]{x} = \sqrt[n \cdot m]{x^{n+m}}$ gilt:*

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{n}} \cdot x^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = x^{\frac{n+m}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{x^{n+m}}$$

2.4 Polynome

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen mit $a_n \neq 0$. Dann heisst die Funktion

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \end{aligned}$$

oder kurz $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ ein Polynom vom Grad n. Die Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ heissen die Koeffizienten von p.

2.4.1 Polynome vom Grad 0

Ein Polynom vom Grad 0 ist eine konstante Funktion $p(x) = a_0 \in \mathbb{R}$. Ihr Graph ist eine Parallele zur x-Achse.

2.4.2 Polynome vom Grad 1

Ein Polynom vom Grad 1 hat die Gestalt

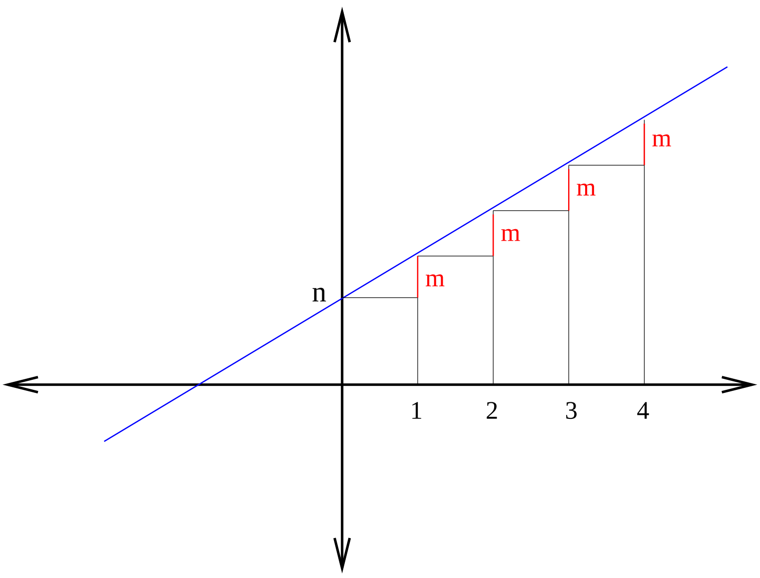
$$p(x) = a_0 + a_1 x = mx + n.$$

Wir haben dabei die gebräuchlichere Schreibweise mit den reellen Zahlen m und n gewählt. Der Graph von p ist eine Gerade und diese Gerade schneidet die y-Achse (d.h. es gilt $x = 0$) bei $p(0) = n$.

Falls der Wert von p (für irgend ein x) um 1 erhöht wird, gilt weiterhin:

$$\begin{aligned} p(x+1) &= m(x+1) + n \\ &= mx + n + m \\ &= p(x) + m, \end{aligned}$$

d.h. der Wert von p erhöht sich unabhängig vom gewählten x-Wert um m.



2.4.3 Polynome vom Grad 2

Ein Polynom vom Grad 2 hat die Gestalt

$$p(x) \;=\; a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \;=\; ax^2 + bx + c.$$

Wir haben dabei die gebräuchlichere Schreibweise mit den reellen Zahlen a, b und c gewählt. Der Graph von p ist eine sogenannte Parabel, die die y-Achse im Punkt c schneidet. Zunächst gilt (Probe machen!)

$$p(x) \;=\; ax^2 + bx + c \;=\; a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Aus dieser Darstellung, die auch als Scheiteldarstellung bezeichnet wird, können wir viele Informationen über p direkt ablesen.

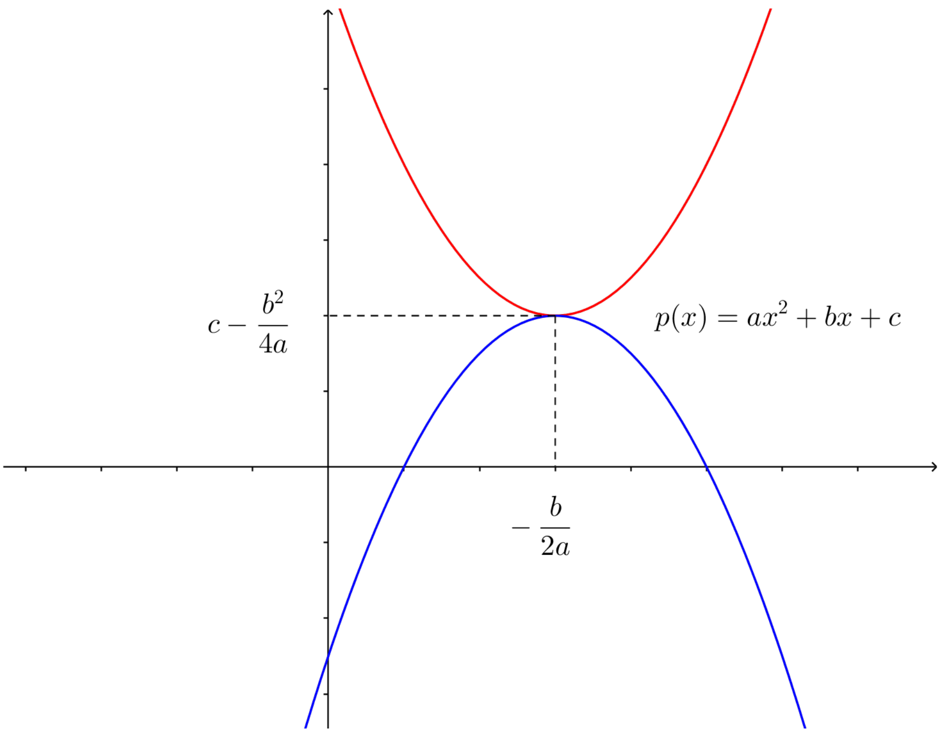
- Nehmen wir zunächst an, dass $\boxed{a > 0}$ ist. Dann gilt

  $$p(x) \;=\; \underbrace{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} - \frac{b^2}{4a} + c \;\geq\; c - \frac{b^2}{4a},$$

  d.h. $p(x)$ ist für **jeden** Funktionswert x grösser oder gleich der Zahl $c - \frac{b^2}{4a}$.
  Der tiefste Punkt ist natürlich dort, wo der erste Summand verschwindet, also Null wird, was natürlich genau für $x = -\frac{b}{2a}$ geschieht.
  Der tiefste Punkt der Parabel, der sogenannte Scheitel, hat somit die Koordinaten

  $$\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

- Falls $\boxed{a < 0}$ hat die Parabel den selben Scheitelpunkt wie im vorhergehenden Fall, allerdings ist der hier der höchste Punkt der nach unten geöffneten Parabel.



Beispiel 2.2 *Wir wollen den Scheitelpunkt der Parabel* $p(x) = 3x^2 - 12x + 19$ *bestimmen. Wir sehen sofort, dass* $a = 3$*,* $b = -12$ *und* $c = 19$ *gilt und erhalten mit der obigen Gleichung für den Scheitelpunkt*

$$\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right) = \left(-\frac{-12}{2\cdot 3},\ 19 - \frac{(-12)^2}{4\cdot 3}\right) = (2,\ 7)$$

Zur Übung wollen wir noch die Scheitelgleichung dieses quadratischen Polynoms konstruieren, indem wir quadratisch ergänzen.

$$\begin{aligned}
p(x) &= 3x^2 - 12x + 19 \\
&= 3\left(x^2 - 4x + \frac{19}{3}\right) \\
&= 3\left(x^2 - 4x + (-2)^2 - (-2)^2 + \frac{19}{3}\right) \\
&= 3\left((x-2)^2 - 4 + \frac{19}{3}\right) \\
&= 3\,(x-2)^2 + 7.
\end{aligned}$$

2.5 Rationale Funktionen

Seien p und q zwei Polynome, wobei q nicht das Nullpolynom ist. Dann heisst die Funktion f, die durch

$$f(x) \quad := \quad \frac{p(x)}{q(x)}$$

gegeben ist, rationale Funktion. Der Definitionsbereich des Zähler- und Nennerpolynoms ist ganz $\mathbb{R}$, d.h. die rationale Funktion f ist überall dort definiert, wo das Nennerpolynom **nicht** Null ist:

$$D(f) \quad = \quad \{\, x \in \mathbb{R} \;:\; q(x) \neq 0 \,\}.$$

Polynomdivision Ein wichtiges Hilfsmittel beim Umgang mit rationalen Funktionen ist die sogenannte Polynomdivision.

Dabei muss zunächst stets der Grad von p grösser oder gleich dem Grad von q sein. In Analogie zur Division mit Rest von zwei ganzen Zahlen kann man auch rationale Funktionen durch dieses Verfahren vereinfachen.

Beispiel zur Division mit Rest

Wir wollen die Division $\frac{153}{13} = 153 : 13$ mit Rest ausführen. Man errechnet:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & 5 & 3 & : & 1 & 3 & = & 1 & 1 \\
1 & 3 & & & & & & & \\
\cline{1-2}
 & 2 & 3 & & & & & & \\
 & 1 & 3 & & & & & & \\
\cline{2-3}
 & 1 & 0 & & & & & &
\end{array}$$

Also gilt:

$$\frac{153}{13} \quad = \quad 11 \quad \text{Rest } 10 \quad = \quad 11 + \frac{10}{13}$$

Beispiel zur Polynomdivision

Wir wollen die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 2}{x^2 + 1}$$

durch Polynomdivision vereinfachen und werden das Verfahren schrittweise erläutern.

1. Zunächst ergänzen wir alle „fehlenden" Glieder im Zähler- und Nennerpolynom (und versehen diese Glieder mit dem Koeffizient 0). Dann schreiben wir den Bruchstrich als Division. Wir erhalten:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 2}{x^2 + 1} = (x^3 + 2x^2 + 5x + 2) : (x^2 + \underbrace{0x}_{=0} + 1).$$

2. Wir nehmen das 1. Glied von p (d.h. x^3) und dividieren es durch das 1. Glied von q (d.h. x^2) und erhalten $\frac{x^3}{x^2} = x$. Dieses Ergebnis wird rechts vom Gleichheitszeichen notiert. Wir erhalten als vorübergehendes Resultat in unserem Rechenschema:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} (& x^3 & + & 2x^2 & + & 5x & + & 2 &) & : & (& x^2 & + & 0x & + & 1 &) & = & x \end{array}$$

3. Dieser erste Term rechts vom Gleichheitszeichen wird nun mit q multipliziert und das Ergebnis dieser Multiplikation $(x^2+0x+1)\cdot x = x^3+0x^2+x$ von links beginnend unter p geschrieben:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} (& x^3 & + & 2x^2 & + & 5x & + & 2 &) & : & (& x^2 & + & 0x & + & 1 &) & = & x \\ & x^3 & + & 0x^2 & + & x & & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

4. Nun wird dieses Ergebnis vom unmittelbar darüber stehenden Teil des Polynoms p subtrahiert $(x^3 + 2x^2 + 5x) - (x^3 + 0x^2 + x) = 2x^2 + 5x$. Dieses Ergebnis wird nun wieder im Divisionsschema (an richtiger Stelle) eingetragen:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} (& x^3 & + & 2x^2 & + & 5x & + & 2 &) & : & (& x^2 & + & 0x & + & 1 &) & = & x \\ & x^3 & + & 0x^2 & + & x & & & & & & & & & & & & & \\ \cline{2-6} & & & 2x^2 & + & 4x & & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

5. Zu diesem Term kommt nun noch der nächste bisher ungenutzte Term aus dem Polynom p hinzu, das ist hier die 2.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} (& x^3 & + & 2x^2 & + & 5x & + & 2 &) & : & (& x^2 & + & 0x & + & 1 &) & = & x \\ & x^3 & + & 0x^2 & + & x & & & & & & & & & & & & & \\ \cline{2-6} & & & 2x^2 & + & 4x & + & 2 & & & & & & & & & & & \end{array}$$

6. Nun wird das Verfahren, beginnend bei Schritt 2. mit dem neuen Polynom $2x^2 + 4x+2$ und dem alten Polynom q wiederholt. Man teilt also den 1. Summanden dieses neuen Polynoms $(2x^2)$ durch den 1. Summanden von q (x^2) und erhält $2x^2 : x^2 = 2$. Dieses Ergebnis wird unser neues Glied rechts vom Gleichheitszeichen.

   Man erhält also nach Abarbeitung der Schritte 2. - 4. :

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
(& x^3 & + & 2x^2 & + & 5x & + & 2 &) & : & (& x^2 & + & 0x & + & 1 &) & = & x & + & 2 \\
 & x^3 & + & 0x^2 & + & x & & & & & & & & & & & & & & & \\
\cline{2-6}
 & & & 2x^2 & + & 4x & + & 2 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 2x^2 & + & 0x & + & 2 & & & & & & & & & & & & & \\
\cline{4-8}
 & & & & & 4x & & & & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

   Hier sind wir nun fertig, denn $4x$ kann nicht weiter durch x^2 geteilt werden. Der Rest der Polynomdivision ist somit $4x$ und man erhält:

$$
\frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 2}{x^2 + 1} = x + 2 \quad \text{Rest } 4x \quad = \quad x + 2 + \frac{4x}{x^2 + 1}.
$$

3 Trigonometrische Funktionen

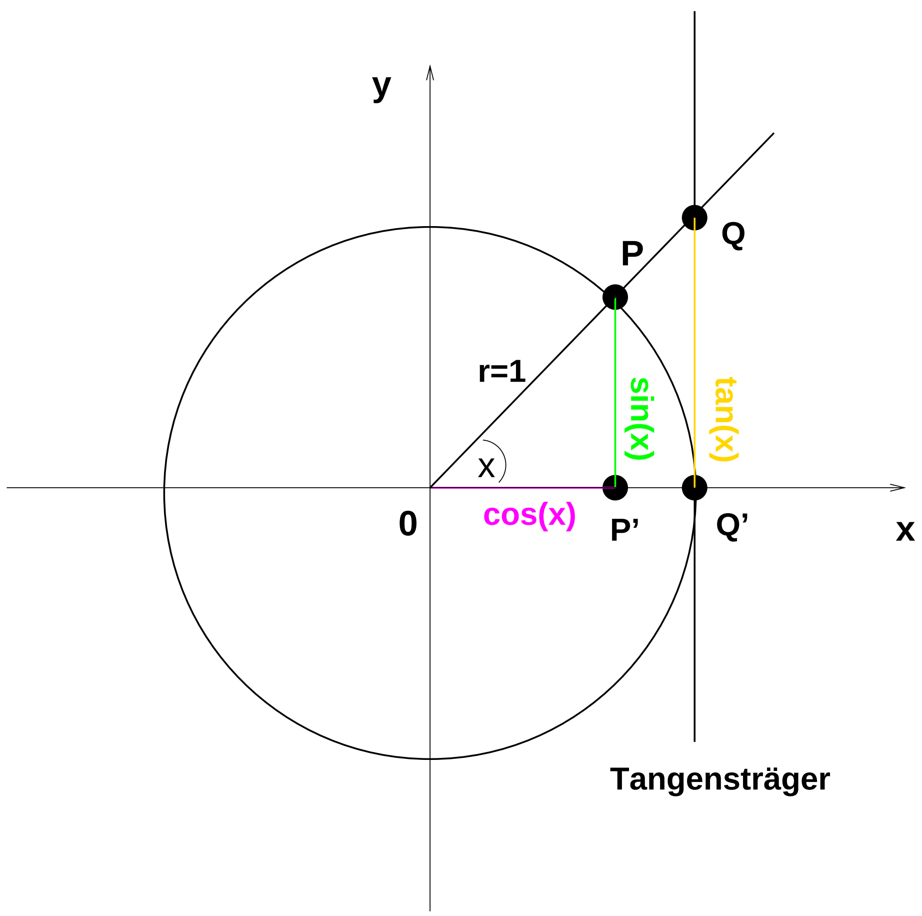
Die Funktionen sin und cos lassen sich am rechtwinkligen Dreieck definieren. Dazu sei x ein nichtrechter Winkel dieses Dreiecks im Bogenmass. Dann gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(x) &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ \cos(x) &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \end{aligned}}$$

Der Tangens und der Kotangens sind durch die Winkelfunktionen sin und cos definiert.

$$\boxed{\begin{aligned} \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ \cot(x) &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \end{aligned}}$$

Alle Winkelfunktionen können am Einheitskreis direkt abgelesen werden. Die folgende Skizze zeigt das für den Sinus, den Kosinus und den Tangens.



Wir wollen uns noch kurz überlegen, dass die Strecke $\overline{QQ'}$ tatsächlich der $\tan(x)$ ist, d.h. wir müssen beweisen, dass $\tan(x) = \overline{QQ'}$ ist. Dazu müssen wir uns drei Dinge überlegen und beide Aussagen zusammenfassen:

- Nach Definition gilt $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- Nach dem Strahlensatz gilt $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \dfrac{\overline{QQ'}}{\overline{0Q'}}$
- Der Punkt Q' liegt auf dem Einheitskreis, die Strecke $\overline{0Q'}$ hat also die Länge 1.

Alles klar?

Satz 1 (Sehr einfache Eigenschaften der Winkelfunktionen)

$$\begin{array}{lcll}
\sin(x) & \in & [-1,1] & \\
\cos(x) & \in & [-1,1] & \\
\sin(x+2\pi) & = & \sin(x) & \\
\cos(x+2\pi) & = & \cos(x) & \\
\sin^2(x)+\cos^2(x) & = & 1 & \textit{Satz des Pythagoras} \\
\sin(-x) & = & -\sin(x) & \sin \textit{ ist ungerade} \\
\cos(-x) & = & \cos(x) & \cos \textit{ ist gerade}
\end{array}$$

Satz 2 (Eigenschaften der Winkelfunktionen)

$$\begin{array}{lcl}
\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) & = & \cos(x) \\
\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) & = & -\sin(x) \\
\sin(\pi - x) & = & \sin(x) \\
\cos(\pi - x) & = & -\cos(x)
\end{array}$$

4 Exponential- und Logarithmusfunktionen

4.1 Die Eulersche Zahl e und die Funktion e^x

Die e-Funktion $f(x) = e^x$ ist eine der wichtigsten Funktionen in vielen ökonomischen (und technischen) Anwendungen. Sie kommt stets dann ins Spiel, wenn man versucht, so genannte Wachstumsprozesse mathematisch zu modellieren, bei denen (zumindest näherungsweise) folgendes gilt:

- der Zuwachs der betrachteten Grösse ist proportional zum aktuellen Wert dieser Grösse und
- dieser Zuwachs findet kontinuierlich statt.

Ein typischer Wachstumsprozess ist das Wachstum eines Guthabens bei (stetiger) Verzinsung. Wir wollen an einem Beispiel erläutern, wie hier die e-Funktion ins Spiel kommt.

Beispiel:

Wir legen ein Guthaben der Grösse $G_0 = 100.-$ (Franken, wobei wir im folgenden konsequent auf die Einheit verzichten werden) auf einem Konto zum Zinssatz $p = 0.01 = 1\%$ an. Dann hat man nach einem Jahr (bei einmaliger Verzinsung) ein Guthaben von

$$G_1 \;=\; G_0 \cdot (1+p) = G_0 + p \cdot G_0 \;=\; 100 \cdot 1.01 \;=\; 101.$$

Zunächst sieht man (sofort), dass der Zuwachs der betrachteten Grösse (das Guthaben) proportional zum aktuellen Wert dieser Grösse ist. Das spiegelt sich in der obigen Gleichung wider, denn nach Umstellung dieser Relation erhält man:

$$\underbrace{\Delta G = G_1 - G_0}_{\text{Zuwachs (pro Zeiteinheit)}} \quad = \quad \underbrace{p}_{\text{Proportionalitätsfaktor}} \quad \cdot \quad \underbrace{G_0}_{\text{Anfangsguthaben}}$$

Natürlich geschieht dieser Zuwachs in diesem Fall nicht kontinuierlich, sondern in Sprüngen von jeweils einem Jahr. Wir können uns aber diesem kontinuierlichen Zuwachs annäheren, indem wir z.B. nicht einmal pro Jahr, sondern jede Woche (d.h. 52 mal pro Jahr) mit dem entsprechend angepassten Zinssatz

$$\frac{p}{52} \;=\; \frac{1}{5'200}$$

verzinsen. Nach einem Jahr haben wir dann ein Guthaben von

$$G_1^{52} \;=\; \underbrace{\underbrace{\underbrace{G_0 \cdot \left(1+\frac{p}{52}\right)}_{\text{Guthaben nach 1. Woche}} \cdot \left(1+\frac{p}{52}\right)}_{\text{Guthaben nach 2. Woche}} \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{p}{52}\right)}_{\text{Guthaben nach 52. Woche}}$$

$$= \; G_0 \cdot \left(1+\frac{p}{52}\right)^{52} \;=\; 100 \cdot \left(\frac{5'201}{5'200}\right)^{52} \;\approx\; 101.0049$$

Natürlich ist auch das noch kein kontinuierlicher Prozess. Dazu müssten wir, anschaulich gesprochen, in jedem (der unendlich vielen) Augenblicken des Jahres mit einem (unendlich kleinen) angepassten Zinssatz p/∞ verzinsen. Mathematisch kann man das durch einen Grenzwert beschreiben:

$$G_1^\infty \quad = \quad G_0 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n .$$

Wir wollen uns nun diesen Grenzprozess etwas genauer anschauen und betrachten zunächst der Einfachheit halber den Fall $p = 1$. Zunächst einmal ist nicht klar, wie der Grenzwert von

$$? \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

aussieht, denn man kann hier zwei gegenläufige Effekte beobachten:

1. Für $n \to \infty$ konvergiert der Term $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ gegen 1, er kommt der 1 dabei beliebig nahe, wird aber nie genau 1.

2. Dann wird das Produkt von n solcher Terme gebildet:

   $$\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \tfrac{1}{n}\right) \quad = \quad \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n$$

   Dazu könnte uns folgendes einfallen:

   (a) Da $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ gilt, **könnte**

   $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad = \quad \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$$

   gelten!??

   (b) Für jede Konstante $q > 1$ (egal wie klein die Abweichung von 1 ist), gilt $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$. Also **könnte**

   $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad = \quad \infty$$

   gelten!??

Wir können hier also mit einem halbwegs gutem Gewissen nur feststellen, dass

$$1 \le \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \le \infty.$$

Berechnen wir die ersten 10 Glieder dieser Zahlenfolge, so erhalten wir die Zahlenwerte in der folgenden Tabelle.

n	$1+\frac{1}{n}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000	2.00000
2	1.50000	2.25000
3	1.33333	2.37037
4	1.25000	2.44146
5	1.20000	2.48832
6	1.16667	2.52163
7	1.14286	2.54650
8	1.12500	2.56578
9	1.11111	2.58117
10	1.10000	2.59374
50	1.0200	2.69159
100	1.0100	2.70481
1000	1.0010	2.71692

Anhand dieser numerischen Experimente scheint man erkennen zu können, dass diese Folge einen Grenzwert zwischen 2 und 3 hat. Das ist tatsächlich der Fall und dieser Grenzwert wird als Eulersche Zahl bezeichnet und durch e abgekürzt.

$$e \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;\approx\; 2.7182818284590452354.$$

Insbesondere gilt die folgende wichtige Gleichung, die uns eine Beschreibung und Definition der natürlichen Exponentialfunktion liefert:

$$\boxed{e^x \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

4.2 Exponential- und Logarithmusfunktion

Wir betrachten die Exponentialfunktion zur Basis a ($a > 0, a \neq 1$):

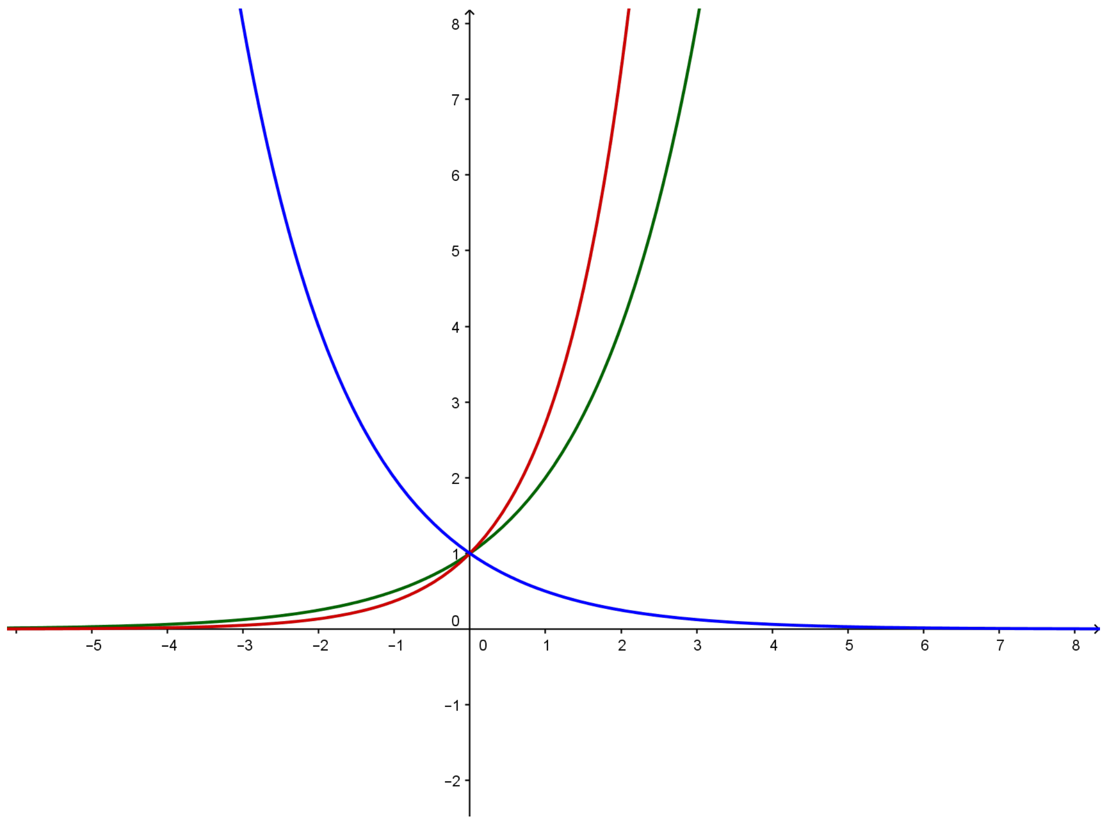
$$y = f(x) \quad = \quad a^x.$$

Wir untersuchen die beiden Fälle $a > 1$ und $a < 1$.

1. $a > 1$
   $y = a^x$ ist streng monoton wachsend
   für $x \to \infty$ geht $y \to \infty$
   für $x \to -\infty$ geht $y \to 0$

2. $a < 1$
   $y = a^x$ ist streng monoton fallend
   für $x \to \infty$ geht $y \to 0$
   und für $x \to -\infty$ geht $y \to \infty$

Beispiel 4.1 *$y = 2^x$ (grün), $y = (1/2)^x$ (blau) und $y = e^x$ (rot) mit der Eulerschen Zahl e heisst natürliche Exponentialfunktion.*



Alle Exponentialfunktionen sind also streng monoton. Die Umkehrfunktion existiert somit und wird Logarithmusfunktion genannt:

$$y = f^{-1}(x) \quad = \quad \log_a(x).$$

Die allgemeinen Eigenschaften, die Funktion und Umkehrfunktion miteinander verknüpfen, schreiben sich dann als:

$$\boxed{\begin{array}{lll} a^{\log_a(x)} = x & \text{für alle} & x > 0 \\ \log_a(a^x) = x & \text{für alle} & x \end{array}}$$

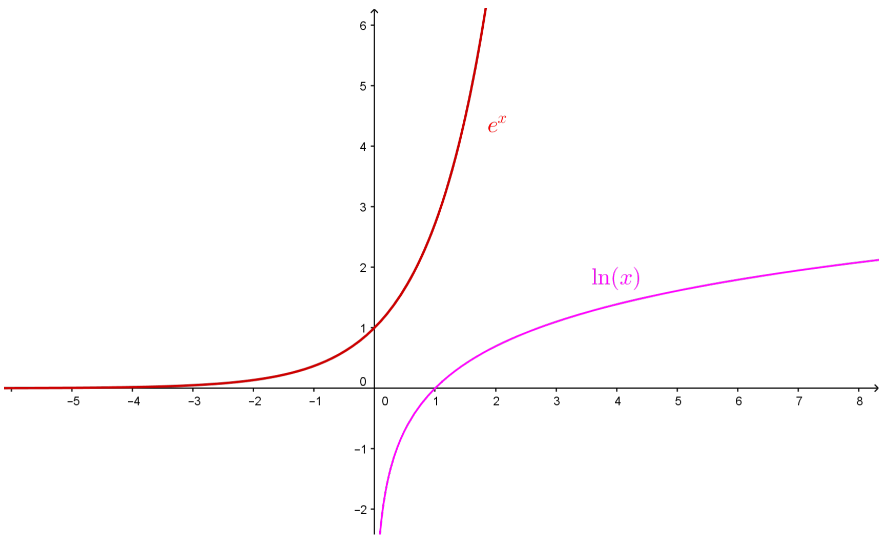
Dabei ist stets zu beachten, dass der Logarithmus nur für positive reelle Zahlen definiert ist. Man sollte sich beim Lösen von Logarithmengleichungen also zunächst überlegen, wo diese Gleichungen überhaupt definiert sind.

Die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion heisst natürlicher Logarithmus und wird mit $\ln(x) = \log_e(x)$ bezeichnet.

Wertetabelle:

x	e^x	$\ln(x)$
-2	0.1353	
-1		
- 0.5		nicht definiert
0		
0.01		
0.1		
0.5		
1		
2		
3	20.0855	1.0986
100		

Skizze:



Eigenschaften von $y = e^x$ und $y = \ln(x)$

Der wichtige Zusammenhang der beiden Funktionen lässt sich durch die beiden folgenden Gleichungen ausdrücken:

$$\boxed{e^{\ln(x)} = x \quad \text{und} \quad \ln(e^x) = x}$$

	$y = e^x$	$y = \ln(x)$
Definitionsbereich		
Wertebereich		
Monotonie	streng monoton wachsend	streng monoton wachsend
Spezielle Werte		
Grenzwerte		

Rechenregeln

Sei wieder $a > 0$ und $a \neq 1$ eine reelle Zahl.

Dann gelten für alle reellen Zahlen r, s die folgenden Potenzgesetze:

1. $a^r \cdot a^s \quad = \quad a^{r+s}$
2. $\frac{a^r}{a^s} \quad = \quad a^{r-s}$
3. $(a^r)^s \quad = \quad (a^s)^r \; = \; a^{r \cdot s}$
4. Jede positive Zahl c kann als Potenz zur Basis a dargestellt werden:
$$c = a^{\log_a(c)} = a^{\frac{\ln(c)}{\ln(a)}}.$$

Für alle positiven reellen Zahlen $u > 0$ und $v > 0$ gelten die folgenden Logarithmengesetze:

1. $\log_a(u \cdot v) \quad = \quad \log_a(u) + \log_a(v)$
2. $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) \quad = \quad \log_a(u) - \log_a(v)$
3. $\log_a(u^w) \quad = \quad w \cdot \log_a(u)$
4. Jede Zahl b kann als Logarithmus zur Basis a dargestellt werden:
$$b = \log_a(a^b).$$

Anwendung: Umrechnen von Logarithmen

Der Taschenrechner erlaubt es uns, Logarithmen zur Basis 10 und natürliche Logarithmen auszurechnen, nicht aber Logarithmen zu einer beliebigen Basis a. Wir wollen deshalb eine Umrechnungsformel angeben.

Satz 3 *Sei $a > 0$ und $a \neq 1$ eine reelle Zahl und $u > 0$. Dann gilt:*

$$\boxed{\log_a(u) = \frac{\log_{10}(u)}{\log_{10}(a)} = \frac{\ln(u)}{\ln(a)}}$$

Beweis: Wir suchen $\log_a(u) =: z$, und das heisst $a^z = u$. Dann ergibt sich die folgende Kette von Umformungen:

$$\begin{aligned} & a^z && = u \\ \Rightarrow\quad & \ln(a^z) && = \ln(u) \\ \Rightarrow\quad & z \cdot \ln(a) && = \ln(u) \quad \text{(mit Regel 3)} \\ \Rightarrow\quad & z && = \frac{\ln(u)}{\ln(a)} = \log_a(u). \end{aligned}$$

$\square$

Beispiel:

$$\log_7(53) = \frac{\ln(53)}{\ln(7)} \approx \frac{3.970}{1.946} \approx 2.040$$